

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Activité3 :Exemples d'équations différentielles avec second membre

A. 1^{er} ordre : On considère l'équation différentielle (E): $y' + y = x^2 + x$.

- 1) Déterminez les réels a, b et c pour que la fonction $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E).
- 2) Démontrez qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle : $(E_0): h' + h = 0$. (l'équation homogène associée à (E))
- 3) Résolvez l'équation différentielle (E_0) et en déduire les solutions de (E).
- 4) Déterminez la solution particulière φ de (E) telle que la courbe (C) de φ passe par le point $A(0; -1)$.

B. 2^{er} ordre : On considère l'équation différentielle (E): $y'' + 2y' + y = \cos x$

- 1) Déterminez les réels λ et μ pour que la fonction $g(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$ soit solution de (E).
- 2) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle : $(E_0): y'' + 2y' + y = 0$. (l'équation homogène associée à (E))
- 3) Résoudre l'équation différentielle (E_0) et en déduire les solutions de (E).

Exercice 1 :

Vérifiez que les fonctions f données sont solutions des équations correspondantes.

- 1) $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$; $y' - 4y = 0$
- 2) $f(x) = (2x+1)e^{-x}$; $y' + 2y' + y = 0$
- 3) $f(x) = x \sin x$; $y' + y = 2 \cos x$
- 4) $f(x) = e^{-x} \sin x$; $y' + 2y' + 2y = 0$

Exercice 2:

Résolvez les équations différentielles proposées.

- 1) $y'' - 4y' + 3y = 0$
- 2) $y'' - y = 0$
- 3) $y'' - 5y' + 6y = 0$
- 4) $2y'' - y' - y = 0$
- 5) $y'' + 2y' + y = 0$
- 6) $y'' - 2y' + y = 0$
- 7) $9y'' + 6y' + y = 0$
- 8) $4y'' + 12y' + 9 = 0$
- 9) $y'' + y = 0$
- 10) $y'' + y' + y = 0$
- 11) $4y'' + 9y = 0$
- 12) $y'' + 3y' + 4y = 0$

Exercice 3 :

Déterminez la solution f de l'équation différentielle donnée, vérifiez les conditions données.

- 1) $y'' - 2y' + y = 0$; $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$
- 2) $y'' - y' - y = 0$; $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$
- 3) $y'' + 4y = 0$; $f(0) = 6$ et $f'(0) = 10$

- 4) $y'' + y = 0$; $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$
 5) $y'' - 4y' - 5y = 0$; $f(0) = 0$ et $f'(0) = -6$
 6) $y'' - 4y = 0$; $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$
 7) $y'' - 3y' + 2y = 0$; $f(1) = 1$ et $f'(1) = 3$

Exercice 4 :

Etudiez les variations et tracez dans un plan muni d'un repère orthonormal la courbe représentative (C) de la solution f de l'équation différentielle proposée vérifiant la courbe des conditions (S) données.

1) $y' - 3y = 0$; (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation

$$y = x.$$

2) $2y' - y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées (2 ; e).

3) $y'' + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées (0 ; 0) et admet la droite d'équation

$$y = x \text{ comme tangente en ce point.}$$

4) $y'' - 4y' + 4y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées (0 ; 1) et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

5) $y'' - 3y' + 2y = 0$; (C) passe par le point coordonnées (ln 2; 0) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur - 4

6) $y'' - 2y + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ et sa tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Equations différentielles avec second membre :

Exercice 5

I) Soit (E) l'équation différentielle $y' + 2y = x^2$.

- 1) Déterminer une fonction polynôme g, de degré deux, solution de (E).
- 2) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation (E') : $y' + 2y = 0$
- 3) a) Résolvez l'équation (E').
b) Donnez les solutions de l'équation (E).

II) 1) Résolvez l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$

2) Déterminer un polynôme du second degré P(x) solution de l'équation différentielle :
 $y' - 2y = 8x^2 - 8x$ (1)

3) Démontrez que les fonctions f_k définies sur R par $f_k(x) = ke^{2x} - 4x^2$, où k est un réel donné quelconque, sont solutions de l'équation différentielle (1).

Exercice 6 :

on se propose de déterminer les fonctions deux fois dérivables sur R, solution de l'équation différentielle. (E)

$$(E) : y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$$

- 1) Déterminer une fonction polynôme du second degré, g , solution de l'équation (E).
- 2) Démontrer que φ est solution de (E) si et seulement si, $\varphi - g$ est solution de l'équation différentielle (E') définie par : (E') : $y'' + 2y' + y = 0$
- 3) Résolvez (E') ; puis déduire J – en l'ensemble des fonctions φ solutions de l'équation différentielle (E).

Exercice 7 :

On se propose de résoudre le problème suivant :

Trouvez une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, s'annulant pour $x = 1$ et vérifiant la propriété suivante : $\forall x > 0, x \times f'(x) - 3 \times f(x) = 3 \ln x$ (E)

- 1) Trouver tous les polynômes P du 3^{ème} degré telles que, pour tout réel x ; $x \times P'(x) - 3 \times P(x) = 0$
- 2) Soit une fonction f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que $f(1) = 0$ et soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par la relation $f(x) = x^3 \times h(x)$
 - a) Calculer $h(1)$ et calculer $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et $h(x)$.
 - b) Démontrer que : f vérifie (E) ssi $\forall x \in]0, +\infty[, h'(x) = \frac{3}{x^4} \ln x$
 - c) On suppose que f vérifie (E). Démontrer que h est définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4} \ln t dt$
 - d) Déterminer $h(x)$ en fonction de x par une intégration par partie
 - e) Démontrer qu'il existe une unique fonction f solution du problème posé et donner l'expression de $f(x)$.

Exercice 8 :

On se propose de résoudre l'équation différentielle :

$$(E_1) : y' - 2y = \frac{2}{1+e^{-2x}}$$

- 1) Déterminer la solution de l'équation différentielle (E₂) : $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
- 2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = \ln 2$ et soit g la fonction définie par la relation : $f(x) = e^{2x} \times g(x)$.
 - a) Calculer $g(0)$
 - b) Calculer $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$.
 - c) Démontrer que f est solution de (E₁) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$
 - d) En déduire l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).

Exercice 9 :

On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1^{er} ordre tel que :

$$\begin{cases} y' + 4z = 2e^{2x} \\ z' - y = e^{2x} \end{cases} \quad \text{Où } y \text{ et } z \text{ désignent deux fonctions inconnues de variables réels } x.$$

- a) Former l'équation différentielle du second ordre (E) à laquelle satisfait $y(x)$
- b) Intégrer l'équation (E) et en déduire la solution générale du système.

Préciser la solution particulière pour laquelle on a : $y = 1$ et $z = -1$ pour $x = 0$.

Exercice10

Lors du tremblement de terre qui a secoué la centrale nucléaire de FUKUSHIMA au Japon, le nombre d'atome de radium $N(t)$ échappé à l'instant t est donné par la relation : $N'(t) = -25 \cdot 10^{-8} N(t)$ et $N(0) = N_0$ où (t est exprimé en années).

- 1) Déterminer l'expression de $N(t)$ en fonction de N_0 et t .
- 2) Au bout de combien d'années le nombre d'atome de radium aura-t-il diminué de moitié ?

Exercice11

Résoudre l'équation différentielle d'inconnue f tel que : $x^2 f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0$.

- 1) Soit l'équation (E) : $x^2 f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0$.
- 2) On pose $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
 - a- Montrer que l'équation (E) est équivalent à $x^2 g'(x) + 2xg(x) = 1$.
 - b- Déduisez-en la résolution de l'équation (E).

Exercice12

- 1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
- 2) Soit (E) l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ où f' désigne la fonction dérivée de f .
 - a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x$. Vérifier que g est un élément de (E).
 - b) Soit f un élément de (E). Vérifie que pour tout réel x , $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
 - c) En déduire que si f un élément de (E) alors f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
 - d) Détermine l'ensemble solution de (E).