

NOTE:

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice1: (5 pts) Dans cet exercice toutes les questions sont indépendantes

1. Montrer que la solution de l'équation $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = \sqrt[6]{x}$ est $\frac{1}{4}$. (0.5 pt)

Soit h la fonction définie par :
$$\begin{cases} h(x) = \frac{\sqrt[3]{4x-3}-1}{x-1} & \text{si } x \in [\frac{3}{4}; +\infty[\setminus \{1\} \\ h(1) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Étudier la continuité de h en $x = 1$. (1 pt)

2. Calculer les limites suivantes: (1.5 pt)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2025} - 1}{x - 1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}$$

3. Calculer $g'(x)$ dans chacun des cas suivants: (1pt)

$$g(x) = \sin(2x^3 + 4x) + \sin(\pi^2) \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt[4]{x^3 + 3x + 1}$$

4. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .

Montrer que : f est dérivable en $a \Rightarrow f$ est continue en a . (1 pt)

Exercice2: (5 pts)

Soit f la fonction numérique définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{1-x} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{1}{2-\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Montrer que $D_f =]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[$. (0.75 pt)

2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f . (1.25pt)

3. a. Calculer $f'(x)$ pour tout x appartient à $D_f - \{1\}$. (1pt)

b. Dresser le tableau de variation de f . (0.5 pt)

4. a. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en unique point dont l'abscisse α appartient à l'intervalle $]0; 1[$. (1 pt)

b. En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude 5×10^{-1} . (0.5 pt)

Exercice3: (8 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$

Et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f(x) = (\sqrt{x} - 1)^2$ (0.5 pt)
2. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (0.5 pt)
3. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$. (0.5 pt)
4. a. Étudier la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$, puis interpréter le résultat obtenu. (0.75 pt)
b. Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ (1 pt)
c. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$, puis donner le tableau de variations de f . (0.75 pt)
d. Déterminer l'équation (T) la tangente de la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4. (0.75 pt)
5. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$.
a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. (0.5 pt)
b. Dresser le tableau de variation de la fonction g^{-1} . (0.25 pt)
c. Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable en 1, puis déterminer $(g^{-1})'(1)$. (0.75 pt)
d. Calculer : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + g^{-1}(x) - 5}{x - 1}$ (1pt)
e. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J . (0.75pt)

Exercice4: (2 pts)

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = x^{n+1} - 3x^n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a. Montrer que h est strictement décroissante sur $[0; \frac{3n}{n+1}]$ et elle est strictement croissante sur $[\frac{3n}{n+1}; +\infty[$, puis donner le tableau de variation de h . (1pt)
b. En déduire que $h(\frac{3n}{n+1}) < 0$ (remarquer que $h(1) = -1$) (0.5pt)
2. Montrer que : $\exists! \beta \in]\frac{3n}{n+1}; 3[/ h(\beta) = 0$ (0.5pt)

Bonne chance