

**Situation d'évaluation :****Contexte :** La nouvelle maison

Worou désire construire sa maison à habiter sur son terrain situé non loin de l'aéroport Bernadin GANTIN de Cotonou. La maison comportera deux chambres appelée chambre 1 et chambre 2, un salon, des toilettes et une cuisine. Il consulte l'ingénieur Comlan afin que ce dernier lui fasse le plan de la maison. L'ingénieur Comlan confie le plan à son topographe Eric. Ce dernier, après avoir fait ses analyses, réalise le plan qu'il remet à son patron Comlan. Ce plan comporte les informations suivantes :

- La maison dans l'espace  $\mathcal{E}$  est représentée par le cube  $ABCDEFGH$  ; cet espace est muni du repère orthonormé direct  $(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE})$ , unité 2 centi mètres
- $m$  est un paramètre réel
- Le mur séparant la chambre 1 et le salon peut être assimilé au plan  $(P_m)$  d'équation :  $mx + y - (1+m)z - 4 = 0$
- Le mur séparant la chambre 2 et la cuisine peut être assimilé au plan  $(R_m)$  d'équation :  $x + y + m^2z - m = 0$
- $\textcolor{red}{\text{L}}$  sol du salon peut être assimilé au plan  $(Q_m)$  d'équation :  $x + y + mz - 1 = 0$
- A l'intérieur de la maison, les toilettes sont situées à un point  $G_1$  tel que :  $\overrightarrow{G_1E} - 2\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1F} + 3\overrightarrow{G_1D} = \vec{0}$

- A la cuisine, la boîte de sel à une forme tétraédrique assimilé à ABCE
- Le couloir séparant la chambre 1 et la chambre 2 peut être assimilé à l'ensemble :

$(\Gamma) = \{ M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{EG} \wedge \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{EG} \wedge \overrightarrow{DG} \}$  et celui menant à la cuisine est  $\textcolor{red}{\text{L}}$  telle que

$$\textcolor{red}{\text{L}} \quad \frac{2x-1}{4} = y-4 = -z+4$$

Comlan veut s'assurer que son topographe a réussi le plan ; pour cela il propose à son enfant Hubert, élève en classe de terminale D et qui vient de terminer son cours sur les configurations de l'espace et les nombres complexes.

**Tâche :** Tu vas aider Hubert à résoudre les trois problèmes à lui proposer par son père.

**Problème n°1 :**

1°) Justifie que pour tout réel  $m$ ,  $(P_m)$  est un plan puis donne les coordonnées d'un vecteur normal à  $(P_m)$

2°) a-) Démontre que les plans  $(Q_1)$  et  $(P_1)$  sont perpendiculaires.

b-) Donne un repère de leur droite d'intersection  $(\Delta)$ .

3°) a-) Le point  $K(1;1;1)$  appartient-il au plan  $(P_1)$

b-) Calcule la distance du point  $K$  au plan  $(P_1)$ .

4°) a-) Démontre que  $(Q_1)$  et  $(R_2)$  sont sécants.

b-) Détermine une représentation paramétrique de  $(\Delta')$  intersection de  $(Q_1)$  et de  $(R_2)$

5°) Démontre que  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  sont strictement parallèles puis détermine une équation cartésienne du plan  $(L)$  contenant  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$

**Problème n°2 :**

Pour assurer la sécurité à l'intérieur de la maison certains appareils de surveillance sont placés en des points  $B ; E ; G ; D ; C ; H$  et  $F$ . Ces appareils de surveillances

émettent des signaux représentés par l'ensemble  $(\Gamma_1) = \{M(x; y; z) \in \mathcal{E} / (\overrightarrow{ME} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MF} + 3\overrightarrow{MD}) \wedge (\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MA}) = \vec{0}\}$ . Ces signaux sont reçus par un écran représenté par l'ensemble

$(\Gamma_2) = \{M(x; y; z) \in \mathcal{E} / (\overrightarrow{ME} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MF} + 3\overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MG}) = 0\}$   
 6°) a-) Justifie que :  $B(3; 0; 0)$  ;  $D(0; 3; 0)$  ;  $E(0; 0; 3)$  ;  $G(3; 3; 3)$  ;  $H(0; 3; 3)$  ;  $C(3; 3; 0)$  et  $F(3; 0; 3)$

b-) Justifie que  $G_1$  existe puis détermine ces coordonnées.

7°) Démontre que l'ensemble  $(\Gamma_1)$  est la droite  $(D)$  de représentation paramétrique : 
$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

8°) Démontre que l'ensemble  $(\Gamma_2)$  est le plan  $(P)$  d'équation cartésienne :  $x + z - 1 = 0$

9°) a-) Justifie que  $(\Gamma)$  est une droite dont tu préciseras un repère.

b-) Démontre que les droites  $\ell$  et  $(\Gamma)$  ne sont pas coplanaires.

10°) Détermine une représentation paramétrique de la droite  $(D')$  passant par  $G$  et perpendiculaire à  $(P)$ .

11°) a-) Soit  $J$  le projeté orthogonal de  $G$  sur le plan  $(P)$ . Détermine les coordonnées du point  $J$

b-) Détermine la contenance de la boîte de sel.

### **Problème n°3 :**

Puisque le terrain se situe non loin de l'aéroport, on se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller une piste circulaire  $(C)$  passant par trois points  $I, J, K$  dont les affixes sont solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $P(z) = 0$  avec  $P(z) = z^3 - 2(2+i)z^2 + 8(1+i)z - 16i$  et  $\operatorname{Re}(z_J) = \Re(z_K)$  ;  $\operatorname{Im}(z_K) < \Im(z_J)$ . Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  représente le sol.

12°) a-) Calcule  $P(2i)$

b-) Résous dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P(z) = 0$

13°) a-) Place les points  $I, J$  et  $K$  dans  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

b-) Détermine la nature du triangle  $IJK$  puis donne une équation cartésienne de  $(C)$

14) On donne  $z_1 = 2i$  et  $z_2 = 2 - 2i$  et  $Z = z_1^5 \times z_2$

a-) Ecris  $z_1$  ;  $z_2$  et  $Z$  sous forme trigonométrique

b-) Ecris  $Z$  sous forme algébrique puis détermine les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)$  et  $\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)$

15) Construis la piste circulaire.