

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Prof : Abdoulaye Drissa Dembélé (ADD)

Classe: TSExp

2017 - 2018

Les équations différentielles:

Exercice 1 : Résous les équations différentielles :

a) $y' = 6x + 2$; b) $y' = \frac{1}{x}$; c) $y' = \frac{-\sin x}{\cos x}$; d) $y' \sin x - \cos x = 0$; e) $x^3 y' + x^2 + 1 = 0$;
f) $y'' = 1$; g) $1 + 6x^2 + y'' = 0$;

Exercice 2 :

I. Trouve la solution particulière de $y' - y = 0$; $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

II. Soit (E): $y' - 3y = 0$.

- 1) Résous (E).
- 2) Détermine la solution de (E) dont la courbe passe par le point $I(0; 2)$.
- 3) Détermine la solution de (E) dont la courbe admet au point J d'abscisse 2 une tangente de coefficient directeur -2 .
- 4) Détermine la solution de (E) dont la courbe admet au point P d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite (D) : $2y + x = 0$.

Exercice 3 :

1) Résous dans $\mathbb{R}$

$(E_1): y'' - 3y' - 4y = 0$; $(E_2): y'' - 4y' + 4y = 0$; $(E_3): y'' + y' + y = 0$;

2) Détermine pour les équations différentielles suivantes la fonction f vérifiant :

$(E_1): y'' + y' - 6y = 0$ Sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -8$

$(E_2): y'' + 6y' + 9y = 0$ Sachant que $f(0) = 4$ et $f'(0) = 1$.

$(E_3): y'' - 6y' + 13y = 0$ Sachant que $f(0) = 3$ et $f'(0) = 5$.

(4): $9y'' + 64y = 0$ Sachant que $f(\pi) = 0$ et $f'(2\pi) = \frac{1}{3}$.

Exercice 4 :

Lors du tremblement de terre qui a secoué la centrale nucléaire de FUKUSHIMA au Japon, le nombre d'atome de radium $N(t)$ échappé à l'instant t est donné par la relation :

$N'(t) = -25 \times 10^{-8} N(t)$ et $N(0) = N_0$ où (t est exprimé en année).

- 1) Détermine l'expression de $N(t)$ en fonction de N_0 et t .
- 2) Au bout de combien d'années le nombre d'atome de radium aura-t-il diminué de moitié ?

Exercice 5 :

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t , exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction numérique y à variable réelle t . La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée y' de cette fonction. On a constaté que : $y'(t) = ky(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$

- 1) Détermine l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ky$ telle que $y(0) = N$.
- 2) Sachant qu'au bout de deux heures le nombre de microbes a quadruplé, calcule en fonction de N le nombre de microbes au bout de trois heures.
- 3) Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6400 microbes au bout de cinq heures ?

Exercice 6 :

A. On considère l'équation différentielle (E): $y' + y = x^2 + x$.

- 1) Détermine les réels a, b et c pour que la fonction $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E).
- 2) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle : $(E_0): h' + h = 0$. (l'équation homogène associée à (E))
- 3) Résous l'équation différentielle (E_0) et en déduire les solutions de (E).
- 4) Détermine la solution particulière φ de (E) telle que la courbe (C) de φ passe par le point $A(0; -1)$.

Exercice 7 :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = (x - 3)e^{-x}$.

1°) Résous $(E_0) : y' + 2y = 0$

2°) Trouve les réels a et b pour que $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit solution de (E).

3°) Démontre que h est solution de (E) implique que $(h - f)$ est solution de (E_0)

4°) Déduis en toutes les solutions de (E) et trouve celle qui passe par le point de coordonnées $(0; 1)$.

Exercice 8 :

A. On considère l'équation différentielle $(E_1): f''(x) - 2f'(x) + f(x) = -3x + 4$ où $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) Déterminer les réels a et b pour que la fonction $g(x) = ax + b$ soit solution de (E_1) .
- 2) Démontrer que la fonction f est solution de (E_1) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle : $(E_2): h'' - 2h' + h = 0$.
- 3) Résoudre l'équation différentielle (E_2) et en déduire les solutions de (E_1) .
- 4) Déterminer la solution particulière φ de (E_1) telle que $\varphi(0) = -1$ et $\varphi'(0) = 0$

B. On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = (2x + 1)e^x - (3x + 2)$.

- 1) a) Déterminer les limites de P en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Montrer que $(\Delta) : y = -3x - 2$ est A.O à (C) de P .
c) Etudier la position relative de (Δ) par rapport à (C) .
- 2) a) Etudier les variations de P .
b) Tracer (C) et (Δ) dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique $2cm$.
- 3) On note (D) la partie de plan limité par (C) ; (Δ) et les droites $x = \lambda$ et $x = -\frac{1}{2}$ où $\lambda < -\frac{1}{2}$.
a) Mettre en évidence la partie (D) sur le graphique.
b) Calculer $\int_{\lambda}^{-\frac{1}{2}} -(2x + 1)e^x dx$ (on pourra effectuer une intégration par parties).
c) Exprimer en fonction de λ l'aire $A(\lambda)$ de (D) en cm^2 .
d) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$.