

Exercice 1 :**Partie I :** Soit g fonction une définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 2\ln(x)$

- | | |
|--|---|
| 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ | 3) Dresser tableau de variation de g sur $]0; +\infty[$ |
| 2) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[\quad g'(x) = \frac{x-2}{x}$ | 4) Dédire que : $\forall x \in]0; +\infty[: g(x) > 0$ |

PARTIE II Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 - (\ln(x))^2$ Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu
- A) - Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} = 0$ (posons $t = \sqrt{x}$)
 B) - Dédire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$
 C) - Etudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$
- A) - Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équations suivantes : $1 - \ln(x) = 0$ et $\ln(x) + 1 = 0$
 B) - Donner dans $]0; +\infty[$ le signe d'expression $(1 - \ln(x))(1 + \ln(x))$
 C) - Vérifier que : $\forall x \in]0; +\infty[: f(x) - x = (1 - \ln(x))(1 + \ln(x))$
 D) - Dédire la position relative de (C_f) et $(\Delta): y = x$.
- A) - Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x}$
 B) - B) - Dédire que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
 C) - Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$
 D) - donner l'équation de (T) tangente de (C_f) en point $A(1; 2)$
- A) - Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[: f''(x) = \frac{2(\ln(x)-1)}{x^2}$
 B) - Dédire la concavité de (C_f) et point d'inflexion de (C_f) sur $]0; +\infty[$
- Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet unique solution sur $]e^{-2}; e^{-1}[$
- Construire (C_f) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (on pose $e \approx 2,7$ et $e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,36$)
- A) - Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J à déterminer
 B) - Etudier la dérivabilité f^{-1} en point 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu
 C) - Tracer dans le même repère précédent et avec une autre couleur la courbe $(C_{f^{-1}})$

Partie III :Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = f(u_n)$

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{e} \leq u_n \leq e$
- Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- Dédire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice 2

- Simplifier les nombres suivants : $A = \ln((e^3)) + \ln\left(\left(\frac{e}{5}\right)\right) + \ln\left(\frac{5}{e}\right) + \ln\left(\frac{1}{e^{-3}}\right)$
- A) - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E_1) : \ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0$
 B) - Dédire dans $\mathbb{R}$ les solutions de l'inéquation suivante : $(I_1) : \ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 \geq 0$
- A) - Vérifier que : $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1} : \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
 B) - Dédire les primitives les fonctions primitives de la fonction $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$