

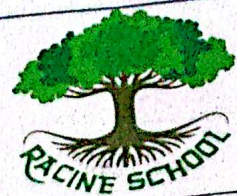
DEVOIR SURVEILLÉ

Probleme :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- 2) Etudier la continuité de f en 0.
- 3) Etudier la dérivabilité de f en 0.
- 4) Interpréter graphiquement ces résultats.
- 5) Soit la fonction $\varphi(x) = x^3 + 3x - 2$
 - a) Montrer que $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; 1[$.
 - b) Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
 - c) En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}$.
- 6) Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable.
- 7) a) Montrer que $f'(x) = \frac{x\varphi(x)}{(x^2+1)^2}$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.
b) Dresser le tableau de variation de f .
- 8) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.
b) Donner la nature de la branche infinie en $+\infty$.
c) Etudier la position relative de la courbe par rapport à ces asymptotes.
- 9) soit g la restriction de f sur $]-\infty, 0]$.
 - a) Montrer que g est une bijection de $]-\infty, 0]$ vers un intervalle J à préciser.
 - b) Donner le sens de variation de g^{-1} ; g^{-1} est-elle dérivable sur J ?
 - c) calculer $g(-1)$ en déduire $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.
- 10) Tracer la courbe de f et la courbe de g^{-1} dans un même repère ainsi que les demi tangentes en 0.



DEVOIR DE MATHÉMATIQUES N°1 DU SECOND SEMESTRE
Durée : 4 heures

Exercice 1 (4 points)

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^3 = 1$
- 2) Développer $(2 + 2i)^3$.
- 3) Soit l'équation (E) $z^3 = -16 + 16i$
En posant $U = \frac{z}{2+2i}$ déterminer sous forme algébrique puis trigonométrique les racines de (E).
- 4) En déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Exercice 2 (6 points)

- 1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :
(E) : $z^4 + (-5 + 3i)z^3 + (8 - 9i)z^2 + (-14 + 6i)z + 10 = 0$
 - a) Montrer que l'équation (E) admet une racine réelle et une racine imaginaire à préciser.
 - b) Résoudre l'équation (E).
- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives 1, i, $1 - 3i$ et $3 - i$.
Placer ces points dans le repère $(O, \vec{u}; \vec{v})$.
- 3) Soit S la similitude directe qui transforme A en C et B en D.
 - a) Déterminer l'écriture complexe de S.
 - b) Donner les éléments caractéristiques de S.
- 4) On considère la suite de points M_n d'affixe z_n ($n \in \mathbb{Z}$) avec $z_0 = i$ et $z_{n+1} = -2iz_n + 1 - i$
 - a) Calculer $\frac{z_{n+1} - \omega}{z_n - \omega}$ où ω est l'affixe du centre Ω de la similitude S.
 - b) En déduire la nature du triangle $\Omega M_n M_{n+1}$.
 - c) Démontrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation $U_n = |z_{n+1} - z_n|$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.
 - d) Exprimer en fonction de n la longueur
 $d = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_{n-1} M_n + M_n M_{n+1}$ pour ($n \geq 2$)

Problème (5 points)

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 + x + \ln x$

- 1) Dresser le tableau de variation de g .
- 2) Montrer qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x) = 0$. Vérifier que $0.2 < \alpha < 0.3$
- 3) En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.
- 4) Etablir la relation : $\ln \alpha = -1 - \alpha$.

Partie B :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1+x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 5 cm).

- 1) Montrer que f est continue en 0 puis sur $[0; +\infty[$.
- 2) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
- 3) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- 4) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- 5) Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$.
- 6) Dresser le tableau de variation de f .
- 7) Construire (C_f) (on prendra $\alpha = 0.3$).

Partie C :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [1; +\infty[$.

- 1) Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
- 2) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h . Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur J .
- 3) Calculer $h(2)$ et $(h^{-1})' \left(\frac{2 \ln 2}{3} \right)$.
- 4) Construire $(C_{h^{-1}})$ la courbe de h^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



DEVOIR SURVEILLE N°2 DE MATHÉMATIQUES DU SECOND SEMESTRE

(Durée 2h)

Problème

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1+x)e^x - 1$

- 1) Etudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$. (1.5 pt)
- 2) Calculer $g'(x)$ puis étudier son signe. (1.5 pt)
- 3) Dresser le tableau de variations de g . (1.5 pt)
- 4) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de g . (1.5 pt)

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x(e^x - 1) & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{\ln x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

- 1) Démontrer que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. (1 pt)
- 2) Etudier la continuité de f en 0. (1 pt)
- 3) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu. (1.5 pt)
- 4) Etudier les limites de f aux bornes de D_f et interpréter graphiquement, si possible, les résultats obtenus. (2.5pts)
- 5) Préciser la nature des branches infinies de (C_f) . (1 pt)
- 6)
 - a) Calculer $f'(x)$ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[\setminus \{1\}$. (2 pts)
 - b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur D_f . (2 pts)
- 7) Dresser le tableau de variations de f . (1 pt)
- 8) Construire (C_f) et ses asymptotes. (2 pts)

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES DU SECOND SEMESTRE

Durée 4h

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les applications : $f: z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $g: z' = -2z + 3i$

On pose : $h = f \circ g$ et le point $\Omega(i)$

- 1) Déterminer la nature de chacune des deux applications f et g et leurs éléments caractéristiques.
- 2) On considère le point $A(a)$ avec a un nombre complexe donné différent de i .
On pose $B = h(A)$, $C = h(B)$ et $D = h(C)$
 - a) Montrer que si le point $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ par l'application h alors
$$z' - i = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}}(z - i)$$
 - b) Déterminer la nature de h et ses éléments géométriques caractéristiques.
- 3)
 - a) Déterminer en fonction du nombre complexe a , les complexes b, c et d affixes respectives de B, C et D .
 - b) Montrer que les points Ω, A et D sont alignés.
 - c) Démontrer que Ω est le barycentre du système pondéré $\{(B, 4); (C, 2); (D, 1)\}$

Exercice 2 (5 points)

Un tiroir contient, pêle-mêle, 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents, mais indiscernables au toucher.

- 1) On tire simultanément 2 chaussures au hasard et l'on admet l'équiprobabilité des tirages.
 - a) Calculer la probabilité de l'événement A : « tirer 2 chaussures de la même couleur ».
 - b) Calculer la probabilité de l'événement B : « tirer un pied gauche et un pied droit ».
 - c) Montrer que la probabilité de l'événement C : « tirer les deux chaussures d'un même modèle » est $\frac{1}{19}$.
- 2) On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire successivement et sans remise une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.
 - a) Justifier que X prend les valeurs 2; 3; 4.

- b) Montrer que la loi de probabilité de X est : $P(X = 2) = \frac{1}{6}$; $P(X = 3) = \frac{1}{3}$ et $P(X = 4) = \frac{1}{2}$
- c) Calculer son espérance mathématique et son écart type.

Problème (10 points)

Partie A

- 1) soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = -(2x + 1)e^{-2x} + 2$
- a) Dresser le tableau de variation de h sur $[0; +\infty[$.
- b) En déduire le signe de $h(x)$ sur $[0; +\infty[$.
- 2) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 1 cm.
Soit f la fonction de représentation graphique (C_f) définie par
- $$f(x) = \begin{cases} -1 + x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ (x+1)e^{-2x} + 2x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
- a) Montrer que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}$.
- b) Calculer les limites aux bornes de D_f .
- c) Préciser la branche infinie de la courbe (C_f) en $-\infty$.
- d) Montrer que (C_f) admet une asymptote (Δ) en $+\infty$ dont on déterminera une équation puis étudier la position relative de (C_f) et (Δ) .
- e) Montrer que f est continue en 0.
- f) i) démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$ $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{e^{2x}} \left[1 + 2e^{2x} - 2\frac{e^{2x}-1}{2x} \right]$
ii) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter géométriquement les résultats.
- g) Etudier les variations de f sur chaque intervalle où elle est dérivable puis dresser son tableau de variation.
- h) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; 1]$.
- i) Tracer les demi-tangentes, (Δ) et la courbe (C_f) .

Partie B

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 1 - \frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}$

- 1) Montrer que le réel α vérifiant $f(\alpha) = 0$ est une solution de l'équation $g(x) = x$.
- 2)
- a) Calculer $g'(x)$. Etudier les variations de g' sur $[0; 1]$.
- b) En déduire que pour tout $x \in [0; 1]$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- c) Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $g(x) \in [0; 1]$.
- 3) On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$
- a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1]$.
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$
- c) En déduire que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- d) Montrer que (u_n) est convergente et donner sa limite.
- e) Déterminer le plus petit entier p pour lequel $|u_p - \alpha| \leq 10^{-3}$