

TD Equations Différentielles. TSEXP

Equations différentielles sans second membre.

Résous les équations différentielles suivantes :

- 1) $y'' - 4y' + 3y = 0$; 2) $y'' - 9y = 0$; 3) $y' - 2y = 0$
4) $y'' + 2y' + 2y = 0$; 5) $4y'' + 5y = 0$; 6) $7y' + 4y = 0$
7) $9y'' - 24y' + 16y = 0$; 8) $y'' - \sin x + e^{-x} = 0$; 9) $2xy + y'x^2 - e^x = 0$

- 2 Vérifie que les fonctions f données sont solutions des équations différentielles (E) correspondantes :

- 1) $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$ et (E) : $y'' - 4y = 0$
2) $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ et (E) : $y'' + 2y' + y = 0$
3) $f(x) = e^{-x}\sin x$ et (E) : $y'' + 2y' + 2y = 0$

- 3 Détermine la solution f des équations différentielles vérifiant les conditions suivantes :

- 1) $y'' - 2y' + y = 0$; conditions : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$
2) $y'' + 4y = 0$; conditions : $f(0) = 6$ et $f'(0) = 10$
3) $y'' + y = 0$; conditions : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$
4) $y'' - 3y' + 2y = 0$; conditions : $f(1) = 1$ et $f'(1) = 3$

- 4 On considère le système suivant, d'équations différentielles du premier ordre tel que :

$$\begin{cases} y' + 4Z = 2e^{2x} \\ Z' - y = e^{2x} \end{cases} \quad \text{où } y \text{ et } Z \text{ désignent deux fonctions inconnues de variable réel } x.$$

- 1) Etablit l'équation différentielle (E) du second ordre satisfaite par y .
2) Résous l'équation (E) puis en déduis la solution générale du système.
3) Précise la solution particulière pour laquelle on a : $y = 1$ et $Z = -1$ pour $x = 0$.

- 5 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \times 5^{3x}$

- 1) Détermine les réels a et b tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$
2) En déduis une primitive de f sur $\mathbb{R}$

- 6 Détermine la solution f des équations différentielles données, dont la courbe (C) vérifie les conditions données suivantes :

- 1) $y' - 3y = 0$; (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.
2) $2y' - y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(2 ; e)$.
3) $y'' + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(0 ; 0)$ et admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente en ce point.
4) $y'' - 4y' + 4y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(0 ; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
5) $y'' - 3y' + 2y = 0$; (C) passe par le point coordonnées $(\ln 2 ; 0)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4
6) $y'' - 2y + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(\frac{\pi}{4} ; 0)$ et sa tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Equations différentielles avec second membre.

7

Soient les équations différentielles (E) : $y' + 2y = x^2$ et (E') : $y' + 2y = 0$

- 1) Détermine une fonction polynôme g , de degré deux, solution de (E).
- 2) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation (E')
- 3) Résous l'équation (E').
- 4) En déduis l'ensemble solution de l'équation (E).

8

Soient les équations différentielles (E) et (E') telles que :

(E) : $y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$ et (E') : $y'' + 2y' + y = 0$

- 1) Détermine une fonction polynôme g , de degré deux, solution de (E).
- 2) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si, $f - g$ est solution de (E').
- 3) a- Résous (E').
b- En déduis l'ensemble solution de (E).

9

1) Résous l'équation différentielle d'inconnue f tel que : $x^2 f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0$.

2) Soit l'équation (E) : $x^2 f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0$.

3) On pose $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

a- Montre que l'équation (E) est équivalent à $x^2 g'(x) + 2xg(x) = 1$.

b- Déduis-en la résolution de (E).

10

On se propose de résoudre le problème suivant. Trouve une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, s'annulant pour $x = 1$ et vérifiant la propriété : pour tout $x > 0$, on a :

(E) : $x \times f'(x) - 3 \times f(x) = 3 \ln x$.

1) Trouve tous les polynômes p du 3^{ème} degré telles que $\forall x > 0; x \times p'(x) - 3 \times p(x) = 0$

2) Soit une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ telle que $f(1) = 0$ et soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par la relation $f(x) = x^3 \times h(x)$

a- Calcule $h(1)$ et $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et $h(x)$.

b- Démontre que f vérifie (E) si et seulement si $\forall x \in]0; +\infty[; h'(x) = \frac{3}{x^4} \ln x$

c- On suppose que f vérifie (E). Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[$, on a : $h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4} \ln t \, dt$

d- Détermine $h(x)$ en fonction de x par une intégration par partie

e- Démontre qu'il existe une unique fonction f solution du problème posé et donne l'expression de $f(x)$.

11

On se propose de résoudre l'équation différentielle : (E₁) : $y' - 2y = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$

1) Détermine la solution de (E₂) : $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.

2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = \ln 2$ et soit g la fonction définie par la relation : $f(x) = e^{2x} \times g(x)$.

a- Calcule $g(0)$

b- Calcule $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$.

c- Démontre que f est solution de (E₁) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

d- En déduis l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).

12 Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel différent de 1.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = ay + by^n$

1) On pose sur $\mathbb{R}$: $Z = y^{1-n}$ (avec $y > 0$).

Détermine une équation différentielle satisfaite par Z et la résoudre.

2) En déduis les solutions, strictement positives, de (E) sur $\mathbb{R}$. Que donne le cas $n = 0$?

Equations différentielles dans les cas pratiques.

13 Un tronc de baobab y grossi avec une vitesse proportionnelle à lui-même.

On sait de plus que ce tronc double de volume tous les 10 ans.

Combien de temps lui faut-il pour tripler de volume ?

14 Lors du tremblement de terre qui a secoué la centrale nucléaire de FUKUSHIMA au Japon, la teneur du nombre d'atome de radium $N(t)$ échappé à l'instant t est donné par la relation :

$N'(t) = aN(t)$ et $N(0) = N_0$ où (t est exprimé en années).

De plus sa teneur en toxine triple chaque deux ans.

1) Détermine l'expression de $N(t)$ en fonction de N_0 et t .

2) Au bout de combien d'années la teneur du nombre d'atome de radium aura-t-il quadruplé ?

15 Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à l'instant t , exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction numérique N à variable réelle t . La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée N' de cette fonction. On a constaté que : $N'(t) = -kN(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N_0 le nombre de microbes à l'instant $t = 0$

1) Détermine $N(t)$ en fonction de N_0 , k et t .

2) Détermine le nombre de microbes au bout de 1 heure si $N_0 = 1000$ et $k = 1$.

3) Soit T la période de reproduction du nombre de microbes, c'est-à-dire le temps au bout duquel le nombre de microbes a été divisé par 2. Montre que $e^{kT} = 2$.

4) Détermine la période de reproduction T sachant que $k = 6,66 \cdot 10^{-5}$.

16 Une substance se dissout dans l'eau avec une vitesse de dissolution proportionnelle à la quantité non dissoute.

A l'instant $t = 0$ (en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau. Sachant que les 10 premiers grammes se dissolvent en 5 minutes :

1) Forme l'équation différentielle expliquant cette situation en fonction de $f'(t)$ et de $f(t)$.

2) En déduis une expression de la quantité dissoute $f(t)$, en grammes, en fonction de t .

17 Le taux d'alcoolisme $f(t)$ (en gL^{-1}) d'une personne ayant absorbé, en jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur $\mathbb{R}_+$, l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = ae^{-t}$.

Où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprime en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $g(t) = f(t)e^t$. Démontre que g est une fonction affine.

2) Exprime $f(t)$ en fonction de t et de a .

3) Dans cette question, on pose que $a = 5$.

a- Etudie les variations de f puis trace sa courbe.

b- Détermine graphiquement le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.

c- Donne une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0,5$ en gL^{-1} .

- 18** Un bloc métallique est déposé dans un four dont la température constante est de 1000°C . La température θ est une fonction du temps t (*en heures*) qui vérifie l'équation différentielle (E): $\theta'(t) = k[1000 - \theta(t)]$; $k \in \mathbb{R}_+^*$.
- 1) On pose $y(t) = \theta(t) - 1000$. Ecris une équation différentielle (F) satisfaite par y .
 - 2) Ecris une équation différentielle (F) satisfaite par y .
 - 3) Résous (F) puis (E).
 - 4) Le bloc, initialement à 40°C est déposé dans le four au temps $t_0 = 0$. Sa température est de 160°C au bout d'une heure. En déduis l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t uniquement.
 - 5) a- Calcule la température du bloc au temps $t = 3$ heures.
b- Détermine le temps T à partir duquel la température du bloc dépassera 500°C .

- 19** La température corporelle θ (*en degré*) en fonction du temps t (*en heure*) d'un malade atteint de **COVID 19** vérifie l'équation différentielle (E): $\theta'(t) = a[30 - \theta(t)]$; $a \in \mathbb{R}_+^*$. On désigne par $q(t) = \theta(t) - 30$, la quantité en *ml* de vaccin administré dans le sang du malade chaque heure.
- 1) Etablit l'équation différentielle (F) satisfaite par q .
 - 2) En déduis la résolution des équations (F) et (E).
 - 3) A l'instant $t = 0$, la température corporelle du malade est de 40°C puis au bout d'une heure, sa température chute à 35°C .
a- Exprime $\theta(t)$ et $q(t)$ en fonction de t uniquement.
b- En déduis la température puis la quantité de vaccin administré dans le sang du malade au bout de 3 heures.