

Test d'évaluation ④ Mathématiques

SUJET A

Pts Exercice n° ①

Partie I : On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \exp\left(-\frac{\ln^2(x)}{2}\right) & , x > 0 \\ f(x) = \frac{\ln(x+1)}{(1+x)^2} & , -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Montrer que la fonction f est continue en 0.

4) a. Montrer que f est dérivable à gauche en 0, dont on précisera $f'_g(0)$.

b. Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$: $\frac{f(x)}{x} = \exp\left(-\frac{\ln(x)}{2}(\ln(x) + 2)\right)$.

c. En déduire que f est dérivable à droite en 0, dont on précisera $f'_d(0)$.

d. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

5) a. Montrer que :
$$\begin{cases} f'(x) = -\frac{\ln(x)}{x} \exp\left(-\frac{\ln^2(x)}{2}\right) & , x > 0 \\ f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x+1)}{(1+x)^3} & , -1 < x < 0 \end{cases}$$

b. Montrer que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $] -1; 0[$ et $]0; 1[$, et qu'elle est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

c. Établir le tableau de variations de f sur $] -1; +\infty[$.

6) Tracer, à main levée, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, en précisant les demi-tangentes et les asymptotes.

* on admet que $(\mathcal{C}_f)$ a deux points d'inflexion dont les abscisses sont 0.2 et 1.8

7) a. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$ sur l'intervalle $] -1; +\infty[$.

b. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $\int_{-1+e^{-1}}^0 \frac{\ln(x+1)}{(1+x)^2} dx = -1$.

c. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations $y = 0$, $x = 0$ et $x = -1 + e^{-1}$.

Partie II : On considère la suite numérique (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = e^{-1} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad ; n \geq 0 \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $e^{-1} \leq u_n \leq 1$.

2) a. En utilisant le résultat de la question de la **partie I-4)b**, montrer que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) est croissante, et qu'elle est convergente.

3) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Test d'évaluation ④ Mathématiques**SUJET A**Pts Exercice n° ②

On considère l'équation différentielle suivante (E) : $3y' - 5y - 1 = 0$

- 1) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).
- 2) Déterminer la solution, notée h, de l'équation (E) qui vérifie la condition : $h(\sqrt[5]{8}) = 0$

Exercice n° ③

On pose : $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{e^{t^2}}{t^2} dt$ et $J = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{2t^2 - 1}{t^2} e^{t^2} dt$

- 1) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $I = \sqrt{2} \left(\sqrt{e} - \frac{e^2}{2} \right) + 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} e^{t^2} dt$.
- 2) En déduire la valeur de l'intégrale J.