

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x - 1 - 2\sqrt{x+1} & , x > -1 \\ f(x) = x^2 - x - 4 & , x \leq -1 \end{cases}$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 2) Etudier la continuité de f en -1
- 3) a) vérifier que : $\forall x \in]-1, +\infty[; \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$
b) Etudier la dérivabilité de f en -1 à droite et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 4) Etudier la dérivabilité de f en -1 à gauche et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 5) a) Vérifier que : $\forall x \in]-1, +\infty[; f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} \times (\sqrt{x+1}+1)}$
b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et que f est strictement décroissante sur $] -1, 0]$
c) Montrer que f est strictement décroissante sur $] -\infty, -1]$
d) Donner le tableau de variation de f
- 6) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]6, 7[$
b) vérifier que $\alpha = (\sqrt{3} + 1)^2 - 1$
- 7) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]-2, -1[$
- 8) a) Etudier le signe de $f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$
b) En déduire que $\forall x \in [7, +\infty[; 2\sqrt{x+1} \leq x - 1$
- 9) Soit g la restriction de la fonction f sur $[0, +\infty[$
a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J à déterminer
b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $] -3, +\infty[$
c) donner le tableau de variation de g^{-1}
d) Déterminer $g^{-1}(-2)$ en déduire $(g^{-1})'(-2)$

Exercice 2 :

Partie -1 : Soit h une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$, par : $h(x) = 2 + (x-2)\sqrt{x+1}$

- 1) Etudier les variations de la fonction h
- 2) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+, h(x) \geq 0$
- 3) Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$, par : $f(x) = \sqrt{x+1} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}$
 - a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = \frac{h(x)}{4\sqrt{x+1}}$
 - b) Etudier les variations de la fonction f
 - c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq 0$

Partie -2 : Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$, par : $g(x) = \sqrt{x+1} - 1 - \frac{x}{2}$

- 1) Etudier les variations de la fonction f
- 2) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) \leq 0$

Partie -3 :

- 1) Déduire de ce qui précède que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{x+1} \leq 1 + \frac{x}{2}$
- 2) Donner un encadrement du nombre $\sqrt{1.004}$ d'amplitude $2 \cdot 10^{-6}$