

NOMBRES COMPLEXES EN TC

Exercice n° 1.

Déterminer le module et un argument des nombres complexes :

(a) $z_1 = -2 + i + \sqrt{3}$ (b) $z_2 = (1 - i)^n + (1 + i)^n (n \in \mathbb{N})$ (c) $z_3 = \frac{1}{2}(\sin\theta + i(1 - \cos\theta)) (\theta \in [-\pi, \pi])$
 (d) $z_4 = \cos\alpha + i(1 + \sin\alpha) (\alpha \in]0; \pi[)$ (e) $z_5 = \sqrt[3]{\sqrt{1 + i \tan\alpha}}$ (f) $z_6 = \frac{1 + i \sin\alpha + \cos\alpha}{\sqrt{1 + \sin 2\alpha} + i\sqrt{1 - \sin 2\alpha}}$
 (g) $z_7 = \frac{1 - \cos\alpha + i \sin\alpha}{1 + \cos\alpha + i \sin\alpha} (\alpha \in [0; \pi])$ (h) $z_8 = \sin\alpha + i \cos\alpha (\alpha \in [0; \pi])$ (i) $z_9 = e^{e^{i\theta}}$

Exercice n° 2.

Écrire sous la forme algébrique les nombres complexes suivants : $z_1 = \frac{1+i}{1-i} + i \left(\frac{2-i}{2+i} \right)$ $z_2 = \frac{\frac{3+i}{1-i} + \frac{4}{2+\frac{3+i}{1-i}}}{1 + \frac{3i}{4-i} - \frac{1}{3+i}}$

Exercice n° 3.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose : $z = \sin(2\theta) - 2i \cos^2(\theta)$

❶ On suppose dans cette question que : $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

Déterminer le module et un argument de z .

❷ On suppose dans cette question que : $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Écrire z sous forme exponentielle.

Exercice n° 4.

Pour tout réel $\theta \in]0; 2\pi[$, on pose : $G(\theta) = \frac{i(1 - e^{i\theta})}{\sqrt{3}e^{i\theta}}$

❶ Montrer que : $G(\theta) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

❷ Calculer : $\left(G\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{12}$

Exercice n° 5.

Déterminer trois nombres complexes z_1 , z_2 et z_3 tel que $|z_1| = 5$, $|z_2| = 3$, $|z_1 - z_2| = 7$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

Exercice n° 6.

Soient A, B et C trois points d'affixes respectifs : $z_A = 3 + i$; $z_B = -1 - 3i$ et $z_C = -\sqrt{3} + i$.

❶ Déterminer la forme algébrique des nombres suivants : $z_A \times z_B$; $\frac{z_A}{z_B}$; $z_A \times z_B \times z_C$; $\frac{1}{z_C}$ et $z_A \times z_B \times \left(\frac{1}{z_C}\right)^2$.

❷ Calculer les modules suivants : $|z_A \times z_B|$; $|z_C^6|$; $\left|\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^5\right|$ et $|z_A \times z_B \times z_C|$

❸ Déterminer la forme trigonométrique puis la notation exponentielle du nombre z_C .

❹ Soit I le milieu du segment $[AB]$.

(a) Déterminer $z_I = aff(I)$ l'affixe du point I .

(b) Déterminer la forme trigonométrique puis la notation exponentielle des nombres suivants :

z_I ; $z_C \times z_I$; $\frac{z_C}{z_I}$; z_I^8 ; $\frac{1}{z_C}$ et $(z_C \times z_I)^5$.

Exercice n° 7.

On considère le nombre complexe $U = -1 - i + \sqrt{3}(1 - i)$.

- ❶ Donner la forme cartésienne de U^2 puis déduire sa forme trigonométrique.
- ❷ (a) Vérifier que $U = (1 - i)(\sqrt{3} - i)$.
(b) Donner la forme trigonométrique de U .
- (c) Calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice n° 8.

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \left[1 + i(1 + \sqrt{2})\right]^n$ et $z_2 = (1 - \sin\alpha + i\cos\alpha)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- ❶ Déterminer n pour que z_1 soit un réel.
- ❷ Déterminer α pour que z_2 soit un réel.

Exercice n° 9.

On donne le nombre complexe suivant : $z = -2 + i + \sqrt{3}$

- ❶ (a) Écrire z sous la forme exponentielle.
(b) En déduire la forme trigonométrique de z .
- ❷ Soit $n \in \mathbb{N}$.
(a) Pour quelles valeurs de n , z^n est-il un réel ?
(b) Prouver que z^{2016} est un réel strictement positif.

Exercice n° 10.

Soit le nombre complexe $z = \frac{2k}{1+k^2} + i\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)$ où $k \in \mathbb{R}$.

- ❶ Calculer le module de z .
- ❷ On pose $k = \tan\theta$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
Exprimer l'argument de z en fonction de θ .
- ❸ On suppose que $k = \sqrt{3}$.
Calculer z^4 .

Exercice n° 11.

On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

- ❶ Déterminer la forme algébrique de z^2 .
- ❷ Déterminer le module et un argument de z^2 .
- ❸ En déduire le module et un argument de z .
- ❹ Écrire z sous forme trigonométrique.
- ❺ Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{8}$ et $\sin\frac{5\pi}{8}$.

Exercice n° 12.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit le nombre complexe a définie par $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

- ❶ Montrer que $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$, puis en déduire le module de a .
- ❷ Écrire a^2 sous forme trigonométrique puis vérifier qu'une des mesures de l'argument de a est $\frac{19\pi}{12}$.
- ❸ En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ puis $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
- ❹ Représenter sur le même graphique les points images de a , $-a$ et a^2 .

Exercice n° 13.

On considère le nombre complexe : $U = 1 + (2 - \sqrt{3})i$

❶ Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes : $1 - i$ et $1 + \sqrt{3}i$.

❷ Montrer que : $\frac{(1 - i)(1 + \sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

❸ En déduire que : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

❹ Montrer que : $u = (\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Exercice n° 14.

Soit $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$

❶ (a) Écrire z_0 sous forme trigonométrique.

(b) Montrer que : $\left(n \in \mathbb{N}\right); (z_0)^n + (\bar{z}_0)^n = 2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

❷ Soit $Z = 1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})$

(a) Montrer que $\bar{Z} = 2z_0e^{i\frac{\pi}{2}}$.

(b) Déterminer la forme trigonométrique de Z .

Exercice n° 15.

Déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe $Z_1 = \frac{5 + 11i\sqrt{3}}{7 - 4i\sqrt{3}}$; $Z_2 = 2 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Exercice n° 16.

On considère le nombre complexe a tel que : $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

❶ Montrer que le module du nombre complexe a est : $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

❷ Vérifier que $a = 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right) + 2i\sin\frac{\pi}{4}$.

❸ (a) En linéarisant $\cos^2\theta$ avec θ un nombre réel, montrer que : $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$.

(b) Montrer que $a = 4\cos^2\frac{\pi}{8} + 4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$.

(c) Montrer que $4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ est une forme trigonométrique du nombre a puis montrer que

$$a^4 = \left(2\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^4 i.$$

Exercice n° 17.

❶ Pour quelles valeurs de n , le complexe $\left(\frac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(1 - i)^3}\right)^n$ est-il un réel positif?

❷ A quelles conditions sur a et b réels le nombre complexe $(2a - b - i(a + b))(-a - i(a + b))$ est-il un nombre réel?

Exercice n° 18.

Linéariser : (a) $\cos^3 x \cdot \sin 2x$ (b) $\cos^2 2x \cdot \sin 3x$ (c) $\cos^4 x \cdot \sin x$ (d) $\cos^2 5x \cdot \sin 3x$ (e) $\sin^6 x$

Exercice n° 19.

Linéariser l'expression $P(a) = \cos^4 a \sin^2 a + \sin^3 a$