

MATIÈRE : MATHÉMATIQUES
Semestre IPRÉPARATION N°02 AU
DEVOIR SURVEILLÉ N°01NIVEAU : 2BAC-PC-SVT
PROF : HAURECH FAHD**Exercice n°1 Questions indépendantes**

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation Suivante: $(x+1)^5 + 32 = 0$
- Soit h la fonction définie Sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 4}$.
 - Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x de $\mathbb{R}$: $h'(x) = \frac{2x}{3 \left(\sqrt[3]{x^2 + 4} \right)^2}$
 - Dresser le tableau des variations de h .
 - Écrire l'équation réduite de la droite tangente à (C_h) la courbe de h , au point $(2; 2)$.

Exercice n°2 Problème

Soit f la fonction définie Sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x+6} + 5 & \text{si } x > 2 \\ f(x) = x^3 + 2x - 5 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

Partie A

- Montrer que f est continue en 2.
- Montrer que f est dérivable à droite en 2.
 - Interpréter ce résultat graphiquement.
- Étudier la dérivabilité de f à gauche en 2.
 - f est-elle dérivable en 2? Justifier.

Partie B

Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty; 2]$

- Déterminer l'image de l'intervalle $I =]-\infty; 2]$ par g et justifier votre réponse.
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans I et que $1 < \alpha < 2$.
- Déterminer à l'aide de la dichotomie un encadrement de α à 0,25 près.
- Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - Dresser le tableau des variations de g^{-1} sur J .
 - Déterminer $g^{-1} \left(\left[0; \frac{11}{8} \right] \right)$ et montrer que g^{-1} est dérivable en 0 et que $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3\alpha^2 + 2}$

MATIÈRE : MATHS
1ER SEMESTRE

SÉRIE N°1

NIVEAU : 2 BAC SM
PROF : HAURECH FAHD**Exercice n°1**Calculer la limite de la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ dans chaque cas suivant :

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^2 + k}} \quad ; \quad U_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$$

$$U_n = \frac{\sum_{k=1}^n (2k+1)}{\sum_{k=1}^n k} \quad ; \quad U_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \quad \text{Avec } 0 < a < b$$

Exercice n°2Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2^n} \end{cases} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
Exprimer U_n en fonction de n , puis déterminer la limite de (U_n) **Exercice n°3**Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie les conditions suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) |f(x) - f(y) + x - y| \leq \frac{1}{2}|x - y|$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ 2. Soit (U_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{a}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) + U_n \end{cases} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |U_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|U_n - a|$ (b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.(c) On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_n = \sum_{k=0}^n f(U_k)$ Montrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite .**Exercice n°4**Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $U_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{k=n} E(kx)$ où $x \in \mathbb{R}$ Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite

Exercice n°5

Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{U_n} + U_n \right); \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n > \sqrt{3}$
 (b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
 (c) En déduire que (U_n) est convergente
2. (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{1}{2}(U_n - \sqrt{3})$
 (b) En déduire par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n - \sqrt{3} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - \sqrt{3})$
 (c) Calculer la limite de (U_n)

Exercice n°6

On considère les deux suites numériques (U_n) et (V_n) définies par :

$$U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{3^k}$$

1. Déterminer la limite de la suite (U_n)
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3V_{n+1} = U_n + V_n$
3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_n \leq 3$
4. En déduire que la suite (V_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°7

Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \arctan \left(\frac{1 + \sqrt{\tan U_n}}{2} \right); \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq U_n < \frac{\pi}{4}$
2. Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°8

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $(\forall n \geq 1) \quad U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$
2. Déterminer la monotonie de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
3. En déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente est que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

Exercice n°9

Soit f_n la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par : $f_n(x) = x - n + n \sin x$ où $n \in \mathbb{N}^*$

- Etudier les variations de f_n
 - Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ une solution unique a_n
 - Vérifier que : $\sin(a_n) = 1 - \frac{a_n}{n}$
- Montrer que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$
 - En déduire que la suite (a_n) est croissante
 - Montrer que la suite (a_n) est convergente
 - Calculer la limite de $\sin a_n$ en déduire la limite de a_n

Exercice n°10

- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'équation $\tan(\frac{\pi}{2}x) = \frac{\pi}{2nx}$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]0, 1[$
- Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est convergente
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}x_n$

Exercice n°11

- Soit n un entier naturel non nul.
Montrer que l'équation : $x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1 = 0$ possède une unique solution dans $[0, +\infty[$ On la note a_n
- Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.
- Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$: $a_n = \frac{1+a_n^{n+1}}{2}$
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

Exercice n°12

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2}{1+\sin x}}$

- Montrer que : $(\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]) : f'(x) = \frac{-\cos x}{\sqrt{2}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}}$
 - Montrer que : $(\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]) : |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution a dans $[0, \frac{\pi}{2}]$
- Soit (U_n) la suite numérique définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 - Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$
 - Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |U_{n+1} - a| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |U_n - a|$
 - En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

MATIÈRE : MATHÉMATIQUES
Semestre I

PRÉPARATION N°01 AU
DEVOIR SURVEILLÉ N°01

NIVEAU : 2BAC-PC-SVT
PROF : HAURECH FAHD

Exercice n°1

✓ Calculer chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x); \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

Exercice n°2

Soit f la fonction définie sur par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{mx - 1}{x^2 + 2} & ; \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 10} - 2}{x - 2} & ; \text{si } x > 2 \end{cases} \text{ où } m \in \mathbb{R}$$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

a) Justifier que f est continue sur chacun des intervalles $] -\infty; 2]$ et $]2; +\infty[$.

b) Pour quelle valeur de m la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice n°3

1. Montrer que l'équation : $\frac{2x + 1}{x^2 + 1} = x$ admet une solution unique α dans $]1; 2[$.

2. En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α à 0,5 près.

Exercice n°4

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 0]$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2}$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; puis justifier que f est continue sur l'intervalle $] -\infty; 0]$.

2. Montrer que : $(\forall x \in] -\infty; 0]); f'(x) = \frac{10x}{(x^2 + 2)^2}$. Puis en déduire la monotonie de f sur $] -\infty; 0]$

3. a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\left[-\frac{3}{2}; 1\right]$.

b) Montrer que : $\left(\forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 1\right]; f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{3+2x}{1-x}}\right)$.

4. a) Montrer que l'équation: $x^3 - x^2 + 2x + 3 = 0$ admet une solution unique c dans l'intervalle $] -1; 0]$.

b) Vérifier que : $f(c) = c$, puis en déduire que : $f^{-1}(c) = f(c)$.



Offre : Validation 4U

WhatsApp : 0721405779

Analyse 1 : Nombres réels

Exercice 1 :

Soient x, y deux réels, montrer que $\forall \varepsilon > 0 \quad |x - y| < \varepsilon \Leftrightarrow x = y$.

Exercice 2 :

Soient A et B deux ensembles non vides bornés de nombres réels

Montrer que si $A \subset B$ alors $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

Exercice 3 :

Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel n on a :

$$1/ \quad 0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n - 1$$

$$2/ \quad [x + y] = [x] + [y] + \alpha \text{ avec } \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1$$

$$3/ \quad E\left(\frac{nx}{n}\right) = E(x), n \in \mathbb{N}^*$$

$$4/ \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$$

Exercice 4 :

Calculer la borne supérieure et la borne inférieure des parties suivantes :

$$A = \left\{1 - \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$$B = \left\{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$$C = \left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Exercice 5 :

Soit A la partie des rationnels définies par $A = \{x \in \mathbb{Q} ; x^2 < 2\}$

1/ Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

2/ Soit M un majorant de A . Montrer que le rationnel $M - h$ est aussi un majorant de A avec : $0 < h < \frac{M^2 - 2}{2M}$, $h \in \mathbb{Q}$.

3/ En déduire que A n'admet pas une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 6 :

Soit $f(x) = x^3 + x - 1, \forall x \in \mathbb{Q}$.

Dans $\mathbb{Q}$ on considère les sous-ensembles :

$$A = \{x \in \mathbb{Q} / f(x) \leq 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{Q} / f(x) \geq 0\}$$

1/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions dans le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

2/ Montrer que les parties A et B ne sont pas vides et telles que

$$A \cap B = \emptyset \text{ et } \mathbb{Q} = A \cup B.$$

3/ Montrer que pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on a : $a < b$.

En déduire que : $\sup(A) \leq \inf(B)$.

4/ Montrer que pour entier $n > 0$ il existe une suite de nombre rationnels

$$a_n \in A \text{ tel que } a_n \leq \sup(A) \leq \inf(B) \leq a_n + \frac{1}{n}$$

5/ Conclure.

Exercice 1 :

Soit $p \in \mathbb{N}$

1. Vérifier que :

$$\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2 + p + 1}\right)$$

2. Calculer

$$\sum_{p=0}^n \arctan\left(\frac{1}{p^2 + p + 1}\right)$$

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}}\right)$$

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); (\exists! \alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]) / \sqrt{x} = \tan(\alpha)$

2. En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan(\sqrt{x})$

3. En déduire que : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

4. (a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

(b) Donner l'expression de f^{-1} pour tout $x \in J$

5. (a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f^{-1}(x)$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
3. Déterminer la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
4. Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a : $\frac{x}{x^2+1} < \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
5. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
6. Donner les équations des demi-tangentes à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
7. Tracer la courbe C_f .

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 4 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\right) & \text{si } x > 1 \\ f(x) = \pi + \sqrt[3]{1-x^3} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
3. Montrer que : $(\forall \beta \in]0; \frac{\pi}{2}[) ; \frac{1+\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2})}$
4. Montrer que $(\forall x \in]1; +\infty[) ; (\exists ! \alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[) / \sqrt{x-1} = \tan(\alpha)$
5. En déduire que $(\forall x \in]1; +\infty[) ; f(x) = \pi - 2 \arctan(\sqrt{x-1})$
6. Etudier les variations de f .
7. Soit g la restriction de f sur $] -\infty; 1]$
 - (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - (b) déterminer g^{-1} pour tout $x \in J$.
8. Construire dans un même repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les courbes (C_f) et $(C_{g^{-1}})$

Exercice 5 :

Démonstration du théorème des accroissements finis. ‘

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$.

En appliquant le théorème de Rolle ‘a la fonction $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \text{ montrer qu'il existe } c \in]a; b[\text{ tel que : } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Exercice 6 :

Soit P la fonction polynômiale définie par : $P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$

Montrer que l'équation $P'(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]0; 1[$

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}$

Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a; a + 2\pi[$

Exercice 8 :

Soient $f; g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, continues sur $[a; b]$, dérivables sur $]a; b[$.

On suppose que $f(a) \neq f(b)$ et $g(a) \neq g(b)$, Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que :

$$\frac{f'(c)}{f(a)-f(b)} = \frac{g'(c)}{g(a)-g(b)}, \text{ On considérera pour cela la fonction } F \text{ définie sur } [a; b] \text{ par :}$$

$$F(x) = [f(a) - f(b)]g(x) - [g(a) - g(b)]f(x)$$

Exercice 9 :

Soient p et q deux réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Montrer que la fonction polynômiale P définie par : $P(x) = x^n + px + q$ admet au plus trois racines réelles si n est impair et au plus deux racines réelles si n est pair.

Exercice 10 :

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction arctan, montrer que :

$$\forall t > 0; \arctan(t) > \frac{t}{1+t^2}$$

Exercice 11 :

On considère pour tout $\forall t > 0$; la fonction $f_n : x \mapsto x^n - t(1 - x)$

1. Prouver que, pour tout entier naturel n non nul , l'équation : $f_n(x) = 0$ admet une solution et une seule comprise entre 0 et 1 .

Soit α_n cette racine.

2. Montrer que , pour tout n de $\mathbb{N}$: $f_{n+1}(\alpha_n) = -t(1 - \alpha_n)^2$
3. Dédire que la suite (α_n) est croissante.
4. En déduire que (α_n) est convergente et calculer sa limite