

DEUXIEME DEVOIR SURVEILLE de MATHEMATIQUES

Exercice 1 : 3 points

1. Démontrer que pour tout réel x , $\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x$
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin x \cos^2 x + \cos^3 x$ **0,75pt**
 - a. Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$, F telle que $F(0)=1$ **0,75pt**
3. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$ privé de -1 .
 - a. Trouver les réels a, b et c tels que $g(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$ **0,75pt**
 - b. En déduire la primitive G de g telle que $G(0)=2$. **0,75pt**

EXERCICE 2. 8 POINTS

Partie A

Soit le polynôme complexe $P(z) = z^3 + (-5 + 2i)z^2 + (7 - 7i)z - 2 + 6i$

1. Montrer P admet une unique racine réelle à déterminer. 0,5pt
2. Factoriser $P(Z)$ 0,25pt
3. Résoudre l'équation $P(z)=0$. 0,5pt

PARTIE B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}; \vec{v})$, on donne les points

$A(2 - i), B(2), C(1 - i), D(1)$ et $E(1 + i\sqrt{3})$.

On définit $I = \arg\{(A, 1)|(C, -2)\}$ et $J = \arg\{(A, 1)|(C, 2)\}$

1. Placer les points A, B, C et D . 0,25pt
2. Donner l'écriture exponentielle de Z_C et Z_E . 2x 0,25pt
3. Placer exactement le point E . 0,25pt
4. Donner l'écriture algébrique de Z_E^8 0,5pt
5. Calculer les affixes de I et J . 2x 0,25pt
6. Donner la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$ 0,5pt
7. Donner le module et un argument de $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ 0,5pt
8. En déduire la nature exacte du triangle ABC . 0,25pt
9. Montrer que A, B, C et D sur un même cercle dont précisera le centre et le rayon. 0,75pt
10. Soit le nombre complexe $Z = \frac{Z_E}{Z_C}$
 - a. Donner l'écriture exponentielle de Z . 0,5pt
 - b. Donner l'écriture algébrique de Z . 0,25pt
 - c. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$ 2x0,25pt

Partie C

On définit l'application f définie du plan $\mathbb{P}$ privé de C vers le Plan qui associe à tout point $M(Z)$ le point $M'(Z')$ telle que $Z' = \frac{Z-2+i}{Z-1+i}$

- a. Exprimer OM' en fonction de MA et MC . 0,25pt
- b. Donner une interprétation géométrique $\arg Z'$. 0,25pt
- c. Déterminer l'ensemble des points M pour que Z' soit réel non nul. 0,5pt
- d. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $|Z'| = 2$ 0,5pt

PROBLEME 09 POINTS**PARTIE A : 1,25pt**

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 2$

1. Dresser le tableau de variation de g . 0,5pt
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in]-1; 0[$. 0,25pt
3. Donner une valeur approchée par défaut de α à 0,1 près. 0,25pt
4. Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . 0,25pt

PARTIE B : 5,25pts

Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x^2 + 1} - 1 & \text{si } x > 0 \\ \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$. 0,25pt
2. Calculer les limites aux bornes de D_f . 2 x 0,25pt
3. Etudier la branche infinie de C_f en $+\infty$. 0,25pt
4. Montrer que la droite $(D) : y = x$ est asymptote oblique de C_f en $-\infty$. 0,5pt
5. Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement les résultats obtenus. 1pt
6. Montrer que pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. 0,5pt
7. Montrer que pour $x < 0$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$. 0,5pt
8. Dresser le tableau de variations de f . 0,75pt
9. Calculer $f(-1)$, $f(1)$ et Tracer C_f dans un repère d'unité 1cm. 1pt

PARTIE c : 1,5pt

Soit h la restriction de f sur $]0; +\infty[$

1. Montrer que h est une bijection de $]0; +\infty[$ vers J à préciser. 0,25pt
2. Dresser le tableau de variation de h^{-1} la bijection réciproque de h . 0,25pt
3. Etudier la dérivabilité de h^{-1} . 0,25pt
4. Calculer $(h^{-1})'(\sqrt{2} - 1)$. 0,25pt
5. TRACER Ch^{-1} . 0,5pt

Bon courage