



INSPECTION D'ACADEMIE DE KADACK

Etablissement : LEPBB

(Durée 03 heures)

Premier semestre : devoir n° 2

Année scolaire : 2024-2025

Niveau : TS₂

Exercice (08 points)

Soit la suite (U_n) définie sur N^* par : $\begin{cases} U_1 = 3 \\ 3U_{n+1} = U_n + 12 \end{cases}$

- 1) Sans calculer les trois premiers termes de la suite (U_n) , représenter les sur l'axe des abscisses du repère **01,5pt**
- 2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in N^*$ non nul on a : $3 \leq U_n \leq 6$ **0,5pt**
- 3) Etudier le sens de variation de cette suite. En déduire que (U_n) converge puis déterminer sa limite **01pt**
- 4) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul on a : $U_n = -\frac{1}{3^{n-2}} + 6$ **0,5pt**
- 5) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = U_n + a$, $a \in \mathbb{R}$
 - a) Déterminer le réel a sachant la suite (V_n) est géométrique **01pt**
 - b) Exprimer V_n en fonction de n , puis retrouver l'expression de U_n en fonction de n **01pt**
- 6) On pose $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ et $R_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ **01pt**
Exprimer S_n et R_n en fonction de n puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n$ **01,5pt**

Problème (12 points)

Partie A : Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

- 1) Dresser le tableau de variation de la fonction g **01pt**
- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in [2; 2,3]$ **0,75pt**
- 3) Préciser le signe de $g(x)$ **0,5pt**

Partie B : Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}, & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x - 2, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ puis calculer les limites de f aux bornes de D_f **01,5pt**
- 2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats obtenus **01,5pt**
- 3) Etudier les branches infinies de la courbe de f . **01,25pt**

- 4) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ et
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}; & \text{si } x \geq 0 \\ f'(x) = \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}; & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
 01pt

- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x - \sqrt{1+x^2} \geq 0$; en déduire le signe de $f'(x)$ sur $] -\infty; 0[$. **0,75pt**

- b) Dresser le tableau de variations de f **0,75pt**

- 5) Tracer (C_f) . On prendra $\alpha \approx 2,2$. **01pt**

- 6) Soit h la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; 1[$

- a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera son ensemble de définition et ses variations **01pt**

- b) Calculer $a = h(-\sqrt{3})$ et $b = h\left(\frac{1}{2}\right)$ puis $(h^{-1})'(a)$ et $(h^{-1})'(b)$ **01pt**

