

Classe : TS₂

DEVOIR SURVEILLE N°1 DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

EXERCICE 1 (5 points)

A) Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 3(2+i)z^2 + 3(3+5i)z + 6 - 22i$

1) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera **0,5pt**

2) Résoudre complètement $P(z) = 0$ **0,5pt**

B) Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points $A(2i), B(3+2i)$ et $C(3-i)$

1) a) Placer ces points sur une figure **0,5pt**

b) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ **0,5pt+0,5pt**

c) Donner la nature du triangle ABC **0,5pt**

2) Soit E le point défini par $\vec{OE} = \frac{5}{2}\vec{OA}$ et J le barycentre des points pondérés $\{(C, 1); (E, 2); (B, -2)\}$

a) Déterminer l'abscisse de E , puis celui de J **0,5pt**

b) Montrer que les points J, A et C sont alignés **0,5pt**

c) Déterminer l'abscisse du point F tel que $ABCF$ soit un parallélogramme **0,5pt**

d) Montrer que les points A, B, C et F sont sur un même cercle dont on précisera l'abscisse du centre et le rayon **0,5pt**

EXERCICE 2 (4 points)

(V_n) est une suite géométrique définie par : $V_2 = 2$ et $V_5 = 4\sqrt{2}$

(U_n) est une suite arithmétique telles que $U_0 = 0$ et $U_4 = \pi$

1) Déterminer les raisons q et r respectivement des suites (V_n) et (U_n) **0,5pt +0,5pt**

2) Soit (Z_n) la suite complexe de module V_n et dont un argument est U_n

a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, Z_n = 2^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}n}$ **1pt**

b) Ecrire la forme algébrique du complexe $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_n}$. En déduire quel que soit n la nature du triangle $OM_n M_{n+1}$

0,5pt +0,5pt

3) Soit M_n le point d'abscisse Z_n

a) En utilisant la question précédente calculer la distance $M_n M_{n+1}$ en fonction de V_n

0,5pt

b) Calculer la longueur de la ligne brisée $M_0 M_1 M_2 \dots M_8$

Donner la réponse sous la forme $\frac{1}{2}(a + b\sqrt{2})$ où a et b sont des entiers **0,5pt**

Classe : TS₂**PROBLEME (11 points)****Partie A :**

Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2 + 1)$.

- 1) Déterminer la limite de g en $+\infty$ **0,25pt**
- 2) Démontrer que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $\forall x \in]0; +\infty[$,
 $g'(x) = \frac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ **0,5pt**
- 3) Dresser le tableau de variation de g . **0,5pt**
- 4) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α , puis vérifier que $\alpha \in]1,9; 2[$. **0,5pt**
- 5) En déduire le signe de $g(x)$. **0,5pt**

Partie B :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x - \frac{e^x-1}{e^x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- 1) Montrer que le domaine de définition $D_f = \mathbb{R}$. **0,5pt**
- 2) Etudier la continuité de f en 0. **0,25pt**
- 3) a) Pour $x < 0$, montrer que $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{e^x-1}{x} \times \frac{1}{e^x+1}$. **0,5pt**
 b) En déduire la dérivabilité de f en 0 puis interpréter les résultats. **0,5pt+0,25**
- 4) Calculer les limites de f aux bornes de D_f . **0,5pt +0,5pt**
- 5) a) Montrer que la droite $(D): y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C_f) en $-\infty$ **0,5pt**
 b) Etudier la position de (C_f) par rapport à (D) sur $] -\infty; 0[$. **0,5pt**
- 6) Etudier la branche infinie de la courbe (C_f) en $+\infty$. **0,5pt**
- 7) Montrer que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$, puis encadrer $f(\alpha)$. **0,5pt +0,25**
- 8) Montrer que : $\begin{cases} f'(x) = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}, \forall x \in]-\infty; 0[\\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}, \forall x \in]0; +\infty[\end{cases}$ **1pt**
- 9) Dresser le tableau de variation de f . **1pt**
- 10) Tracer la courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. **1pt**
- 11) Soit h la restriction de f à l'intervalle $] -\infty; 0[$.
 a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera son ensemble de définition J et son sens de variation. **0,25pt**
 b) Construire la courbe représentative de h^{-1} . **0,25pt**

NB : la clarté et la précision de la démarche seront prises en compte