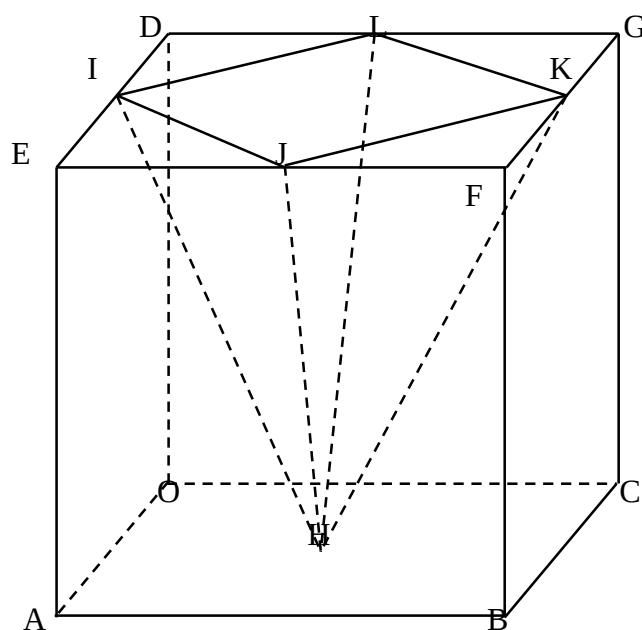


SITUATION D’EVALUATION**Contexte :**

Après 30 ans de bons et loyaux services, le père de Koffi reçoit des mains de ses collègues de service des cadeaux. Parmi ces cadeaux se trouve une douzaine de verre à boire tous identiques et ayant la forme d’un cube $OABCDEFG$ d’arrête $a\text{ cm}$ ou a est un nombre réel strictement positif comme l’indique la figure ci-dessous.



I ; J ; K et L sont les milieux respectifs des arêtes $[DE]$; $[EF]$; $[FG]$ et $[GD]$. La partie creuse du verre à boire a la forme d’une pyramide régulière $HIJKL$ de sommet H , centre du carré $OABC$. On désigne par P le centre de gravité du triangle HIL . Deux autres cadeaux sont des tableaux T_1 et T_2 . Dans la salle de réception sont tracées des allées que doivent emprunter les agents de services. Koffi élève en classe de terminale D, attiré par la forme de ces verres et les dispositions prises pour la circonstance voudrait connaître la capacité de chaque verre, étudier la position des allées de certains plans et déterminer la nature des tableaux T_1 et T_2 . Pour cela, il munit l’espace du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{a}\overrightarrow{OA}$; $\vec{j} = \frac{1}{a}\overrightarrow{OC}$; $\vec{k} = \frac{1}{a}\overrightarrow{OD}$.

Tâche : Tu es invité à aider Koffi en résolvant les problèmes ci-dessous :

Problème 1

- 1) Justifie que les points I ; J ; K et L ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{a}{2}; 0; a\right)$, $\left(a; \frac{a}{2}; a\right)$, $\left(\frac{a}{2}; a; a\right)$ et $\left(0; \frac{a}{2}; a\right)$.
- 2) a) Détermine la nature exacte du quadrilatère IJKL.
b) Calcule la capacité de ce verre à boire.
c) Dédus le volume de la partie non creuse.
- 3) a) Détermine les coordonnées de P
b) Démontre qu'une équation cartésienne du plan (HJK) est $2x + 2y - z - 2a = 0$
c) Détermine un système d'équations cartésiennes de la droite (D) passant par P et perpendiculaire à (HJK).
- 4) Détermine les coordonnées du point d'intersection Ω de la droite (D) et du plan (HJK).

Problème 2

Trois des allées tracées sont assimilées aux droites

$$(\mathcal{D}_1): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 \end{cases} (t \in \mathbb{R}); (\mathcal{D}_2): \begin{cases} x = -2 - 2t' \\ y = 3 + 2t' \\ z = 2 + 3t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$$

et $(\Delta): x - \frac{1}{2} = -y + 1 = -z + 1$. Les plans des murs sont des familles

$(P_m): (2m + 3)x - (3m + 4)y + (m + 2)z - m - 1 = 0$; $(Q_m): 2x + y - z + m - 2 = 0$
où m est un paramètre réel. $S(2; -1; 7)$ est un point donné de l'espace.

- 5) a) Démontre que les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont perpendiculaires.
b) Calcule la distance du point O à la droite (Δ) .
- 6) a) Démontre que tous les plans (P_m) contiennent une droite fixe (Γ) dont tu donneras un repère
b) Démontre que pour tous réel m, (P_m) est perpendiculaire à (Q_m) .
- 7) a) Calcule la distance du point S à chacun des plans (P_{-1}) et (Q_{-1}) .
b) Dédus en la distance du point S à la droite (Δ') , intersection des plans (P_{-1}) et (Q_{-1}) .

Problème 3

Le tableau T_1 a la forme d'un quadrilatère dont les sommets représentent dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points images des solutions de l'équation $(E): z^4 + 8(-3 + 4i)z^2 + 63 + 216i = 0$. Sur le tableau T_2 sont tracées deux ensembles (Γ_1) et (Γ_2) . (Γ_1) est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|\bar{z} - 1 + 2i| = |iz + 3|$ et (Γ_2) est celui des points M d'affixe z tel que $\frac{z-1+i}{iz+2}$ soit un nombre réel.

- 8) a) Calcule $(1 + 2i)^2$ et $(1 + 2i)^4$.
 b) Démontre que (E) admet deux solutions z_0 et z_1 dont les points images sont sur la droite d'équation $y = 2x$.
- 9) On suppose que $z_0 = 1 + 2i$ et $z_1 = -1 - 2i$
 a) Déduis-en une résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.
 b) On nomme z_2 et z_3 les autres solutions de (E) telle que $I_m(z_2) < I_m(z_3)$ et on désigne par M_0, M_1, M_2 et M_3 les points d'affixes respectives z_0, z_1, z_2 et z_3 .
 démontre que le quadrilatère $M_0 M_2 M_1 M_3$ est un losange.
- 10) a) Détermine (Γ_1) et (Γ_2) .
 b) Construis (Γ_1) et (Γ_2) dans le même repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

BONNE REFLEXION !