Table des matières

Séquence 1 : Nombres complexes 1
Activité 1 : Etude algébrique 1
Activité 2 : Etude trigonométrique 7
Activité 3 : Utilisations des nombres complexes 24
. Evaluation générale 47
Séquence 2 : Arithmétique 59
Activité 1 : Système de numération 59
Activité 2 : Congruence modulo n 66
Activité 3 : Nombres premiers 74
Activité 4 : PGCD- PPCM ou PPMC 79
Activité 5 : Anneaux dans $\mathbb{Z}/n\ \mathbb{Z}$ 90
Activité 6 : Raisonnement par récurrence 93
Evaluation générale 98
Séquence 3 : Fonctions numériques d'une variable réelle 105
Activité 1 : Limites d'une fonction 105
Activité 2 : Continuité d'une fonction 111
Activité 3 : Branches infinies 114
Activité 4 : Dérivation 120
Activité 5 : Formules de dérivées 125
Activité 6 : Bijection 131
Activité 7 : Inégalité des accroissements finis 132
Activité 8 : Parité-périodicité-éléments de symétrie 141
Évaluation générale 148
Séquence 4 : Primitives et Intégrales 156
Activité1 : Primitives 156
Activité 2 : Calcul d'intégrales 161
Activité 3 : Etude des différentes techniques d'intégrations 164
Activité 4 : Inégalité de la moyenne 165
Activité 5 : Valeur moyenne d'une fonction 166
Activité 6 : Applications du calcul d'intégral 166
Activité 7 : Calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles 170
Evaluation générale 173

Séquence 5 : Fonctions logarithmes.....176
Activité 1 : Fonction logarithme népérien.....176
Activité 2 : Fonction logarithme de base a $(a \in \mathbb{R}+* -1)$.....188
Evaluation générale.....191
Séquence 6 : Fonctions exponentielles.....198
Activité 1 : Fonction exponentielle népérienne.....198
Activité 2 : Fonction exponentielle de base a $(a \in \mathbb{R}+* -1)$.....206
Activité 3 : Fonction puissance.....211
Evaluation générale.....216
Séquence 7 : Développements limités.....225
Evaluation générale.....228
Séquence 8 : Suites numériques.....229
Activité 1 : Etude générale d'une suite.....229
Activité 2 : Suites arithmétiques-Suites géométriques.....238
Evaluation générale.....242
Séquence 9 : Les équations différentielles.....246
Evaluation générale.....255
Séquence 10 : Dénombrement – Probabilité.....258
Activité 1 : Opérations sur les ensembles :.....258
Activité 2 : Dénombrement.....258
Activité 3 : Probabilités.....265
Activité 4 : Etude de la probabilité conditionnelle.....270
Activité 5 : Variable aléatoire.....276
Evaluation générale.....284
Séquence 11 : Barycentre.....302
Activité 1 : Barycentres de n points pondérés.....302
Activité 2 : Fonction vectorielle de Leibniz.....306
Activité 3 : Fonction numérique (ou scalaire) de Leibniz.....309
Evaluation générale.....319
Séquence 12 : Etude des applications affines du plan et de l'espace.....324
Activité 1 : Etude des applications affines du plan.....324
Activité 2 : Etude des applications affines dans l'espace.....351
Evaluation générale.....356

Séquence 13 : Géométrie dans l'espace 362
Activité 1 : Projection 362
Activité 2 : Translation et homothétie 363
Activité 3 : Réflexion 364
Activité 4 : Représentation paramétrique d'une droite 364
Activité 5 : Produit scalaire dans l'espace 365
Evaluation générale 370
Séquence 14 : Coniques 373
Activité1 : Définition par foyer et directrice 373
Activité 2 : Parabole 373
Activité 3 : Conique à centre 375
3.1. Ellipse 376
Activité 4 : Les courbes d'équations : $Ax2 + By2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$ avec A ; B non tous nuls 384
Sujets d'évaluation du Lycée les Castors 387
Sujet N°1 : Devoir N°1 TSE 2024/2025 L. Castors 387
Sujet N°2 : Devoir N°1 TSE 2023/2024 L.Castors 388
Sujet N°3 : Devoir N°2 TSE 2023/2024 L. Castors 389
Sujet N°4 : Devoir N°2 TSE 2019/2020 L. Castors / *Corrigé page 449* 391
Sujet N°5 : Devoir N°1 TSE 2020/2021 L.Castors 392
Sujet N°6 : Devoir N°1 TSE 2017/2018 L.Castors 393
Sujet N°7 : Devoir N°2 TSE 2017/2018 L.Castors 395
Sujet N°8 : Devoir N°2 TSE 2024/2025 L. Castors 396
Sujet N°9 : Devoir TSE 2018/2019 L. Castors 399
Sujet N°10 : Devoir N°3 TSE 2023/2024 L. Castors 400
Sujet N°11 : Devoir N°2 TSE 2020/2021 L. Castors 401
Sujet N°12 : Devoir N°3 TSE 2024/2025 L. Castors 402
Sujet N°13 : Devoir N°3 TSE 2021/2022 L. Castors 404
Sujet N°14 : Devoir N°6 TSE 2021/2022 L. Castors 405
Sujet N°15 : Devoir N°5 TSE 2022/2023 L. Castors 407
Sujet N°16 : Devoir N°5 TSE 2024/2025 L. Castors 408
Sujet N°17 : Devoir N°5 TSE 2020/2021 L. Castors 410
Sujet N°18 : Devoir N°7 TSE 2021/2022 L. Castors 412

Sujet N°19 : Devoir N°8 TSE 2023/2024 L. Castors .....
Sujet n°20 : Pré-évaluation N°1 2020/2021 du L. Castors .....
Sujet N°21 : Composition du 1er trimestre 2021/2022 TSE L. Castors .....
Sujet N°22 : Composition du 1er trimestre 2017/2018 TSE L. Castors .....
Sujet N°23 : Composition du 1er trimestre 2012/2013 TSE AE-BKO Rive-Droite .....
Sujet n°24 : Pré-évaluation N°2 2023/2024 du L. Castors / Corrigé page 454 .....
Sujet N°25 : Pré-évaluation N°2 2022/2023 TSE L. Castors .....
Sujet N°26 : Composition du 2e trimestre 2024/2025 TSE L. Castors .....
Sujet N°27 : Composition du 2e trimestre 2022/2023 TSE L. Castors .....
Sujet N°28 : Composition du 2e trimestre 2020/2021 TSE L. Castors .....
Sujet N°29 : Composition de synthèse 2022/2023 TSE L. Castors .....
Corrigés des sujets d'évaluation du Lycée les Castors .....
Sujet N°4 : Correction du devoir n°2 TSE L. Castors 2019-2020 .....
Sujet n°24 : Corrigé du de la Pré-évaluation 2023/2024 du L. Castors .....
Problèmes de type Bac .....
Sujets de Baccalauréat malien de 2020 à 2025 Série TSE .....
Baccalauréat Session d'Octobre 2020 .....
Baccalauréat Session d'Août 2021 .....
Baccalauréat Session de Juillet 2022 .....
Baccalauréat Session de juillet 2023 .....
Baccalauréat Session de juin 2024 .....
Baccalauréat Session de juin 2025 .....

Exemple

1. Détermine la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$z_1 = -7 + 4i$; $z_2 = 2 + i$; $z_3 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$; $z_4 = -19$; $z_5 = 23i$; $z_6 = 0$.

2. Pour quelles valeurs du nombre réel x le nombre complexe

$z = [x + 5 + i(3 - x)](x + i)$ est-il :

a) un nombre réel ?

b) un nombre imaginaire pur ?

Solution

1. Déterminons la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$z_1 = -7 + 4i$ $\quad Re(z_1) = -7$ et $Im(z_1) = 4$

$z_2 = 2 + i$ $\quad Re(z_2) = 2$ et $Im(z_2) = 1$

$z_3 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ $\quad Re(z_3) = -\frac{1}{4}$ et $Im(z_3) = -\frac{1}{4}$

$z_4 = -19$ $\quad Re(z_4) = -19$ et $Im(z_4) = 0$

$z_5 = 23i$ $\quad Re(z_5) = 0$ et $Im(z_5) = 23$.

$z_6 = 0$ $\quad Re(z_6) = 0$ et $Im(z_6) = 0$.

2. Les valeurs du nombre réel x

$z = [x + 5 + i(3 - x)](x + i) = (x + 5 + 3i - xi)(x + i)$

$= x^2 + xi + 5x + 5i + 3ix - 3 - x^2 i + x = x^2 + 6x - 3 + i(-x^2 + 4x + 5)$

a) z est un nombre réel $\Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 5 = 0$;

$-1 + 5 = 4$ donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 5$.

D'où $x = -1$ ou $x = 5$.

b) z est un nombre imaginaire pur $\Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 3 = 0$

$x^2 + 6x - 3 = 0$; $\Delta = 36 + 12 = 48 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{3}$

$x_1 = \frac{-6 - 4\sqrt{3}}{2} = -3 - 2\sqrt{3}$; $x_2 = \frac{-6 + 4\sqrt{3}}{2} = -3 + 2\sqrt{3}$

D'où $x = -3 - 2\sqrt{3}$ ou $x = -3 + 2\sqrt{3}$.

Propriété

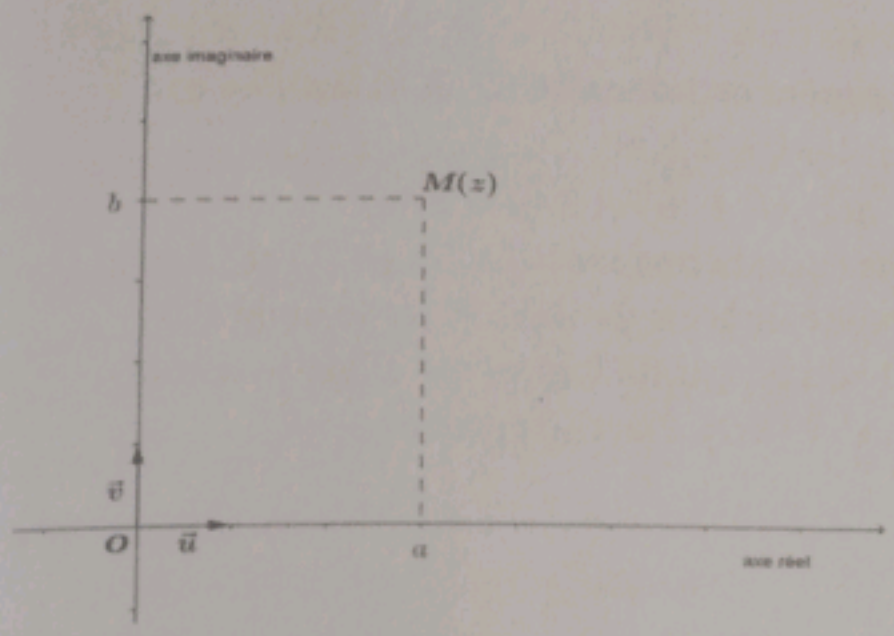
Soit z et z' deux nombres complexes. On a:

- $z = z' \Leftrightarrow Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$.
- $z = 0 \Leftrightarrow Re(z) = 0$ et $Im(z) = 0$.

Représentation géométrique d'un nombre complexe

Tout nombre complexe $z = a + ib$ où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ peut être représenté par le point $M(a; b)$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Le point $M(a; b)$ est appelé **point image** du nombre complexe $z = a + ib$, le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé **affixe** du point $M(a; b)$.



Exemple

$z_A = -5 + 4i \Longrightarrow A(-5;4)\ ; B(3;-1) \Longrightarrow z_B = 3 - i.$

- Soit A d'affixe z_A et B d'affixe z_B, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- L'affixe du point I milieu du segment $[AB]$ est : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.
- L'affixe du point G barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) est :

$$z_G = \frac{az_A + bz_B}{a + b}$$

- L'affixe du point G barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) est :

$$z_G = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a + b + c}$$

- L'affixe du point G centre de gravité du triangle ABC est : $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.
- $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{BC}}$

$z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{BC}} \Leftrightarrow z_D - z_A = z_C - z_B$

1-2 Opérations dans $\mathbb{C}$

Activité

Calcule et écris sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $z = 3 + 7i + 2 - 11i$ b) $z = (3 + 2i)(4 + 5i)$

c) $z = (2 + 3i) - 4(5 - 2i)$ d) $z = (2 + i)(1 - 4i)(1 + 3i)$

Solution

Calculons et écrivons sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $z = 3 + 7i + 2 - 11i = 5 - 4i$ **d'où $z = 5 - 4i$.**

b) $z = (3 + 2i)(4 + 5i) = 12 + 15i + 8i + 10i^2 = 12 + 15i + 8i - 10 = 2 + 23i.$

d'où $z = 2 + 23i$.

c) $z = (2 + 3i) - 4(5 - 2i) = 2 + 3i - 20 + 8i = -18 + 11i$

d'où $z = -18 + 11i$.

d) $z = (2 + i)(1 - 4i)(1 + 3i) = (2 - 8i + i + 4)(1 + 3i) = (6 - 7i)(1 + 3i)$

$= 6 + 18i - 7i + 21 = 27 + 11i$

d'où $z = 27 + 11i$.

Synthèse

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes :

$z + z' = a + a' + i(b + b')$; $zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$

Exercice 1

1. Place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A ; B et C d'affixes respectives $3+i; -1-2i$ *et* $-2+4i$.
2. Détermine les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$.
3. Calcule l'affixe du point G_1 barycentre des points pondérés $(A,5)$, $(B,3)$ et $(C,-2)$.
4. Calcule l'affixe du point G_2 centre de gravité du triangle ABC. Place le point G_2.
5. Calcule l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Place le point D.
6. Calcule l'affixe du point I milieu du segment $[BD]$. Place le point I.

Exercice 2

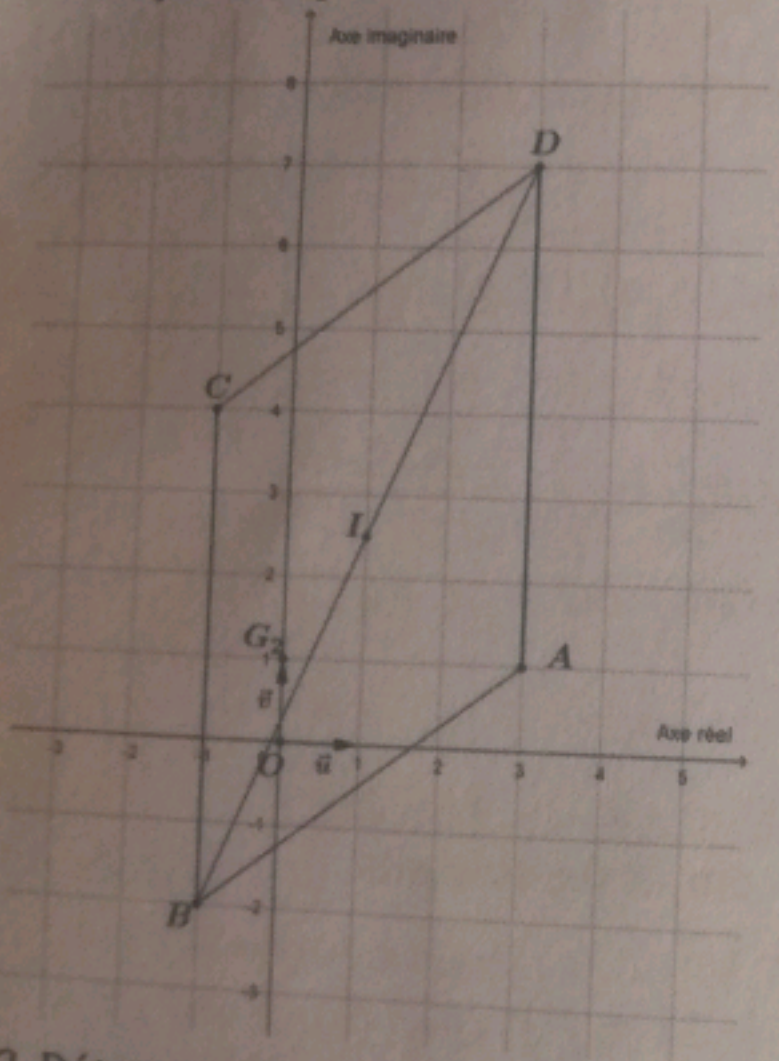
Soit n un entier naturel.

1. Calcule i^n suivant les valeurs de n.
2. Déduis-en : i^{803} ; i^{2024} ; i^{2025}; i^{2026} ,.

Solution

Exercice 1

1. Plaçons les points A ; B et C.



2. Déterminons les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ *et* $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1-2i-3-i = -4-3i$ **d'où** $\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = -4-3i.}$

$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -2+4i-3-i = -5+3i$ **d'où** $\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AC}} = -5+3i.}$

$z_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}} = z_{\overrightarrow{AB}} + z_{\overrightarrow{AC}} = -4-3i-5+3i = -9$ **d'où** $\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}} = -9.}$

$z_{2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}} = 2z_{\overrightarrow{AB}} - 3z_{\overrightarrow{AC}} = 2(-4-3i)-3(-5+3i) = 7-15i$

d'où $\boldsymbol{z_{2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}} = 7-15i.}$

3. Calculons l'affixe du point G_1 barycentre des points pondérés $(A,5)$, $(B,3)$ et $(C,-2)$.

$$z_{G_1} = \frac{5z_A + 3z_B - 2z_C}{5+3-2} = \frac{5(3+i)+3(-1-2i)-2(-2+4i)}{6}$$

$$= \frac{16-9i}{6} = \frac{16}{6} - \frac{9}{6}i = \frac{8}{3} - \frac{3}{2}i$$

D'où $\boldsymbol{z_{G_1} = \frac{8}{3} - \frac{3}{2}i.}$

4. Calculons l'affixe du point G_2 centre de gravité du triangle ABC. Plaçons le point G_2.

$z_{G_2} = \frac{z_A+z_B+z_C}{3} = \frac{3+i-1-2i-2+4i}{3} = \frac{3i}{3} = i$ **d'où** $\boldsymbol{z_{G_2} = i}$. $G_2(0;1)$

5. Calculons l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Plaçons le point D.

$z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{BC}} \Leftrightarrow z_D - z_A = z_C - z_B \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A$

$z_D = -2 + 4i + 1 + 2i + 3 + i = 2 + 7i$ **d'où** $\boldsymbol{z_D = 2 + 7i}$. $D(2;7)$

6. Calculons l'affixe du point I milieu du segment $[BD]$. Plaçons le point I.

$z_I = \frac{z_B+z_D}{2} = \frac{-1-2i+2+7i}{2} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ **d'où** $\boldsymbol{z_I = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i}$. $I\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$

Exercice 2

1. Calculons i^n suivant les valeurs de n.

$i^0 = 1 ; i^1 = i ; i^2 = -1 ; i^3 = -i ; i^4 = 1$

4 est la période ; $\forall\, k \in \mathbb{N}$

Pour $n = 4k$ on a : $i^n = 1$.

Pour $n = 4k + 1$ on a : $i^n = i$.

Pour $n = 4k + 2$ on a : $i^n = -1$.

Pour $n = 4k + 3$ on a : $i^n = -i$.

2. Déduisons-en : i^{803}, i^{554}

$803 = 4 \times 200 + 3 ; i^{803} = i^{(4\times200+3)} = i^{(4k+3)} = -i$ **d'où** $\boldsymbol{i^{803} = -i}$.

$2024 = 4 \times 506 ; i^{2024} = i^{(4\times506)} = i^{(4k)} = 1$ **d'où** $\boldsymbol{i^{2024} = 1}$.

$2025 = 4 \times 506 + 1 ; i^{2025} = i^{(4\times506+1)} = i^{(4k+1)} = i$ **d'où** $\boldsymbol{i^{2025} = i}$.

$2026 = 4 \times 506 + 2 ; i^{2026} = i^{(4\times506+2)} = i^{(4k+2)} = -1$ **d'où** $\boldsymbol{i^{2026} = -1}$.

1-3 Conjugué et Module d'un nombre complexe

1-3-1 Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$ où $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe. On appelle conjugué de z le nombre complexe, noté $\overline{z}$, tel que $\overline{z} = a - ib$.

Exemple

Complète le tableau suivant :

Nombres complexes	Nombres complexes conjugués
$15 + 8i$	
$-4 - 3i$	
$-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$	
-17	
$13i$	

Solution

Complétons le tableau :

Nombres complexes	
$15+8i$	$15-8i$
$-4-3i$	$-4+3i$
$-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$
-17	-17
$13i$	$-13i$

Propriétés

- Pour tous nombres complexes z et z', pour tout entier relatif n, on a :

$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{zz'}=\overline{z}\times\overline{z'}$; $\overline{z^n}=\overline{z}^n$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z'\neq 0)$.

- Soit z un nombre complexe tel que : $z=a+ib$. On a :

$\overline{\overline{z}}=z$; $z+\overline{z}=2Re(z)$; $z-\overline{z}=2iIm(z)$; $z\overline{z}=a^2+b^2$

z est réel $\Leftrightarrow \overline{z}=z$; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z}=-z$.

Exercice

Ecris sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $z=\frac{3-2i}{1+i}$ b) $z=\frac{4+2i}{4-3i}$ c) $z=\frac{7+8i}{i}$ d) $z=\frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)}$

e) $z=\frac{5i}{3-i}+\frac{4}{3+i}$ f) $z=(5+2i)^3$.

Solution

Ecrivons sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $z=\frac{3-2i}{1+i}=\frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3-3i-2i+2i^2}{(1)^2-(i)^2}=\frac{3-3i-2i-2}{1+1}=\frac{1-5i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$. **D'où** $z=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$.

b) $z=\frac{4+2i}{4-3i}=\frac{(4+2i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{16+12i+8i-6}{16+9}=\frac{10}{25}+\frac{20}{25}i=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$ **D'où** $z=\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i$.

c) $z=\frac{7+8i}{i}=\frac{(7+8i)(-i)}{i(-i)}=\frac{-7i+8}{1}=8-7i$ **D'où** $z=8-7i$.

d) $z=\frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)}=\frac{3+6i-i+2}{2+i-6i+3}=\frac{5+5i}{5-5i}=\frac{(5+5i)(5+5i)}{(5-5i)(5+5i)}=\frac{25+25i+25i-25}{25+25}=\frac{50i}{50}=i$ **D'où** $z=i$.

e) $z=\frac{5i}{3-i}+\frac{4}{3+i}=\frac{5i(3+i)+4(3-i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{15i-5+12-4i}{9+1}=\frac{7+11i}{10}=\frac{7}{10}+\frac{11}{10}i$ **D'où** $z=\frac{7}{10}+\frac{11}{10}i$.

f) $z=(5+2i)^3=(5)^3+3(5)^2(2i)+3(5)(2i)^2+(2i)^3=125+150i-60-8i$

$=65+142i$. **D'où** $z=65+142i$.

1-3-2 Module d'un nombre complexe

Définition

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe avec $(a;b)\in\mathbb{R}^2$. On appelle module de z le réel positif, noté $|z|$, tel que : $|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$.

Exemple

Calcule le module des nombres complexes :

$z_1=4-3i$; $z_2=-\sqrt{3}-3i$; $z_3=-4+4i$; $z_4=-12$; $z_5=-7i$.

Solution

$z_1=4-3i$; $|z_1|=\sqrt{(4)^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$. **D'où** $|z_1|=5$.

$z_2 = -\sqrt{3} - 3i$; $|z_2| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. **D'où $|z_2| = 2\sqrt{3}$.**

$z_3 = -4 + 4i$; $|z_3| = \sqrt{(-4)^2 + (4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. **D'où $|z_3| = 4\sqrt{2}$.**

$z_4 = -12$; $|z_4| = \sqrt{(-12)^2} = \sqrt{144} = 12$. **D'où $|z_4| = 12$.**

$z_5 = -7i$; $|z_5| = \sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$. **D'où $|z_5| = 7$.**

Interprétation géométrique

Si z est l'affixe d'un point M dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ alors on a : $|z| = OM$.

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z', pour tout entier relatif n, on a :

$|\bar{z}| = |z| = |-z| = |-\bar{z}|$; $|zz'| = |z| \times |z'|$; $|z^n| = |z|^n$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ $(z' \neq 0)$;

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ $(z \neq 0)$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (Inégalité triangulaire).

Exercice

1. Soit z un nombre complexe non nul de module 1. Démontre que $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

2. Démontre que si z et z' sont deux complexes non nuls de module 1 avec $zz' \neq -1$ alors le nombre complexe $u = \frac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.

Solution

1. Soit z un nombre complexe non nul de module 1. Démontrons que $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

On sait que $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

$|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{z\bar{z}} = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.

2. Démontrons que si z et z' sont deux complexes non nuls de module 1 avec $zz' \neq -1$ alors le nombre complexe $u = \frac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.

z et z' étant deux complexes non nuls de module 1 alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$ et $\overline{z'} = \frac{1}{z'}$

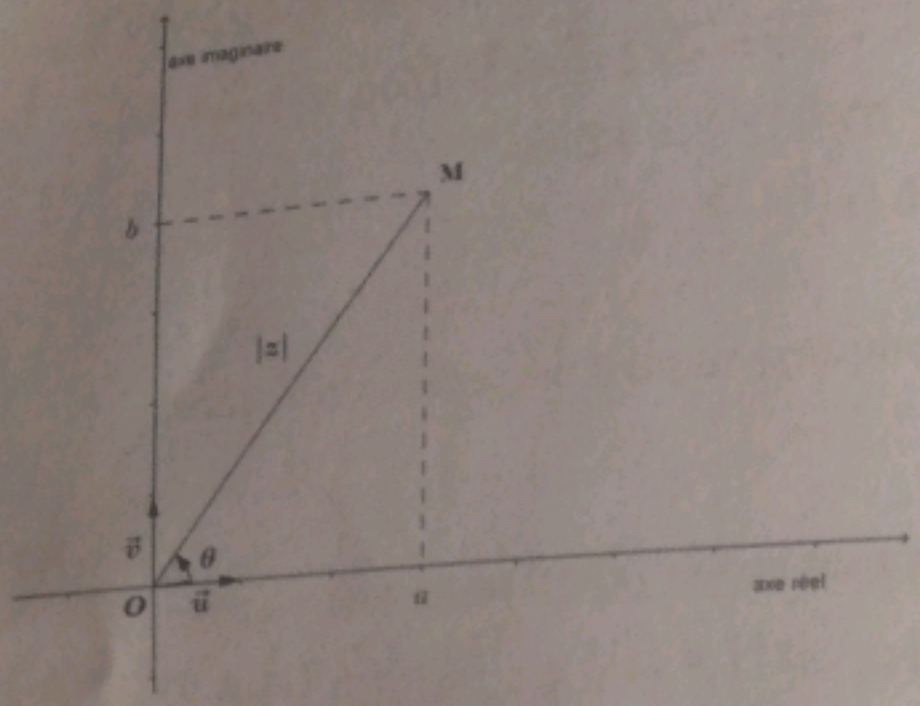
$$\bar{u} = \overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)} = \frac{\overline{z+z'}}{\overline{1+zz'}} = \frac{\bar{z}+\overline{z'}}{1+\bar{z}\overline{z'}} = \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}}{1+\frac{1}{z}\times\frac{1}{z'}} = \frac{\frac{z'+z}{zz'}}{\frac{zz'+1}{zz'}} = \frac{z+z'}{1+zz'} = u$$

$\bar{u} = u$. **D'où $u = \frac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.**

Activité 2 : Etude trigonométrique

2-1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul et $M(a; b)$ son point image dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Notons $\theta = mes\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$



$$\begin{cases}\cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z|}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = |z|\cos\theta \\ b = |z|\sin\theta\end{cases}$$

$$z = a + ib$$

$$= |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta$$

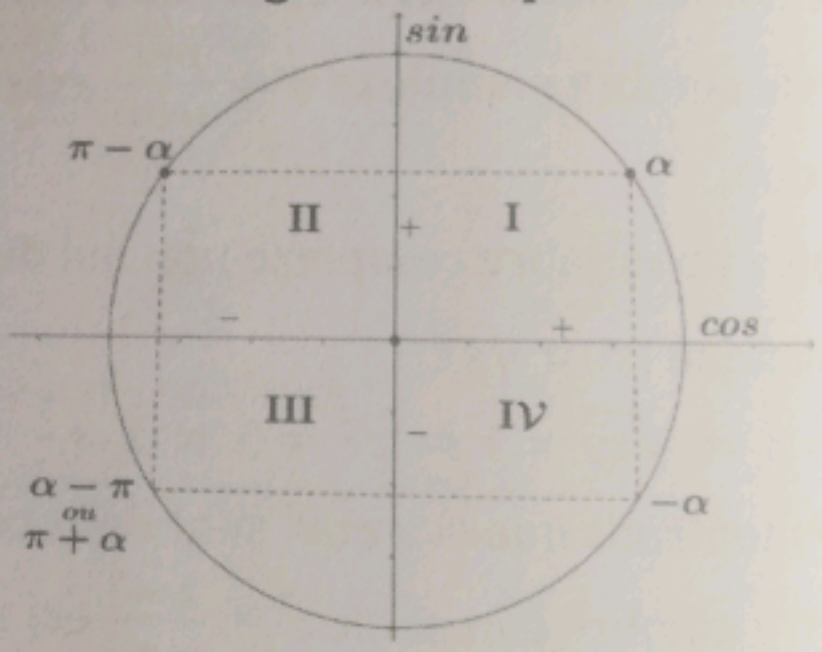
$$= |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

L'écriture $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée forme trigonométrique de z.

θ est appelé un argument de z.

Table trigonométrique des angles remarquables et cercle trigonométrique :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1



Définition

- Soit z un nombre complexe non nul de module r et θ un argument de z. On appelle **forme trigonométrique** de z, l'écriture : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
- Soit z un nombre complexe non nul et M son point image dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On appelle argument de z toute mesure en radians de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)$.
- Si θ et θ' sont deux arguments de z, alors on a : $\theta' = \theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

On note $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ ou $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$. L'argument principal de z est noté $ARG(z) = \theta\,;\theta \in]-\pi;\pi]$.

Exemple

Ecris sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}\,;\, z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{6}\,;\, z_3 = -\sqrt{3} + i\,;\; z_4 = -2 - 2i\sqrt{3}\,;\; z_5 = -3i.$

Solution

Ecrivons sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$; soit $\theta_1 = \arg(z_1)$: $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$

D'où $z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

$z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$; $|z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2}$;

Soit $\theta_2 = \arg(z_2)$: $\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{3}$

D'où $z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

$z_3 = -\sqrt{3} + i$; $|z_3| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$;

Soit $\theta_3 = \arg(z_3)$: $\begin{cases} \cos\theta_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_3 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

D'où $z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$.

$z_4 = -2 - 2i\sqrt{3}$; $|z_4| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$;

Soit $\theta_4 = \arg(z_4)$: $\begin{cases} \cos\theta_4 = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_4 = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$

D'où $z_4 = 4\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$.

$z_5 = -3i$; $|z_5| = \sqrt{(-3)^2} = 3$; Soit $\theta_5 = \arg(z_5)$: $\begin{cases} \cos\theta_5 = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin\theta_5 = -\frac{3}{3} = -1 \end{cases} \Rightarrow \theta_5 = -\frac{\pi}{2}$

D'où $z_5 = 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

Remarques

- Le complexe nul n'a pas d'argument ;
- Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$;
  - ✓ Si $r > 0$ alors la forme trigonométrique de z est : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$;
  - ✓ Si $r < 0$ alors la forme trigonométrique de z est : $z = -r[\cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)]$;
- Soit $z = bi(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $b \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
  - ✓ Si $b > 0$ alors la forme trigonométrique de z est : $z = b\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right]$;

✓ Si $b<0$ alors la forme trigonométrique de z est : $z=-b\left[\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right]$;

➢ z est réel $\Leftrightarrow z=0$ ou $\arg(z)=k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$;

➢ z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z=0$ ou $\arg(z)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

➢ Si $z=a\ (a\in\mathbb{R}^*)$ alors $ARG(z)=\begin{cases}0\ si\ a>0\\ \pi\ si\ a<0\end{cases}$.

➢ Si $z=ib\ (b\in\mathbb{R}^*)$ alors $ARG(z)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\ si\ b>0\\ -\frac{\pi}{2}\ si\ b<0\end{cases}$.

Propriétés

Pour tous nombres complexes non nuls z et z', pour tous entiers relatifs n et k, on a :

$\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')+2k\pi$; $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')+2k\pi$;

$\arg(z^n)=n\times\arg(z)+2k\pi$; $\arg(\overline{z})=-\arg(z)+2k\pi$; $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)+2k\pi$;

$\arg(-z)=\pi+\arg(z)+2k\pi$; $\arg(-\overline{z})=\pi-\arg(z)+2k\pi$.

Exemple

Détermine les arguments des nombres complexes suivants :

$z_1=\sqrt{3}-3i$; $z_2=2(-1+i\sqrt{3})$; $z_3=\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{1-i}$; $z_4=\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}\right)^7$; $z_5=(\sqrt{3}+i)(-1+i)$.

Solution

$z_1=\sqrt{3}-3i$. Soit θ_1 un argument de z_1 ; $|z_1|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2}=2\sqrt{3}$

$\begin{cases}\cos\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_1=-\frac{3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta_1=-\frac{\pi}{3}$. **D'où $\arg(z_1)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.**

$z_2=2(-1+i\sqrt{3})=-2+2i\sqrt{3}$. Soit θ_2 un argument de z_2 ;

$|z_2|=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=4$; $\begin{cases}\cos\theta_2=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta_2=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta_2=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

D'où $\arg(z_2)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

$z_3=\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{1-i}$

$\arg(z_3)=\arg(\sqrt{6}+i\sqrt{2})-\arg(1-i)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$\arg(z_3)=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{10\pi}{24}+2k\pi=\frac{5\pi}{12}+2k\pi$.

D'où $\arg(z_3)=\frac{5\pi}{12}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

$z_4=\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}\right)^7$

$\arg(z_4)=7[\arg(\sqrt{2}+i\sqrt{2})-\arg(\sqrt{3}+i)]+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$\arg(z_4)=7\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi=7\left(\frac{2\pi}{24}\right)+2k\pi=\frac{7\pi}{12}++2k\pi$

D'où $\arg(z_4)=\frac{7\pi}{12}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

$z_5 = (\sqrt{3}+i)(-1+i)$

$\arg(z_5) = \arg(\sqrt{3}+i) + \arg(-1+i) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\arg(z_5) = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi = \frac{22\pi}{24} + 2k\pi = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$

D'où $\arg(z_5) = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice

On considère les nombres complexes : $z_1 = \frac{2\sqrt{3}+11+(11\sqrt{3}-2)i}{2+11i}$ et $z_2 = \frac{4+2i}{3-i}$.

1. a) Ecris z_1 et z_2 sous forme algébrique.

   b) Détermine le module et un argument de chaque complexe z_1 et z_2.

2. On pose $Z = \frac{z_2}{z_1}$

a) Ecris Z sous forme trigonométrique puis algébrique.

b) Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$.

c) Résous l'équation : $x \in \mathbb{R}, (\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin x = 2$.

Solution

1. a) Ecrivons z_1 et z_2 sous forme algébrique

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3}+11+(11\sqrt{3}-2)i}{2+11i} = \frac{(2\sqrt{3}+11+11i\sqrt{3}-2i)(2-11i)}{(2+11i)(2-11i)}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}-22i\sqrt{3}+22-121i+22i\sqrt{3}+121\sqrt{3}-4i-22}{4+121} = \frac{125\sqrt{3}-125i}{125} = \sqrt{3}-i$$

D'où $z_1 = \sqrt{3} - i$.

$z_2 = \frac{4+2i}{3-i} = \frac{(4+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{12+4i+6i-2}{9+1} = \frac{10+10i}{10} = 1+i$. **D'où $z_2 = 1+i$.**

b) Déterminons le module et un argument de chaque complexe z_1 et z_2

$z_1 = \sqrt{3} - i$. Soit θ un argument de z_1.

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\theta = -\frac{\pi}{6}}$$

$z_2 = 1 + i$. Soit α un argument de z_2.

$$|z_2| = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2}\,; \begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{4}}$$

2. On pose $Z = \frac{z_2}{z_1}$

a) Ecrivons Z sous forme trigonométrique puis algébrique

Z sous forme trigonométrique :

$|Z| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\arg(Z) = \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \arg(z_2) - \arg(z_1) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\arg(Z) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{10\pi}{24} + 2k\pi = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi.$

D'où $\boldsymbol{Z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]}$.

Z sous forme algébrique :

$$Z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \frac{\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1}{3+1} = \frac{\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)}{4}$$

D'où $\boldsymbol{Z = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + \frac{\sqrt{3}+1}{4}i}$.

b) Déduisons en les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$.

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right] ; Z = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + \frac{\sqrt{3}+1}{4}i$$

$$Z = Z \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + \frac{\sqrt{3}+1}{4}i$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

Par identification, on a : $\begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases} \textbf{. D'où } \begin{cases} \boldsymbol{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \\ \boldsymbol{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \end{cases}$$

c) Résolvons l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin x = 2$.

$(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin x = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\cos x + \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)\sin x = \frac{2}{4}$.

$$\Leftrightarrow \cos x\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \sin x\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{5\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$\boldsymbol{S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{\pi}{12} + 2k\pi\right\}\ k \in \mathbb{Z}}$

Formule de Moivre

Soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument θ ($z = \cos\theta + i\sin\theta$). D'après Moivre, pour tout entier relatif n, on a : $z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Exemple

a) Ecris sous forme trigonométrique $z = 1 + i\sqrt{3}$.

b) Calcule $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{12}$.

Solution

a) Ecrivons sous forme trigonométrique $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Soit θ un argument de z ; $|z| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$; $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$.

D'où $z = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

Autre méthode

$$|z| = 2;\ z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

b) Calculons $(1 + i\sqrt{3})^{12}$

$$(1 + i\sqrt{3})^{12} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{12} = 2^{12}\left[\cos\left(\frac{12\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{12\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 4096[\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)] = 4096. \quad \textbf{D'où } \boldsymbol{(1 + i\sqrt{3})^{12} = 4096.}$$

Exercice

Soient Z_1 et Z_2 deux nombres complexes, on pose $Z_1Z_2 = u^2$. On suppose que $Arg(Z_2) - Arg(Z_1) = \frac{\pi}{2}$.

1. En posant $Arg(Z_1) = \theta$. Exprime $Arg(u)$ en fonction de θ.

2. Montre que le nombre $t = \frac{Z_1 + Z_2 + i(Z_1 - Z_2)}{u}$ est un réel.

Solution

1. En posant $Arg(Z_1) = \theta$. Exprimons $Arg(u)$ en fonction de θ

$$Z_1Z_2 = u^2 \Rightarrow Arg(Z_1Z_2) = Arg(u^2) \Rightarrow Arg(Z_1) + Arg(Z_2) = 2Arg(u)$$
$$\Rightarrow \theta + Arg(Z_2) = 2Arg(u).$$

$$Arg(Z_2) - Arg(Z_1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Arg(Z_2) = \frac{\pi}{2} + Arg(Z_1) \Rightarrow Arg(Z_2) = \frac{\pi}{2} + \theta\,.$$

Donc $2Arg(u) = \theta + Arg(Z_2) = \theta + \theta + \frac{\pi}{2} = 2\theta + \frac{\pi}{2} \Rightarrow Arg(u) = \theta + \frac{\pi}{4}$.

D'où $Arg(u) = \theta + \frac{\pi}{4}$.

2. Montrons que le nombre $t = \frac{Z_1 + Z_2 + i(Z_1 - Z_2)}{u}$ est un réel

$$Arg(Z_2) - Arg(Z_1) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow Arg\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{Z_2}{Z_1} = ib \text{ avec } b \in \mathbb{R}_+^*$$
$$\Leftrightarrow Z_2 = ibZ_1 \text{ avec } b \in \mathbb{R}_+^*$$

$$t = \frac{Z_1 + Z_2 + i(Z_1 - Z_2)}{u} = \frac{Z_1 + ibZ_1 + i(Z_1 - ibZ_1)}{u} = \frac{Z_1 + ibZ_1 + iZ_1 + bZ_1}{u}$$

$$= \frac{Z_1(1+i) + bZ_1(1+i)}{u} = \frac{(1+i)(Z_1 + bZ_1)}{u} = \frac{(1+i)Z_1(1+b)}{u}.$$

$$t = \frac{(1+i)Z_1(1+b)}{u} \Rightarrow Arg(t) = Arg\left[\frac{(1+i)Z_1(1+b)}{u}\right]$$
$$\Rightarrow Arg(t) = Arg(1+i) + Arg(Z_1) + Arg(1+b) - Arg(u)$$
$$\Rightarrow Arg(t) = \frac{\pi}{4} + \theta + 0 - \frac{\pi}{4} - \theta = 0$$

$Arg(t) = 0$. **D'où le nombre $t = \frac{Z_1 + Z_2 + i(Z_1 - Z_2)}{u}$ est un réel.**

2-2 Notation exponentielle

Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ. On appelle forme **exponentielle** de z l'écriture : $z = re^{i\theta}$.

Exemple

Ecris sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$z_1 = \sqrt{3} + i$; $z_2 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$; $z_3 = -2 - 2i$; $z_4 = -2 + 2i\sqrt{3}$; $z_5 = 2i$.

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, $n \in \mathbb{Z}$.

On a : $\overline{z} = re^{-i\theta}$; $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$; $z^n = r^n e^{in\theta}$; $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$; $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$.

Exemple

Ecris sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$z_1 = -3e^{-i\frac{2\pi}{3}}$; $z_2 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_3 = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$.

Solution

Ecrivons sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$z_1 = -3e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 3e^{i\pi} \times e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 3e^{i\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)} = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$ **d'où** $\boldsymbol{z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}}$.

$z_2 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(-\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$ **d'où** $\boldsymbol{z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}}$.

$z_3 = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ **d'où** $\boldsymbol{z_3 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}$.

Formules d'Euler

Soit θ un nombre réel : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ① $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ ②

① + ② $\Rightarrow 2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}$

① − ② $\Rightarrow 2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$

Remarque

$1 + \cos n\theta = 2\cos^2\left(\frac{n\theta}{2}\right)$ *avec* $n \in \mathbb{N}$

$1 - \cos n\theta = 2\sin^2\left(\frac{n\theta}{2}\right)$ *avec* $n \in \mathbb{N}$

$\sin n\theta = 2\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$ *avec* $n \in \mathbb{N}$

Exercice

1. Détermine le module et un argument des nombres complexes :

a) $z = \cos\alpha - i\sin\alpha$; $\alpha \in \mathbb{R}$ b) $z = -7(\cos 3\alpha - i\sin 3\alpha)$; $\alpha \in \mathbb{R}$

c) $z = -\sin\alpha + i\cos\alpha$; $\alpha \in \mathbb{R}$ d) $z = 1 + i\tan\alpha$; $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$

e) $z = 1 + i\,\text{cotan}\,\alpha$; $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ f) $z = 5i\left[\cos\left(\frac{3}{2}x\right) - i\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right]$; $x \in \mathbb{R}$

g) $z = -3i(\sin x + i\cos x)$; $x \in \mathbb{R}$ h) $z = \frac{-2\cos 7x + 2i\sin 7x}{\cos 4x - i\sin 4x}$; $x \in \mathbb{R}$

i) $z = \frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$; $\theta \in]0;\pi[$ j) $z = \frac{(1+i\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta}$; $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

k) $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ l) $z = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{4}}$ m) $z = \sqrt{2} + 1 - i$ n) $z = 1 + (\cos\alpha + i\sin\alpha)^5$; $\alpha \in \mathbb{R}$

2. Soit $\theta \in]0;\pi[$. Ecris sous forme trigonométrique les nombres complexes :
$z_1 = 1 + e^{i\theta}, z_2 = 1 - e^{i\theta}, Z = \frac{z_2}{z_1}, Z' = z_1 \times z_2$.

3. Soit $\theta \in]\pi;2\pi[$. Ecris sous forme trigonométrique les nombres complexes :
$z_3 = 1 + e^{-i\theta}, z_4 = 1 - e^{-i\theta}, Z = \frac{z_4}{z_3}, Z' = z_3 \times z_4$.

4. Ecris sous forme trigonométrique les nombres complexes :
$z = 2sin^2\alpha + i\sin 2\alpha$ et $z' = 2cos^2\alpha + i\sin 2\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ (on discutera suivant les valeurs de α).

Solution

1. Déterminons le module et un argument des nombres complexes

a) $z = \cos\alpha - i\sin\alpha$

$z = \cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$. **D'où $|z| = 1$ et $-\alpha$ est un argument de z.**

b) $z = -7(\cos 3\alpha - i\sin 3\alpha)$

$z = -7(\cos 3\alpha - i\sin 3\alpha) = 7(-\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha) = 7[\cos(\pi - 3\alpha) + i\sin(\pi - 3\alpha)]$

D'où $|z| = 7$ et $(\pi - 3\alpha)$ est un argument de z.

Autre méthode

$z = -7(\cos 3\alpha - i\sin 3\alpha) = -7[\cos(-3\alpha) + i\sin(-3\alpha)]$

$= 7[\cos(\pi - 3\alpha) + i\sin(\pi - 3\alpha)]$. **D'où $|z| = 7$ et $(\pi - 3\alpha)$ est un argument de z.**

c) $z = -\sin\alpha + i\cos\alpha$

$z = -\sin\alpha + i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

D'où $|z| = 1$ et $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ est un argument de z.

Autre méthode

$z = -\sin\alpha + i\cos\alpha = i(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

D'où $|z| = 1$ et $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ est un argument de z.

d) $z = 1 + i\tan\alpha\ ;\ \alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$

$$z = 1 + i\tan\alpha = 1 + i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\Rightarrow \cos\alpha < 0 \Rightarrow \frac{1}{\cos\alpha} < 0$$

$$z = -\frac{1}{\cos\alpha}[\cos(\pi + \alpha) + i\sin(\pi + \alpha)]$$

D'où $|z| = -\frac{1}{\cos\alpha}$ et $(\pi + \alpha)$ est un argument de z.

e) $z = 1 + i\,\text{cotan}\,\alpha\ ;\ \alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$

$$z = 1 + i\,\text{cotan}\,\alpha = 1 + i\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha + i\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}(\sin\alpha + i\cos\alpha)$$

$$\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\Rightarrow \sin\alpha > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha} > 0$$

$$z = \frac{1}{\sin\alpha}(\sin\alpha + i\cos\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right].$$

D'où $|z| = \frac{1}{\sin\alpha}$ et $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ est un argument de z.

f) $z = 5i\left[\cos\left(\frac{3}{2}x\right) - i\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right] = 5e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\left(-\frac{3}{2}x\right)} = 5e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}x\right)}$

D'où $|z| = 5$ et $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}x\right)$ est un argument de z.

Autre méthode

$z = 5i\left[\cos\left(\frac{3}{2}x\right) - i\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right] = 5i\left[\cos\left(-\frac{3}{2}x\right) + i\sin\left(-\frac{3}{2}x\right)\right]$

$= 5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}x\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}x\right)\right]$.

D'où $|z| = 5$ et $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}x\right)$ est un argument de z.

g) $z = -3i(\sin x + i\cos x) = 3(\cos x - i\sin x) = 3[\cos(-x) + i\sin(-x)]$

D'où $|z| = 3$ et $(-x)$ est un argument de z.

h) $z = \frac{-2\cos 7x + 2i\sin 7x}{\cos 4x - i\sin 4x}$

$z = \frac{-2\cos 7x + 2i\sin 7x}{\cos 4x - i\sin 4x} = \frac{2(-\cos 7x + i\sin 7x)}{\cos(-4x) + i\sin(-4x)} = \frac{2[\cos(\pi - 7x) + i\sin(\pi - 7x)]}{\cos(-4x) + i\sin(-4x)}$

$= \frac{2e^{i(\pi-7x)}}{e^{i(-4x)}} = 2e^{i(\pi-7x+4x)} = 2e^{i(\pi-3x)}$

D'où $|z| = 2$ et $(\pi - 3x)$ est un argument de z.

i) $z = \frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$; $\theta \in]0;\pi[$

$z = \frac{1 - \cos\theta + i\sin\theta}{1 + \cos\theta - i\sin\theta} = \frac{2sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2isin\left(\frac{\theta}{2}\right)cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2isin\left(\frac{\theta}{2}\right)cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}$

$= \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right]}$

$\theta \in]0;\pi[\Rightarrow \frac{\theta}{2} \in]0;\frac{\pi}{2}[\Rightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$; $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ et $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$

$z = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left[\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}}{e^{i\left(-\frac{\theta}{2}\right)}}\right] = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

D'où $|z| = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z.

j) $z = \frac{(1+i\tan\theta)^2}{1+tan^2\theta}$ $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$z = \frac{(1 + i\tan\theta)^2}{1 + tan^2\theta} = \frac{\left(1 + i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}{\frac{1}{cos^2\theta}} = \frac{\left(\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}{\frac{1}{cos^2\theta}} = \frac{\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^2}{cos^2\theta}}{\frac{1}{cos^2\theta}}$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$ (d'après Moivre).

D'où $|z| = 1$ et 2θ est un argument de z.

k) $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}} = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$.

$0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$. **d'où** $|z| = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ **et** $\frac{\pi}{12}$ **est un argument de z.**

Autre méthode

$z = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{12}} \times e^{-i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{12}} \times e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = e^{i\frac{\pi}{12}}\left[2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$

$= \left[2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]e^{i\frac{\pi}{12}}$

$0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$. **D'où** $|z| = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ **et** $\frac{\pi}{12}$ **est un argument de z.**

l) $z = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(1 + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(1 + e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(1 + e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)$

$= e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{24}} \times e^{-i\frac{\pi}{24}} + e^{-i\frac{\pi}{24}} \times e^{-i\frac{\pi}{24}}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{24}}\left(e^{i\frac{\pi}{24}} + e^{-i\frac{\pi}{24}}\right)$

$= e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{24}\right)}\left[2\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)\right] = \left[2\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)\right]e^{i\left(\frac{7\pi}{24}\right)}$

$0 < \frac{\pi}{24} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) > 0$. **D'où** $|z| = 2\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$ **et** $\frac{7\pi}{24}$ **est un argument de z.**

m) $z = \sqrt{2} + 1 - i$

On a : $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$z = \sqrt{2} + 1 - i = z = \sqrt{2} + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(1 + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{8}} \times e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}} \times e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)$

$= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}\left(e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{-i\frac{\pi}{8}}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}\left[2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right] = \left[2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]e^{-i\frac{\pi}{8}}$

$0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$. **D'où** $|z| = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ **et** $-\frac{\pi}{8}$ **est un argument de z.**

n) $z = 1 + (\cos\alpha + i\sin\alpha)^5$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$z = 1 + (\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 = 1 + \cos(5\alpha) + i\sin(5\alpha)$

$= 2\cos^2\left(\frac{5\alpha}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{5\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\alpha}{2}\right)\right]$

Si $\frac{5\alpha}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$; $\cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right) > 0$ alors $|z| = 2\cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right)$ et $\frac{5\alpha}{2}$ **est un argument de z.**

Si $\frac{5\alpha}{2} \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$; $\cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right) < 0$ alors

$z = -2\cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\pi + \frac{5\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{5\alpha}{2}\right)\right]$

D'où $|z| = -2\cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right)$ **et** $\left(\pi + \frac{5\alpha}{2}\right)$ **est un argument de z.**

Si $\frac{5\alpha}{2} \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$; $\cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right) = 0$ alors $z = 0$. **D'où** $|z| = 0$ **et z n'a pas d'argument.**

2. Soit $\theta \in]0; \pi[$. Ecrivons sous forme trigonométrique les nombres complexes :

$z_1 = 1 + e^{i\theta}, z_2 = 1 - e^{i\theta}, Z = \frac{z_2}{z_1}, Z' = z_1 \times z_2$.

$z_1 = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}\left[2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$= \left[2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{i\frac{\theta}{2}}$

$\theta \in]0;\pi[\Rightarrow \frac{\theta}{2} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$. **D'où** $\boldsymbol{z_1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}$.

$z_2 = 1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}\left[-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$= \left[2e^{-i\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{i\frac{\theta}{2}} = \left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$

$\theta \in]0;\pi[\Rightarrow \frac{\theta}{2} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$. **D'où** $\boldsymbol{z_2 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right]}$

$Z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}}{\left[2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

D'où $\boldsymbol{Z = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]}$

$Z' = z_1 \times z_2 = \left[2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{i\frac{\theta}{2}} \times \left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} = 2\left[2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$

$= 2\sin\theta\, e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$. **D'où** $\boldsymbol{Z' = 2\sin\theta\left[\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right]}$.

3. Soit $\theta \in]\pi; 2\pi[$. Ecrivons sous forme trigonométrique les nombres complexes :

$z_3 = 1 + e^{-i\theta}, z_4 = 1 - e^{-i\theta}, Z = \frac{z_4}{z_3}, Z' = z_3 \times z_4$

$z_3 = 1 + e^{-i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}} \times e^{-i\frac{\theta}{2}} = e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{-i\frac{\theta}{2}}\left[2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$= \left[2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{-i\frac{\theta}{2}}$

$\theta \in]\pi; 2\pi[\Rightarrow \frac{\theta}{2} \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$.

$z_3 = \left[-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{i\pi} \times e^{-i\frac{\theta}{2}} = \left[-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{i\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)}$

$z = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)\right]$.

D'où $\boldsymbol{z_3 = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)\right]}$.

$z_4 = 1 - e^{-i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \times e^{-i\frac{\theta}{2}} = e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{-i\frac{\theta}{2}}\left[2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$= \left[2e^{i\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{-i\frac{\theta}{2}} = \left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$

$\theta \in]\pi; 2\pi[\Rightarrow \frac{\theta}{2} \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\Rightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$.

$z_4 = \left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\right]$.

D'où $\boldsymbol{z_4 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\right]}$.

$Z = \frac{z_4}{z_3} = \frac{\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}}{\left[-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{i\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)}} = -\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}-\pi+\frac{\theta}{2}\right)} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$= -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$. **D'où** $\boldsymbol{Z = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]}$.

$$Z' = z_3 \times z_4 = \left[-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{i\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)} \times \left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= -2\left[2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] e^{i\left(\pi-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} = -2\sin\theta\, e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$= -2\sin\theta\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\right].$$

D'où $Z' = -2\sin\theta\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\right]$.

4. Ecrivons sous forme trigonométrique les nombres complexes :

$z = 2sin^2\alpha + i\sin 2\alpha = 2sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha(\sin\alpha + i\cos\alpha)$

$$z = 2\sin\alpha\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$$

Pour $\alpha \in]-\pi+2k\pi; 2k\pi[$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$ on a : $\sin\alpha < 0$

$$z = -2\sin\alpha\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$$

$$= -2\sin\alpha\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$$

$$z = -2\sin\alpha\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right].$$

Pour $\alpha \in]2k\pi; \pi+2k\pi[$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$ on a : $\sin\alpha > 0$

$$z = 2\sin\alpha\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right].$$

Pour $\alpha = k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$ on a : $\sin\alpha = 0$

$z = 0$ n'a pas de forme trigonométrique.

$z' = 2cos^2\alpha + i\sin 2\alpha = 2cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha = 2\cos\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

Pour $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$ on a : $\cos\alpha > 0$

$$z' = 2\cos\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Pour $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$ on a : $\cos\alpha < 0$

$$z' = -2\cos\alpha(-\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

$$z' = -2\cos\alpha[\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha)].$$

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}+k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$ on a : $\cos\alpha = 0$

$z' = 0$ n'a pas de forme trigonométrique.

2-3 Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit Z un nombre complexe non nul et n un entier naturel ($n \geq 2$). On appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z tel que : $z^n = Z$.

Soit Z et z les nombres complexes tels que : $Z = \rho e^{i\theta}$ et $z = re^{i\alpha}$ avec $(\rho; r) \in (\mathbb{R}^*)^2$.

$$z^n = Z \Leftrightarrow r^n e^{in\alpha} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \alpha = \dfrac{\theta+2k\pi}{n} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Z admet n racines n-ièmes qui sont de forme :

- $z_k = \sqrt[n]{\rho}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ (forme exponentielle)
- $z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. (forme trigonométrique)

- $z_k = \left[\sqrt[n]{\rho}; \frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. (forme polaire)

En particulier les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité (c'est-à-dire $Z = 1$) sont de forme :

- $z_k = e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ (forme exponentielle)
- $z_k = \left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

(forme trigonométrique)

- $z_k = \left[1; \frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. (forme polaire)

Exemple

1. Détermine les racines quatrièmes du nombre complexe $Z_1 = 1 - i\sqrt{3}$.
2. Détermine sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines cubiques du nombre complexe $Z_2 = 8i$ (c'est-à-dire résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = 8i$).
3. Détermine sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines cubiques de l'unité.
4. Détermine sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines sixièmes de l'unité.
5. Détermine sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines quatrièmes de $1 + i\sqrt{3}$.

Solution

1. Déterminons les racines quatrièmes du nombre complexe $Z_1 = 1 - i\sqrt{3}$.

$|Z_1| = \sqrt{(1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$; soit θ un argument de Z_1 : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$

$z_k = \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)} = \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{-\pi+6k\pi}{12}\right)}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

Pour $k = 0$ on a : $z_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{-\pi}{12}\right)}$; Pour $k = 1$ on a : $z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$

Pour $k = 2$ on a : $z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}$; Pour $k = 3$ on a : $z_3 = \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{17\pi}{12}\right)}$

Les racines quatrièmes du nombre complexe $Z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ sont : $\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{-\pi}{12}\right)}$; $\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$; $\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}$; $\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{17\pi}{12}\right)}$.

2. Déterminons sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines cubiques du nombre complexe $Z_2 = 8i$

Les racines cubiques du nombre complexe $Z_2 = 8i$ sous forme trigonométrique $|Z_2| = 8$ et $\frac{\pi}{2}$ est un argument de Z_2.

$z_k = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right] = 2\left[\cos\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)\right]$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$

Pour $k = 0$ on a : $z_0 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

Pour $k = 1$ on a : $z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

Pour $k = 2$ on a : $z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$

Les racines cubiques du nombre complexe $Z_2 = 8i$ sous forme algébrique

$$z_0 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = 2(0 - i) = -2i$$

3. Déterminons sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines cubiques de l'unité

Les racines cubiques de l'unité sous forme trigonométrique :

$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$.

Pour $k = 0$ on a : $z_0 = \cos(0) + i\sin(0)$

Pour $k = 1$ on a : $z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Pour $k = 2$ on a : $z_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

Les racines cubiques de l'unité sous forme algébrique :

$$z_0 = \cos(0) + i\sin(0) = 1$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

4. Déterminons sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines sixièmes de l'unité.

Les racines sixièmes de l'unité sous forme trigonométrique :

$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Pour $k = 0$ on a : $z_0 = \cos(0) + i\sin(0)$

Pour $k = 1$ on a : $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Pour $k = 2$ on a : $z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Pour $k = 3$ on a : $z_3 = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$

Pour $k = 4$ on a : $z_4 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

Pour $k = 5$ on a : $z_5 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

Les racines sixièmes de l'unité sous forme algébrique :

$$z_0 = \cos(0) + i\sin(0) = 1$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

$$z_4 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$z_5 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

5. Déterminons sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines quatrièmes de $1 + i\sqrt{3}$.

$1 + i\sqrt{3} = \left[2; \frac{\pi}{3}\right]$. Ainsi les racines quatrièmes de $1 + i\sqrt{3}$ sont :

$z_k = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right)} = \sqrt{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi + 6k\pi}{12}\right)}$ avec $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

Formes trigonométriques :

Pour $k = 0$, $z_0 = \sqrt{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$

Pour $k = 1$, $z_1 = \sqrt{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$

Pour $k = 2$, $z_2 = \sqrt{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right]$

Pour $k = 3$, $z_3 = \sqrt{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right]$

Formes algébriques

$z_0 = \sqrt{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$

On a: $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Donc $z_0 = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$. **D'où** $\mathbf{z_0 = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}} + \sqrt{6\sqrt{2}}}{4} + i\frac{\sqrt{6\sqrt{2}} - \sqrt{2\sqrt{2}}}{4}}$

$z_1 = \sqrt{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$. On a : $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$

$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Donc $z_1 = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$. **D'où** $\mathbf{z_1 = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}} - \sqrt{6\sqrt{2}}}{4} + i\frac{\sqrt{6\sqrt{2}} + \sqrt{2\sqrt{2}}}{4}}$

$z_2 = \sqrt{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right]$. On a : $\frac{13\pi}{12} = \pi + \frac{\pi}{12}$

$\cos\frac{13\pi}{12} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\frac{\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$z_2 = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$. **D'où** $\boldsymbol{z_2 = \frac{-\sqrt{2\sqrt{2}}-\sqrt{6\sqrt{2}}}{4} + i\frac{\sqrt{2\sqrt{2}}-\sqrt{6\sqrt{2}}}{4}}$

$z_3 = \sqrt{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right]$. On a : $\frac{19\pi}{12} = \frac{18\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$

$\cos\frac{19\pi}{12} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{19\pi}{12} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\frac{\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$z_3 = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$. **D'où** $\boldsymbol{z_3 = \frac{\sqrt{6\sqrt{2}}-\sqrt{2\sqrt{2}}}{4} + i\frac{-\sqrt{2\sqrt{2}}-\sqrt{6\sqrt{2}}}{4}}$

Remarques

- La somme des n racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul est nulle.
- Soit z une racine n-ième de Z. Pour trouver les n racines n-ièmes de Z on multiplie successivement z par les racines n-ièmes de l'unité.
- Les points images des racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul Z sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de O et de rayon $\sqrt[n]{|Z|}$.

Exemple

a) Calcule $(2+i)^4$.

b) Détermine sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité.

c) Déduis-en les racines quatrièmes du nombre complexe $Z = -7 + 24i$ sous forme algébrique.

d) Place les points images de ces racines dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Solution

a) Calculons $(2+i)^4$

$(2+i)^4 = [(2+i)^2]^2 = (4+4i-1)^2 = (3+4i)^2 = 9+24i-16 = -7+24i.$

D'où $(2+i)^4 = -7+24i$.

b) Déterminons sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité.

Les racines cubiques de l'unité sous forme trigonométrique :

$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ avec $k \in \{0,1,2,3\}$.

Pour $k = 0$ on a : $z_0 = \cos(0) + i\sin(0)$

Pour $k = 1$ on a : $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Pour $k = 2$ on a : $z_2 = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$

Pour $k = 3$ on a : $z_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Les racines cubiques de l'unité sous forme algébrique :

$z_0 = \cos(0) + i\sin(0) = 1$; $\quad z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

$z_2 = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$; $z_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$

c) Déduisons-en les racines quatrièmes du nombre complexe $Z = -7 + 24i$ sous forme algébrique.

$(2+i)^4 = -7 + 24i \Longrightarrow 2 + i$ est une racine quatrième de $Z = -7 + 24i$.

En multipliant successivement $2 + i$ par les racines quatrièmes de l'unité, on a :

$(2+i) \times 1 = 2 + i$; $(2+i) \times i = -1 + 2i$; $(2+i) \times (-1) = -2 - i$;

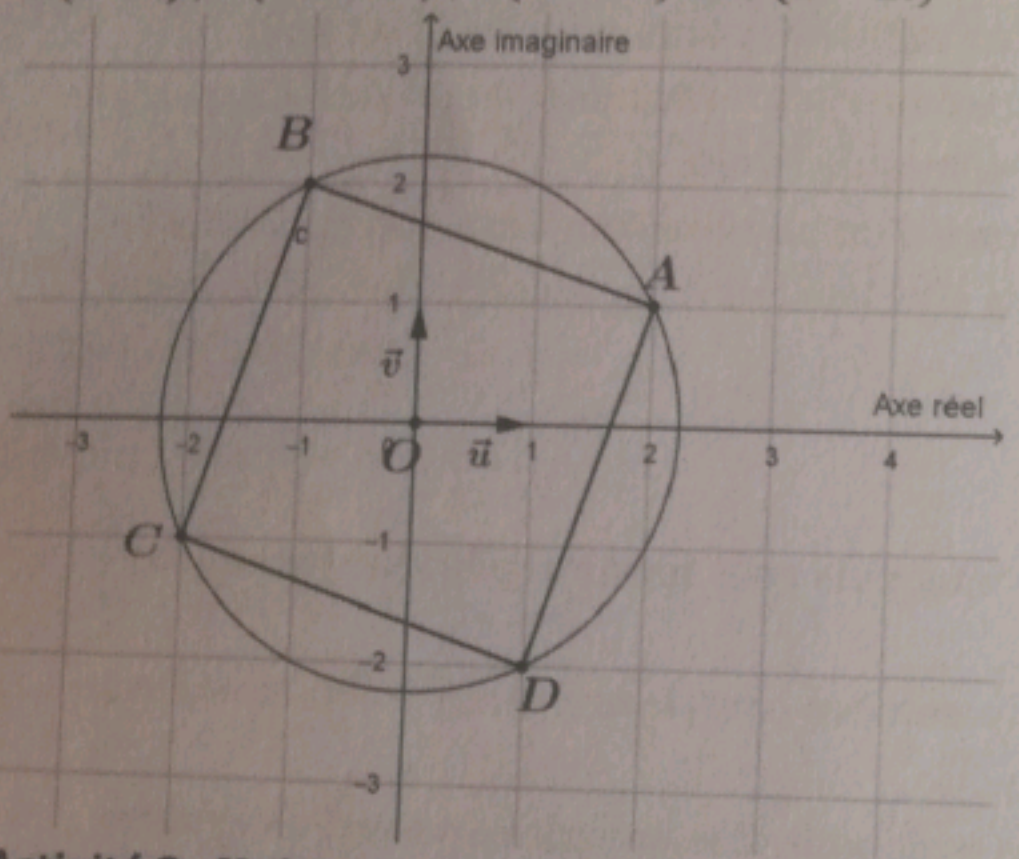
$(2+i) \times (-i) = 1 - 2i$.

D'où les racines quatrièmes du nombre complexe $Z = -7 + 24i$ sont :

$2 + i$; $-1 + 2i$; $-2 - i$; $1 - 2i$.

d) Plaçons les points images de ces racines dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

$A(2+i)$; $B(-1+2i)$; $C(-2-i)$ et $D(1-2i)$



Activité 3 : Utilisations des nombres complexes

3-1 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

3-1-1 Racines carrées d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul et $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

$\delta = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ est une racine carrée de z si $\delta^2 = z$.

$$\delta^2 = z \Leftrightarrow (x+iy)^2 = a + ib \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

$$\delta^2 = z \Longrightarrow |\delta^2| = |z| \Longrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = \sqrt{a^2+b^2} \Longrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$$

La résolution du système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} & ① \\ x^2 - y^2 = a & ② \\ 2xy = b & ③ \end{cases}$ permet d'avoir les racines carrées de z.

Exemple

Détermine les racines carrées du nombre complexe $z = 5 + 12i$.

Solution

Déterminons les racines carrées du nombre complexe $z = 5 + 12i$.

Soit $\delta = x + iy$ est une racine carrée de z ; on a :

$$\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{(5)^2+(12)^2} & ① \\ x^2-y^2=5 & ② \\ 2xy=12 & ③ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=13 & ① \\ x^2-y^2=5 & ② \\ xy=6 & ③ \end{cases}$$

$① + ② \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$

Remplaçons x par sa valeur dans ③

Pour $x = 3$ on a : $3y = 6 \Rightarrow y = 2$

Pour $x = -3$ on a : $-3y = 6 \Rightarrow y = -2$

D'où les racines carrées de z sont : $\delta_1 = 3 + 2i$ et $\delta_2 = -3 - 2i$.

Autre méthode

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} (x+iy)^2 = a+ib \\ |z|^2 = |Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+2xiy = a+ib \\ x^2+y^2 = |Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=a & ① \\ x^2+y^2=|Z| & ② \\ 2xy=b & ③ \end{cases}$$

$① + ② \Leftrightarrow 2x^2 = a + |Z| \Leftrightarrow x^2 = \frac{a+|Z|}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{|Z|+a}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{|Z|+a}{2}}$

Pour $x = \sqrt{\frac{|Z|+a}{2}}$ on a : $y = \frac{b}{2x} \Leftrightarrow y = \frac{b}{2\left(\sqrt{\frac{|Z|+a}{2}}\right)} = \frac{b}{\sqrt{2}\sqrt{|Z|+a}} = \frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{|Z|+a}} = \frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{|Z|-a}{|Z|^2-a^2}}$

$$= \frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{|Z|-a}{b^2}} = \frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|Z|-a}{2}} \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{|Z|-a}{2}} \text{ ou } y = -\sqrt{\frac{|Z|-a}{2}}$$

Pour $x = -\sqrt{\frac{|Z|+a}{2}}$, $y = \frac{b}{2x} \Leftrightarrow y = -\frac{b}{2\sqrt{\frac{|Z|+a}{2}}} = -\sqrt{\frac{|Z|-a}{2}}$ ou $y = \sqrt{\frac{|Z|-a}{2}}$

$z_1 = \sqrt{\frac{|Z|+a}{2}} + i\sqrt{\frac{|Z|-a}{2}}$ et $z_2 = -\sqrt{\frac{|Z|+a}{2}} - i\sqrt{\frac{|Z|-a}{2}}$ sont les racines carrées de Z

D'une manière générale les racines carrées se détermine comme suit :

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{|Z|+a}{2}} + \varepsilon i\sqrt{\frac{|Z|-a}{2}} \text{ avec } \varepsilon = \begin{cases} 1 \text{ si } b>0 \\ -1 \text{ si } b<0 \end{cases} \text{ et } \delta_2 = -\delta_1.$$

Remarque

Les racines carrées d'un nombre complexe non nul sont opposées.

Exemple

Détermine les racines carrées de $-\sqrt{3}+i$

Solution

Déterminons les racines carrées de $-\sqrt{3}+i$

$|-\sqrt{3}+i| = 2$

$\delta_1 = \sqrt{\frac{|Z|+a}{2}} + \varepsilon i\sqrt{\frac{|Z|-a}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$ et $\delta_2 = -\delta_1 = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$ sont les racines carrées de $-\sqrt{3}+i$.

3-1-2 Equations du second degré

Forme générale : $az^2 + bz + c = 0, a \in \mathbb{C}^*$ et $(b;c) \in \mathbb{C}^2$

Pour résoudre une telle équation on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$ alors $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

- Si $\Delta = 0$ alors $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$; $S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
- Si $\Delta < 0$ alors $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$; $S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} ; \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right\}$
- Si $\Delta = a_1 + ib_1$ avec $a_1 \in \mathbb{R}$ et $b_1 \in \mathbb{R}^*$, on cherche δ_1 et δ_2 les racines carrées de Δ alors $z_1 = \frac{-b+\delta_1}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta_2}{2a}$; $S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{-b+\delta_1}{2a} ; \frac{-b+\delta_2}{2a}\right\}$

Exemple

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $2z^2 - 5z + 2 = 0$ b) $4z^2 + 4z + 1 = 0$ c) $z^2 - 4z + 13 = 0$

d) $z^2 + z + 1 = 0$ e) $z^2 - 8\cos\theta\, z + 16 - 7sin^2\theta = 0, \theta \in \mathbb{R}$.

f) $z^2 - 2iz - 2 = 0$ g) $z^2 - 3iz + 4 = 0$ h) $z^2 - iz + 1 - 3i = 0$.

Solution

Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

a) $2z^2 - 5z + 2 = 0$; $\Delta = (-5)^2 - 4(2)(2) = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$

$z_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$; $z_2 = \frac{5+3}{4} = 2$. **D'où** $S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$.

b) $4z^2 + 4z + 1 = 0$; $\Delta = (4)^2 - 4(4)(1) = 0$

$z_1 = z_2 = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$. **D'où** $S_{\mathbb{C}} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

c) $z^2 - 4z + 13 = 0$; $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(13) = -36$

$z_1 = \frac{4-i\sqrt{|-36|}}{2} = 2 - 3i$; $z_2 = \frac{4+i\sqrt{|-36|}}{2} = 2 + 3i$. **D'où** $S_{\mathbb{C}} = \{2 - 3i; 2 + 3i\}$.

d) $z^2 + z + 1 = 0$; $\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3 = 3i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i\sqrt{3}$ *ou* $\sqrt{\Delta} = -i\sqrt{3}$

$z_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **D'où** $S_{\mathbb{C}} = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

e) $z^2 - 8\cos\theta\, z + 16 - 7sin^2\theta = 0, \theta \in \mathbb{R}$.

$\Delta = (-8\cos\theta)^2 - 4(1)(16 - 7sin^2\theta) = 64cos^2\theta - 64 + 28sin^2\theta$

$= 64(1 - sin^2\theta) - 64 + 28sin^2\theta = 64 - 64sin^2\theta - 64 + 28sin^2\theta = -36sin^2\theta$

$= 36i^2 sin^2\theta = (6i\sin\theta)^2$

$z_1 = \frac{8\cos\theta - 6i\sin\theta}{2} = 4\cos\theta - 3i\sin\theta$; $z_2 = \frac{8\cos\theta + 6i\sin\theta}{2} = 4\cos\theta + 3i\sin\theta$.

D'où $S_{\mathbb{C}} = \{4\cos\theta - 3i\sin\theta ; 4\cos\theta + 3i\sin\theta\}$.

f) $z^2 - 2iz - 2 = 0$; $\Delta = (-2i)^2 - 4(1)(-2) = -4 + 8 = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$

$z_1 = \frac{2i-2}{2} = i - 1 = -1 + i$; $z_2 = \frac{2i+2}{2} = i + 1 = 1 + i$.

D'où $S_{\mathbb{C}} = \{-1 + i; 1 + i\}$.

g) $z^2 - 3iz + 4 = 0$

$\Delta = (-3i)^2 - 4(1)(4) = -9 - 16 = -25 = 25i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5i$ *ou* $\sqrt{\Delta} = -5i$

$z_1 = \frac{3i-5i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$; $z_2 = \frac{3i+5i}{2} = 4i$. **D'où** $S_{\mathbb{C}} = \{-i; 4i\}$

h) $z^2 - iz + 1 - 3i = 0$; $\Delta = (-i)^2 - 4(1)(1 - 3i) = -1 - 4 + 12i = -5 + 12i$

Soit $\delta = x + iy$ est une racine carrée de Δ ; on a :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} & ① \\ x^2 - y^2 = -5 & ② \\ 2xy = 12 & ③ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 & ① \\ x^2 - y^2 = -5 & ② \\ xy = 6 & ③ \end{cases}$$

$① + ② \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$

Remplaçons x par sa valeur dans ③

Pour $x = 2$ on a : $2y = 6 \Rightarrow y = 3$

Pour $x = -2$ on a : $-2y = 6 \Rightarrow y = -3$. Donc $\delta_1 = 2 + 3i$ et $\delta_2 = -2 - 3i$

$z_1 = \dfrac{-b + \delta_1}{2a} = \dfrac{i + 2 + 3i}{2} = 1 + 2i$; $z_2 = \dfrac{-b + \delta_2}{2a} = \dfrac{i - 2 - 3i}{2} = -1 - i$.

D'où $S_C = \{1 + 2i; -1 - i\}$.

3-1-3 Equations se ramenant au second degré

Exemple 1

Soit l'équation $(E) : z^3 + (3 - 4i)z^2 - (1 + 11i)z - 6 - 6i = 0$

1. Démontre que (E) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.
2. Résous (E) dans $\mathbb{C}$.

Exemple 2

On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^4 + (2 + 4i)z^2 + 4(1 + 2i)z + 8i + 8$

1. Calcule $(-1 + i)^2$; $(-1 + i)^3$; $(-1 + i)^4$ et montre que $(-1 + i)$ est un zéro de P.
2. Montre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
3. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exemple 3

Soit l'équation $(F) : \quad z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$

1. Démontre que (F) est équivalente au système : $\begin{cases} u = z + \frac{1}{z} \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases}$.
2. Résous (F) dans $\mathbb{C}$.

Exemple 4

Soit l'équation $(E') : \quad z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5 = 0$

a) Montre que si z_0 est solution de l'équation (E') alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E').

b) Vérifie que $-i$ est une solution de (E').

c) Déduis-en une résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E').

Solution

Exemple 1

Soit l'équation $(E) : \quad z^3 + (3 - 4i)z^2 - (1 + 11i)z - 6 - 6i = 0$

1. Démontrons que (E) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.

Soit $z_0 = a$ cette solution réelle

$a^3 + (3 - 4i)a^2 - (1 + 11i)a - 6 - 6i = 0 \Leftrightarrow a^3 + 3a^2 - 4ia^2 - a - 11ia - 6 - 6i = 0$

$\Leftrightarrow a^3 + 3a^2 - a - 6 + i(-4a^2 - 11a - 6) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 3a^2 - a - 6 = 0 & ① \\ -4a^2 - 11a - 6 = 0 & ② \end{cases}$

$② : -4a^2 - 11a - 6 = 0$; $\Delta = (-11)^2 - 4(-4)(-6) = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

$a_1 = \frac{11-5}{-8} = -\frac{3}{4}$; $a_2 = \frac{11+5}{-8} = -2$

Remplaçons a par sa valeur dans ①

Pour $a = -\frac{3}{4}$ on a : $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 + 3\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - \left(-\frac{3}{4}\right) - 6 = 0 \Rightarrow -\frac{255}{64} = 0$ absurde

Pour $a = -2$ on a : $(-2)^3 + 3(-2)^2 - (-2) - 6 = 0 \Longrightarrow 0 = 0$ vraie.

D'où $z_0 = -2$ est une solution réelle de (E).

2. Résolvons (E) dans $\mathbb{C}$

	1	$3-4i$	$-1-11i$	$-6-6i$
-2		-2	$-2+8i$	$6+6i$
	1	$1-4i$	$-3-3i$	0

$z^3 + (3-4i)z^2 - (1+11i)z - 6 - 6i = 0 \Leftrightarrow (z+2)[z^2 + (1-4i)z - 3 - 3i] = 0$

$\Leftrightarrow z + 2 = 0$ ou $z^2 + (1-4i)z - 3 - 3i = 0$

$z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = -2$

$z^2 + (1-4i)z - 3 - 3i = 0$; $\Delta = (1-4i)^2 - 4(1)(-3-3i) = -3 + 4i$

Soit $\delta = x + iy$ est une racine carrée de Δ ; on a :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} & ① \\ x^2 - y^2 = -3 & ② \\ 2xy = 4 & ③ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & ① \\ x^2 - y^2 = -3 & ② \\ xy = 2 & ③ \end{cases}$$

$① + ② \Longrightarrow 2x^2 = 2 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

Pour $x = 1$ dans ③ on a : $y = 2$ donc $\delta_1 = 1 + 2i$ et $\delta_2 = -1 - 2i$

$$z_1 = \frac{-1 + 4i + 1 + 2i}{2} = 3i \; ; \; z_2 = \frac{-1 + 4i - 1 - 2i}{2} = -1 + i.$$

D'où $S_{\mathbb{C}} = \{-2; 3i; -1 + i\}$.

Exemple 2

$P(z) = z^4 + (2+4i)z^2 + 4(1+2i)z + 8i + 8$

1. Calculons $(-1+i)^2$; $(-1+i)^3$; $(-1+i)^4$ et montrons que $(-1+i)$ est un zéro de P.

$(-1+i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$. **D'où $(-1+i)^2 = -2i$.**

$(-1+i)^3 = (-1+i)^2(-1+i) = -2i(-1+i) = 2 + 2i$. **D'où $(-1+i)^3 = 2 + 2i$.**

$(-1+i)^4 = (-1+i)^2(-1+i)^2 = (-2i)(-2i) = -4$. **D'où $(-1+i)^4 = -4$.**

$$\begin{aligned} P(-1+i) &= (-1+i)^4 + (2+4i)(-1+i)^2 + 4(1+2i)(-1+i) \\ &= -4 + (2+4i)(-2i) + 4(-1+i-2i-2) + 8i + 8 \\ &= -4 - 4i + 8 - 4 + 4i - 8i - 8 + 8i + 8 = 0 \end{aligned}$$

$P(-1+i) = 0$. **D'où $(-1+i)$ est un zéro de P.**

2. Montrons que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

Soit $z_0 = ib$ cette solution imaginaire pure avec $b \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} P(ib) = 0 &\Leftrightarrow (ib)^4 + (2+4i)(ib)^2 + 4(1+2i)(ib) + 8i + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow b^4 + (2+4i)(-b^2) + 4(ib - 2b) + 8i + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow b^4 - 2b^2 - 4ib^2 + 4ib - 8b + 8i + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow b^4 - 2b^2 - 8b + 8 + i(-4b^2 + 4b + 8) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 2b^2 - 8b + 8 = 0 & ① \\ -4b^2 + 4b + 8 = 0 & ② \end{cases} \end{aligned}$$

② : $-4b^2 + 4b + 8 = 0$; $\Delta = (4)^2 - 4(-4)(8) = 144 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 12$

$$b_1 = \frac{-4 - 12}{-8} = 2 \; ; \; b_2 = \frac{-4 + 12}{-8} = -1$$

Remplaçons b par sa valeur dans ①

Pour $b = 2$ on a : $(2)^4 - 2(2)^2 - 8(2) + 8 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ vraie

Pour $b = -1$ on a : $(-1)^4 - 2(-1)^2 - 8(-1) + 8 = 0 \Rightarrow 15 = 0$ absurde.

D'où $z_0 = 2i$ est la solution imaginaire pure.

3. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

	1	0	$2+4i$	$4+8i$	$8i+8$
$-1+i$		$-1+i$	$-2i$	-4	$-8i-8$
	1	$-1+i$	$2+2i$	$8i$	0
$2i$		$2i$	$-2i-6$	$-8i$	
	1	$-1+3i$	-4	0	

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+1-i)(z-2i)[z^2 + (-1+3i)z - 4] = 0$

$\Leftrightarrow z+1-i = 0$ *ou* $z-2i = 0$ *ou* $z^2 + (-1+3i)z - 4 = 0$

- $z+1-i = 0 \Leftrightarrow z = -1+i$
- $z-2i = 0 \Leftrightarrow z = 2i$
- $z^2 + (-1+3i)z - 4 = 0$

$\Delta = (-1+3i)^2 - 4(1)(-4) = 1 - 6i - 9 + 16 = 8 - 6i$

Soit $\delta = x + iy$ est une racine carrée de Δ ; on a :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{(8)^2 + (-6)^2} & ① \\ x^2 - y^2 = 8 & ② \\ 2xy = -6 & ③ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 & ① \\ x^2 - y^2 = 8 & ② \\ xy = -3 & ③ \end{cases}$$

$① + ② \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ *ou* $x = -3$

Pour $x = 3$ dans ③ on a : $3y = -3 \Rightarrow y = -1$ donc $\delta_1 = 3 - i$ et $\delta_2 = -3 + i$

$z_1 = \dfrac{1-3i+3-i}{2} = 2 - 2i$; $z_2 = \dfrac{1-3i-3+i}{2} = -1 - i$

D'où $S_C = \{-1+i; 2i; 2-2i; -1-i\}$.

Exemple 3

Soit l'équation (F) : $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$

1. Démontrons que (F) est équivalente au système : $\begin{cases} u = z + \frac{1}{z} \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases}$

$$(F) : z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2\left(z^2 - 5z + 6 - \frac{5}{z} + \frac{1}{z^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2\left[\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 5\left(z + \frac{1}{z}\right) + 6 = 0\right]$$

$$\Leftrightarrow z^2\left[\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2z \times \frac{1}{z} - 5\left(z + \frac{1}{z}\right) + 6 = 0\right]$$

$$\Leftrightarrow z^2\left[\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 - 5\left(z + \frac{1}{z}\right) + 6 = 0\right]$$

$$\Leftrightarrow z^2\left[\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 5\left(z + \frac{1}{z}\right) + 4 = 0\right]$$

Or 0 n'est pas solution de (F) ; donc (F) est équivalente au système : $\begin{cases} u = z + \frac{1}{z} \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases}$

2. Résolvons (F) dans $\mathbb{C}$

L'équation $u^2 - 5u + 4 = 0$ a pour solution : 1 et 4.

Donc $(F) \Leftrightarrow z+\frac{1}{z}=1$ ou $z+\frac{1}{z}=4$

$\Leftrightarrow z^2-z+1=0$ ou $z^2-4z+1=0$

➢ $z^2-z+1=0$; $\Delta=(-1)^2-4(1)(1)=-3=3i^2=\left(\sqrt{3}i\right)^2$

$z_1=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

➢ $z^2-4z+1=0$; $\Delta=(-4)^2-4(1)(1)=16-4=12 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}$.

$z_1=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$; $z_2=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$.

D'où $S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right\}$

Exemple 4

Soit l'équation (E') : $z^4-4z^3+6z^2-4z+5=0$

a) Montrons que si z_0 est solution de l'équation (E') alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E').

z_0 est solution de l'équation $(E') \Leftrightarrow {z_0}^4-4{z_0}^3+6{z_0}^2-4z_0+5=0$

$\Leftrightarrow \overline{{z_0}^4-4{z_0}^3+6{z_0}^2-4z_0+5}=\overline{0}$

$\Leftrightarrow \overline{({z_0}^4)}-4\overline{({z_0}^3)}+6\overline{({z_0}^2)}-4\overline{z_0}+5=0$

$\Leftrightarrow {\overline{z_0}}^4-4{\overline{z_0}}^3+6{\overline{z_0}}^2-4\overline{z_0}+5=0$

$\Leftrightarrow \overline{z_0}$ est solution de l'équation (E').

b) Vérifions que $-i$ est une solution de (E').

$(-i)^4-4(-i)^3+6(-i)^2-4(-i)+5=0 \Leftrightarrow i^4+4i^3+6i^2+4i+5=0$

$\Leftrightarrow 1-4i-6+4i+5=0$

$\Leftrightarrow 0=0$ vraie. **D'où $-i$ est une solution de** (E').

c) Déduisons-en une résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E').

D'après a) et b) ; $-i$ et i sont des solutions de l'équation (E').

	1	−4	6	−4	5
$-i$		$-i$	$4i-1$	$-5i+4$	-5
	1	$-4-i$	$5+4i$	$-5i$	0
i		i	$-4i$	$5i$	
	1	−4	5	0	

$z^4-4z^3+6z^2-4z+5=0 \Leftrightarrow (z+i)(z-i)(z^2-4z+5)=0$

$\Leftrightarrow z+i=0$ ou $z-i=0$ ou $z^2-4z+5=0$

$z+i=0 \Leftrightarrow z=-i$; $z-i=0 \Leftrightarrow z=i$

$z^2-4z+5=0$; $\Delta=(-4)^2-4(1)(5)=-4=4i^2=(2i)^2$

$z_1=\frac{4-2i}{2}=2-i$; $z_2=\frac{4+2i}{2}=2+i$. **D'où** $S_{\mathbb{C}}=\{-i;i;2-i;2+i\}$

3-1-4 Autres équations

Exemple

1. Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $2z-3i\bar{z}=-11+4i$ b) $2i\bar{z}+3|z|^2-4-2i=0$ c) $z^6+(1-i)z^3-i=0$.

2. a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4=2\left(-1+i\sqrt{3}\right)$.

b) Ecris chacune des solutions sous forme algébrique.

Solution

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

a) $2z - 3i\bar{z} = -11 + 4i$. Posons $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$2z - 3i\bar{z} = -11 + 4i \Leftrightarrow 2(x + iy) - 3i(x - iy) = -11 + 4i$

$\Leftrightarrow 2x + 2iy - 3ix - 3y = -11 + 4i$

$\Leftrightarrow 2x - 3y + i(-3x + 2y) = -11 + 4i$

Par identification, on a : $\begin{cases} 2x - 3y = -11 \\ -3x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$. **D'où $S_{\mathbb{C}} = \{2 + 3i\}$.**

b) $2i\bar{z} + 3|z|^2 - 4 - 2i = 0$. Posons $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$2i(x - iy) + 3\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow 2ix + 2y + 3x^2 + 3y^2 - 4 - 2i = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2y - 4 + i(2x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 2y - 4 = 0 & (1) \\ 2x - 2 = 0 & (2) \end{cases}$

$(2) : 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

Remplaçons x par 1 dans (1) on a : $3(1)^2 + 3y^2 + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 + 2y - 1 = 0$

$3y^2 + 2y - 1 = 0$; $3 - 1 = 2$ on a : $y_1 = -1$; $y_2 = \frac{1}{3}$ donc $z = 1 - i$ ou $z = 1 + \frac{1}{3}i$.

D'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{1 - i; 1 + \frac{1}{3}i\right\}$.

c) $z^6 + (1 - i)z^3 - i = 0$

En posant $Z = z^3$ on a : $Z^2 + (1 - i)Z - i = 0$; $a = 1$; $b = 1 - i$; $c = -i$

On a : $a + c = 1 - i = b$ donc $Z_1 = -1$ et $Z_2 = -\frac{c}{a} = i$.

➢ Si $Z = -1$ alors $z^3 = -1$ et $z_k = \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$

Pour $k = 0$ on a : $z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Pour $k = 1$ on a : $z_1 = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$

Pour $k = 2$ on a : $z_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

➢ Si $Z = i$ alors $z^3 = i$ et $z_k = \cos\left(\frac{\pi + 4k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 4k\pi}{6}\right)$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$

Pour $k = 0$ on a : $z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Pour $k = 1$ on a : $z_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Pour $k = 2$ on a : $z_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$.

D'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -1; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; -i\right\}$.

2. a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 = 2(-1 + i\sqrt{3})$

$z^4 = 2(-1 + i\sqrt{3}) \Leftrightarrow z^4 = -2 + 2i\sqrt{3}$

$|-2 + 2i\sqrt{3}| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$. Soit θ un argument de $-2 + 2i\sqrt{3}$.

$$\begin{cases}\cos\theta = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_k = \sqrt[4]{4}e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)} = \sqrt{\sqrt{4}}e^{i\left(\frac{2\pi+6k\pi}{12}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi+3k\pi}{6}\right)} \text{ avec } k \in \{0,1,2,3\}$$

Pour $k = 0$ on a : $z_0 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$; pour $k = 1$ on a : $z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$;

pour $k = 2$ on a : $z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$; pour $k = 3$ on a : $z_3 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}$

D'où $\boldsymbol{S_C = \left\{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}; \sqrt{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}; \sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}; \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}\right\}}$.

b) Ecrivons chacune des solutions sous forme algébrique.

$$z_0 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i.$$

$$z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

$$z_3 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i.$$

D'où $\boldsymbol{S_C = \left\{\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i; -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i; \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right\}}$.

3-1-4 Systèmes d'équations

Exemple

Résous dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes :

a) $\begin{cases}(1-i)z + iz' = 2 - i \\ (2-i)z + (2+i)z' = 7 + 4i\end{cases}$ b) $\begin{cases}(2-i)\bar{z} + 7\overline{z'} = 5 + 3i \\ (1+i)z + iz' = -1 + 3i\end{cases}$

Solution

Résolvons dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes :

a) $\begin{cases}(1-i)z + iz' = 2 - i & (E_1) \\ (2-i)z + (2+i)z' = 7 + 4i & (E_2)\end{cases}$

$(2+i)(E_1) - i(E_2) \Rightarrow (2+i)(1-i)z - i(2-i)z = (2+i)(2-i) - i(7+4i)$

$\Rightarrow (2-3i)z = 9 - 7i \Rightarrow z = \frac{9-7i}{2-3i} = \frac{(9-7i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{18+27i-14i+21}{4+9} = \frac{39+13i}{13} = 3 + i$

En remplaçant z par sa valeur dans (E_1) on a :

$(1-i)(3+i) + iz' = 2 - i \Rightarrow z' = \frac{-2+i}{i} = 1 + 2i$.

D'où $\boldsymbol{S_{C^2} = \{(3+i; 1+2i)\}}$.

b) $\begin{cases}(2-i)\bar{z} + 7\overline{z'} = 5 + 3i \\ (1+i)z + iz' = -1 + 3i\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overline{(2-i)\bar{z} + 7\overline{z'}} = \overline{5+3i} \\ (1+i)z + iz' = -1 + 3i\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}(2+i)z + 7z' = 5 - 3i & (E_1) \\ (1+i)z + iz' = -1 + 3i & (E_2)\end{cases}$

$i(E_1) - 7(E_2) \Rightarrow i(2+i)z - 7(1+i)z = i(5-3i) - 7(-1+3i)$

$\Rightarrow (-8-5i)z = 10 - 16i \Rightarrow z = \frac{10-16i}{-8-5i} = \frac{(10-16i)(-8+5i)}{(-8-5i)(-8+5i)}$

$$= \frac{-80 + 50i + 128i + 80}{64 + 25} = \frac{178i}{89} = 2i$$

En remplaçant z par sa valeur dans (E_1) on a : $(2+i)(2i) + 7z' = 5 - 3i$

$$\Rightarrow z' = \frac{7 - 7i}{7} = 1 - i \,.\, \mathbf{D'où}\ \boldsymbol{S_{\mathbb{C}^2}} = \{(\boldsymbol{2i; 1 - i})\}$$

3-2 Trigonométrie et nombres complexes

3-2-1 Expression de cos nx et sin nx en fonction de cos x et sin x

Exemple

Exprime $\cos 2x$; $\sin 2x$; $\cos 3x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Solution

➢ D'après la formule de Moivre on a : $(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x$

Par ailleurs on a : $(\cos x + i \sin x)^2 = cos^2x - sin^2x + 2i \cos x \sin x$

$\cos 2x + i \sin 2x = cos^2x - sin^2x + 2i \cos x \sin x$

Par identification, on a : $\begin{cases} \boldsymbol{\cos 2x = cos^2x - sin^2x} \\ \boldsymbol{\sin 2x = 2 \cos x \sin x} \end{cases}$

➢ D'après la formule de Moivre on a : $(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x$

Par ailleurs on a :$(\cos x + i \sin x)^3 = cos^3x - 3cosxsin^2x + i(3sinxcos^2x - sin^3x)$

$\cos 3x + i \sin 3x = cos^3x - 3cosxsin^2x + i(3sinxcos^2x - sin^3x)$

Par identification, on a : $\begin{cases} \boldsymbol{\cos 3x = cos^3x - 3cosxsin^2x} \\ \boldsymbol{\sin 3x = 3sinxcos^2x - sin^3x} \end{cases}$

3-2-2 Linéarisation de $cos^n x$ et $sin^n x$ $(n \in \mathbb{N}\ et\ n \geq 2)$

Rappels

Formule du binôme de Newton

Pour tous nombres complexes non nuls a et b et pour tout entier naturel n :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k}\ b^k = C_n^0\ a^n\ b^0 + C_n^1\ a^{n-1}\ b^1 + \cdots + C_n^{n-1}\ a^1\ b^{n-1} + C_n^n\ a^0\ b^n$$

Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal permet de trouver les coefficients du développement de $(a+b)^n$ où a et b sont des nombres réels non nuls et n un entier naturel.

k / n	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	C_4^2=6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Exemple : Développe : $(a+b)^5, (a-b)^4, (a+b)^3$ et $(a-b)^3$.

Formules de linéarisation

D'après les formules d'Euler on a : $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

D'une manière générale on a : pour $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Q}$.

$e^{inx} = \cos nx + i\sin nx$ ①

$e^{-inx} = \cos nx - i\sin nx$ ②

$e^{inx} \times e^{-inx} = 1$

① + ② $\Rightarrow e^{inx} + e^{-inx} = 2\cos nx$

① − ② $\Rightarrow e^{inx} - e^{-inx} = 2i\sin nx$

Autres formules

$z = \cos x + i\sin x$ et $\bar{z} = \cos x - i\sin x$

$z + \bar{z} = 2\cos x \Rightarrow \cos x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $z - \bar{z} = 2i\sin x \Rightarrow \sin x = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

D'une manière générale on a : pour $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Q}$.

$z^n = \cos nx + i\sin nx$ ①

$\bar{z}^n = \cos nx - i\sin nx$ ②

$z^n \times \bar{z}^n = 1$

① + ② $\Rightarrow z^n + \bar{z}^n = 2\cos nx$

① − ② $\Rightarrow z^n - \bar{z}^n = 2i\sin nx$

Exemple

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{i2x} + 2e^{ix}\times e^{-ix} + e^{-i2x}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{i2x} + e^{-i2x} + 2\right) = \frac{1}{4}(2\cos 2x + 2)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$$

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{i2x} - 2e^{ix}\times e^{-ix} + e^{-i2x}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{i2x} + e^{-i2x} - 2\right) = -\frac{1}{4}(2\cos 2x - 2)$$

$$\sin^2 x = -\frac{1}{2}(\cos 2x - 1)$$

Exercice

Linéarise : $\cos^3 x$; $\sin^3 x$; $\cos^4 2\theta$; $\sin^4 \frac{\alpha}{2}$; $\cos^2 3x \sin^3 2x$; $\cos^3\left(\frac{2}{3}x\right)\sin^2\left(\frac{2}{3}x\right)$; $\cos^5 x \sin^5 x$; $\cos^4 x + \sin^3 5x$

Solution

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{i3x} + 3e^{i2x}\times e^{-ix} + 3e^{ix}\times e^{-i2x} + e^{-i3x}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}\right) = \frac{1}{8}\left[\left(e^{i3x} + e^{-i3x}\right) + 3\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}(2\cos 3x + 6\cos x) = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x).$$

D'où $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$.

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(e^{i3x} - 3e^{i2x}\times e^{-ix} + 3e^{ix}\times e^{-i2x} - e^{-i3x}\right)$$

$$= -\frac{1}{8i}\left(e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}\right) = -\frac{1}{8i}\left[\left(e^{i3x} - e^{-i3x}\right) - 3\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{8i}(2i\sin 3x - 6i\sin x) = -\frac{1}{4}(\sin 3x - 3\sin x).$$

D'où $\sin^3 x = -\frac{1}{4}(\sin 3x - 3\sin x)$.

$$\cos^4 2\theta = \left(\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left[\left(e^{i2\theta}\right)^4 + 4\left(e^{i2\theta}\right)^3 \times \left(e^{-i2\theta}\right) + 6\left(e^{i2\theta}\right)^2 \times \left(e^{-i2\theta}\right)^2 + 4\left(e^{i2\theta}\right)\left(e^{-i2\theta}\right)^3 + \left(e^{-i2\theta}\right)^4\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{i8\theta} + 4e^{i6\theta} \times e^{-i2\theta} + 6e^{i4\theta} \times e^{-i4\theta} + 4e^{i2\theta}e^{-i6\theta} + e^{-i8\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{i8\theta} + 4e^{i4\theta} + 6 + 4e^{-i4\theta} + e^{-i8\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(e^{i8\theta} + e^{-i8\theta}\right) + 4\left(e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}\right) + 6\right] = \frac{1}{16}(2\cos 8\theta + 8\cos 4\theta + 6)$$

$= \frac{1}{8}(\cos 8\theta + 4\cos 4\theta + 3)$. **D'où** $\boldsymbol{\cos^4 2\theta = \frac{1}{8}(\cos 8\theta + 4\cos 4\theta + 3)}$.

$$\sin^4 \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2i}\right)^4$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^4 + 4\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^3 \times \left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right) + 6\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \times \left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)^2 + 4\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)^3 + \left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)^4\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{i2\alpha} + 4e^{i\frac{3\alpha}{2}} \times e^{-i\frac{\alpha}{2}} + 6e^{i\alpha} \times e^{-i\alpha} + 4e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{3\alpha}{2}} + e^{-i2\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{i2\alpha} + 4e^{i\alpha} + 6 + 4e^{-i\alpha} + e^{-i2\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(e^{i2\alpha} + e^{-i2\alpha}\right) + 4\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right) + 6\right] = \frac{1}{16}(2\cos 2\alpha + 8\cos\alpha + 6)$$

$= \frac{1}{8}(\cos 2\alpha + 4\cos\alpha + 3)$. **D'où** $\boldsymbol{\sin^4 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8}(\cos 2\alpha + 4\cos\alpha + 3)}$.

$$\cos^2 3x \sin^3 2x = \left(\frac{z^3 + \overline{z}^3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{z^2 - \overline{z}^2}{2i}\right)^3$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{8i}\right)\left(z^6 + 2z^3 \times \overline{z}^3 + \overline{z}^6\right)\left(z^6 - 3z^4 \times \overline{z}^2 + 3z^2 \times \overline{z}^4 - \overline{z}^6\right)$$

$$= -\frac{1}{32i}\left(z^6 + 2 + \overline{z}^6\right)\left(z^6 - 3z^2 + 3\overline{z}^2 - \overline{z}^6\right)$$

$$= -\frac{1}{32i}\left(z^{12} - 3z^8 + 3z^4 - 1 + 2z^6 - 6z^2 + 6\overline{z}^2 - 2\overline{z}^6 + 1 - 3\overline{z}^4 + 3\overline{z}^8 - \overline{z}^{12}\right)$$

$$= -\frac{1}{32i}\left[\left(z^{12} - \overline{z}^{12}\right) - 3\left(z^8 - \overline{z}^8\right) + 2\left(z^6 - \overline{z}^6\right) + 3\left(z^4 - \overline{z}^4\right) - 6\left(z^2 - \overline{z}^2\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{32i}(2i\sin 12x - 6i\sin 8x + 4i\sin 6x + 6i\sin 4x - 12i\sin 2x)$$

D'où $\boldsymbol{\cos^2 3x \sin^3 2x = -\frac{1}{16}(\sin 12x - 3\sin 8x + 2\sin 6x + 3\sin 4x - 6\sin 2x)}$

$$\cos^3\left(\frac{2}{3}x\right)\sin^2\left(\frac{2}{3}x\right) = \left(\frac{z^{\frac{2}{3}} + \overline{z}^{\frac{2}{3}}}{2}\right)^3 \times \left(\frac{z^{\frac{2}{3}} - \overline{z}^{\frac{2}{3}}}{2i}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(z^2 + 3z^{\frac{4}{3}} \times \overline{z}^{\frac{2}{3}} + 3z^{\frac{2}{3}} \times \overline{z}^{\frac{4}{3}} + \overline{z}^2\right)\left(z^{\frac{4}{3}} - 2z^{\frac{2}{3}} \times \overline{z}^{\frac{2}{3}} + \overline{z}^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$= -\frac{1}{32}\left(z^2 + 3z^{\frac{2}{3}} + 3\overline{z}^{\frac{2}{3}} + \overline{z}^2\right)\left(z^{\frac{4}{3}} - 2 + \overline{z}^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$= -\frac{1}{32}\left(z^{\frac{10}{3}} - 2z^2 + z^{\frac{2}{3}} + 3z^2 - 6z^{\frac{2}{3}} + 3\overline{z}^{\frac{2}{3}} + 3z^{\frac{2}{3}} - 6\overline{z}^{\frac{2}{3}} + 3\overline{z}^2 + \overline{z}^{\frac{2}{3}} - 2\overline{z}^2 + \overline{z}^{\frac{10}{3}}\right)$$

$$= -\frac{1}{32}\left[\left(z^{\frac{10}{3}} + \overline{z}^{\frac{10}{3}}\right) + \left(z^2 + \overline{z}^2\right) - 2\left(z^{\frac{2}{3}} + \overline{z}^{\frac{2}{3}}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{32}\left[2\cos\left(\frac{10}{3}x\right) + 2\cos(2x) - 4\cos\left(\frac{2}{3}x\right)\right]$$

D'où $\cos^3\left(\frac{2}{3}x\right)\sin^2\left(\frac{2}{3}x\right) = -\frac{1}{16}\left[\cos\left(\frac{10}{3}x\right) + \cos(2x) - 2\cos\left(\frac{2}{3}x\right)\right]$

$$\cos^5 x \sin^5 x = \left(\frac{1}{2}\times 2\cos x \sin x\right)^5 = \frac{1}{32}(\sin 2x)^5 = \frac{1}{32}\left(\frac{z^2 - \overline{z}^2}{2i}\right)^5$$

$$= \tfrac{1}{32}\left(\tfrac{1}{32i}\right)(z^{10} - 5z^8\times\overline{z}^2 + 10z^6\times\overline{z}^4 - 10z^4\times\overline{z}^6 + 5z^2\times\overline{z}^8 - \overline{z}^{10})$$

$$= \frac{1}{1024i}(z^{10} - 5z^6 + 10z^2 - 10\overline{z}^2 + 5\overline{z}^6 - \overline{z}^{10})$$

$$= \frac{1}{1024i}[(z^{10} - \overline{z}^{10}) - 5(z^6 - \overline{z}^6) + 10(z^2 - \overline{z}^2)]$$

$$= \frac{1}{1024i}(2i\sin 10x - 10i\sin 6x + 20i\sin 2x)$$

D'où $\cos^5 x\sin^5 x = \frac{1}{512}(\sin 10x - 5\sin 6x + 10\sin 2x)$

$$\cos^4 x + \sin^3 5x = \left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^4 + \left(\frac{z^5 - \overline{z}^5}{2i}\right)^3$$

$$= \tfrac{1}{16}(z^4 + 4z^3\times\overline{z} + 6z^2\times\overline{z}^2 + 4z\times\overline{z}^3 + \overline{z}^4) - \tfrac{1}{8i}(z^{15} - 3z^{10}\times\overline{z}^5 + 3z^5\overline{z}^{10} - \overline{z}^{15})$$

$$= \frac{1}{16}(z^4 + 4z^2 + 6 + 4\overline{z}^2 + \overline{z}^4) - \frac{1}{8i}(z^{15} - 3z^5 + 3\overline{z}^5 - \overline{z}^{15})$$

$$= \frac{1}{16}[(z^4 + \overline{z}^4) + 4(z^2 + \overline{z}^2) + 6] - \frac{1}{8i}[(z^{15} - \overline{z}^{15}) - 3(z^5 - \overline{z}^5)]$$

$$= \frac{1}{16}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6) - \frac{1}{8i}(2i\sin 15x - 6i\sin 5x)$$

D'où $\cos^4 x + \sin^3 5x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3) - \frac{1}{4}(\sin 15x - 3\sin 5x)$

3-2-3 Transformation de produit en somme et de somme en produit

Propriété 1

Pour tous nombres réels a et b, on a :

$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$; $\sin a\sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$;

$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

En effet :

$$\cos a\cos b = \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right)\times\left(\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}[2\cos(a+b) + 2\cos(a-b)] = \tfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

Propriété 2

Pour tous nombres réels p et q, on a :

$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$; $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$;

$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$; $\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

En effet :

On a : $e^{ip} + e^{iq} = (\cos p + \cos q) + i(\sin p + \sin q)$ ①

En remarquant que $p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$ et $q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$, on obtient :

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right) = 2\left(\cos\frac{p+q}{2} + i\sin\frac{p+q}{2}\right)\cos\frac{p-q}{2}$$

$$e^{ip} + e^{iq} = \left(2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\right) + i\left(2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\right) \quad ②$$

En utilisant ① et ②, on déduit :

$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

3-3 Géométrie et nombres complexes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit A, B et C trois points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z_C on a :

- $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$;

  $\arg(z_B - z_A) = mes(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ et $d(A,B) = AB = |z_B - z_A|$

- M d'affixe z, $\arg(z) = mes(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ et $|z| = OM = d(O,M)$.

3-3-1 Transformations et nombres complexes

$M(z)$ et $M'(z')$ désignent un point et son image, ainsi que leurs affixes, par chacune de ces transformations

Transformation	Ecriture complexe
Translation de vecteur $\vec{u}(b)$	$z' = z + b$
Symétrie centrale de centre $A(z_A)$	$z' - z_A = -(z - z_A)$
Symétrie par rapport à l'axe réel	$z' = \overline{z}$
Symétrie par rapport à l'axe imaginaire	$z' = -\overline{z}$
Homothétie de centre $A(z_A)$ et de rapport k $(k \in \mathbb{R}^*)$	$z' - z_A = k(z - z_A)$
Rotation de centre $A(z_A)$ et d'angle α	$z' - z_A = e^{i\alpha}(z - z_A)$

Remarque

Pour les transformations ci-dessus admettant un centre, le centre est le point invariant c'est-à-dire le point qui est confondu avec son image.

Exemple

1. Dans chacun des cas suivants, détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation dont on donne l'écriture complexe :

a) $f: z' = z + 4 - i$ b) $g: z' = -\frac{1}{2}z + 3 - 6i$ c) $h: z' = iz + 2$ d) $\ell: z' = -z + 3 - 8i$.

2. Détermine l'écriture complexe de la rotation de centre $A(0;2)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3. Détermine l'écriture complexe de l'homothétie de centre $B(-1;7)$ et de rapport $k = \frac{2}{3}$.

4. Détermine l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre $C(2;5)$.

5. Détermine l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-7 + i\sqrt{3}$.

Solution

1. Dans chacun des cas suivants, déterminons la nature et les éléments caractéristiques de la transformation dont on donne l'écriture complexe :

a) $f: z' = z + 4 - i$

L'écriture complexe de f est de la forme $z' = z + b$ avec $b = 4 - i$.

D'où f est la translation de vecteur $\vec{u}(4 - i)$.

b) $g : z' = -\frac{1}{2}z + 3 - 6i$

Cherchons A le point invariant par g.

$z' = z \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}z + 3 - 6i \Leftrightarrow \frac{3}{2}z = 3 - 6i \Leftrightarrow z = 2 - 4i$ donc $z_A = 2 - 4i$.

$$z' - z_A = -\frac{1}{2}z + 3 - 6i - 2 + 4i = -\frac{1}{2}z + 1 - 2i = -\frac{1}{2}(z - 2 + 4i) = -\frac{1}{2}(z - z_A)$$

D'où g est l'homothétie de centre $A(2; -4)$ et de rapport $k = -\frac{1}{2}$.

c) $h: z' = iz + 2$

Cherchons A_1 le point invariant par h.

$z' = z \Leftrightarrow z = iz + 2 \Leftrightarrow (1 - i)z = 2 \Leftrightarrow z = \frac{2}{1-i} = 1 + i$ donc $z_{A_1} = 1 + i$.

$$z' - z_{A_1} = iz + 2 - 1 - i = iz + 1 - i = i(z - 1 - i) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_{A_1})$$

D'où h est la rotation de centre $A_1(1; 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

d) $\ell : z' = -z + 3 - 8i$.

Cherchons A_2 le point invariant par ℓ.

$z' = z \Leftrightarrow z = -z + 3 - 8i \Leftrightarrow 2z = 3 - 8i \Leftrightarrow z = \frac{3}{2} - 4i$ donc $z_{A_2} = \frac{3}{2} - 4i$.

$$z' - z_{A_2} = -z + 3 - 8i - \frac{3}{2} + 4i = -z + \frac{3}{2} - 4i = -\left(z - \frac{3}{2} + 4i\right) = -(z - z_{A_2})$$

D'où ℓ est la symétrie centrale de centre $A_2\left(\frac{3}{2}; -4\right)$.

2. Déterminons l'écriture complexe de la rotation de centre $A(0; 2)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$z' - z_A = e^{i\alpha}(z - z_A)$ avec $z_A = 2i$ et $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

$$z' - 2i = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 2i) \Leftrightarrow z' - 2i = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - 2i) \Leftrightarrow \boldsymbol{z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \sqrt{3} + i}$$

3. Déterminons l'écriture complexe de l'homothétie de centre $B(-1; 7)$ et de rapport $\frac{2}{3}$.

$z' - z_B = k(z - z_B)$ avec $z_B = -1 + 7i$ et $k = \frac{2}{3}$.

$$z' + 1 - 7i = \frac{2}{3}(z + 1 - 7i) \Leftrightarrow \boldsymbol{z' = \frac{2}{3}z - \frac{1}{3} + \frac{7}{3}i}$$

4. Déterminons l'écriture complexe de la symétrie centrale de centre $C(2; 5)$.

$z' - z_C = -(z - z_C)$ avec $z_C = 2 + 5i$

$z' - 2 - 5i = -(z - 2 - 5i) \Leftrightarrow \boldsymbol{z' = -z + 4 + 10}$

5. Déterminons l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-7 + i\sqrt{3}$.

$z' = z + b$ avec $b = -7 + i\sqrt{3}$

$z' = z + b \Leftrightarrow \boldsymbol{z' = z - 7 + i\sqrt{3}}$.

3-3-2 Configurations du plan et nombres complexes

Activité

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = 3 + i$ et $z_C = 2 - 2i$.

1. a) Calcule AB, AC et BC.

b) Déduis-en la nature du triangle ABC.

2. On pose $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$

a) Interprète géométriquement $|Z|$ et $\arg(Z)$.

b) Ecris Z sous forme algébrique. Calcule le module et un argument de Z.

c) Déduis-en la nature du triangle ABC.

Solution

1. a) Calculons AB, AC et BC

$AB = |z_B - z_A| = |3 + i - 2i| = |3 - i| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$. **D'où $AB = \sqrt{10}$.**

$AC = |z_C - z_A| = |2 - 2i - 2i| = |2 - 4i| = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$. **D'où $AC = \sqrt{20}$.**

$BC = |z_C - z_B| = |2 - 2i - 3 - i| = |-1 - 3i| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$. **D'où $BC = \sqrt{10}$.**

b) Déduisons-en la nature du triangle ABC.

On a : $\begin{cases} AB = BC = \sqrt{10} \\ AC^2 = AB^2 + BC^2 \end{cases}$ **d'où ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.**

2. On pose $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$

a) Interprétons géométriquement $|Z|$ et $\arg(Z)$

$|Z| = \left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = \frac{|z_C - z_B|}{|z_A - z_B|} = \frac{BC}{BA}$. **D'où $|Z| = \frac{BC}{BA}$**

$\arg(Z) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = mes(\widehat{\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}}) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

D'où $\arg(Z) = mes(\widehat{\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}}) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

b) Ecrivons Z sous forme algébrique. Calculons le module et un argument de Z

$Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{2 - 2i - 3 - i}{2i - 3 - i} = \frac{-1 - 3i}{-3 + i} = \frac{(-1 - 3i)(-3 - i)}{(-3 + i)(-3 - i)} = \frac{3 + i + 9i - 3}{9 + 1} = \frac{10i}{10} = i.$

D'où $Z = i$.

$|Z| = 1$ et $\frac{\pi}{2}$ est un argument de Z.

c) Déduisons-en la nature du triangle ABC

On sait que $|Z| = \frac{BC}{BA}$ et $arg(Z) = mes(\widehat{\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}})$

$|Z| = 1 \Leftrightarrow \frac{BC}{BA} = 1 \Leftrightarrow BC = BA.$

$\arg(Z) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow mes(\widehat{\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}}) = \frac{\pi}{2}.$

D'où ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.

Configuration	Caractérisation complexe
Triangle ABC isocèle en A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$ $\alpha \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
Triangle ABC équilatéral	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$
Triangle ABC rectangle en A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi$ $(b \in \mathbb{R}^*)$
Points A, B, C alignés	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
Points A, B, C, D cocycliques	$\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \div \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}^*$

Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit $A(-1+i)$, $B(-1-i)$, $C(2i)$ et $D(2-2i)$.

a) Etudie la nature de chacun des triangles ACD et BCD.

b) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques (c'est-à-dire appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon).

c) Détermine les images de A et de C par la rotation de centre O (origine du repère) et d'angle orienté $-\frac{\pi}{2}$.

d) Détermine l'affixe du point N pour que CDN soit un triangle équilatéral direct.

Solution

a) Etudions la nature de chacun des triangles ACD et BCD

La nature du triangle ACD

$AC = |z_C - z_A| = |2i + 1 - i| = |1 + i| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$AD = |z_D - z_A| = |2 - 2i + 1 - i| = |3 - 3i| = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$

$CD = |z_D - z_C| = |2 - 2i - 2i| = |2 - 4i| = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$

On a : $CD^2 = AC^2 + AD^2$. **D'où ACD est un triangle rectangle en A.**

Autre méthode

$\frac{z_A - z_C}{z_A - z_D} = \frac{-1+i-2i}{-1+i-2+2i} = \frac{-1-i}{-3+3i} = \frac{1}{3}i = ib$ avec $b = \frac{1}{3} \in \mathbb{R} - \{0\}$

D'où ACD est un triangle rectangle en A.

La nature du triangle BCD

$BC = |z_C - z_B| = |2i + 1 + i| = |1 + 3i| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$.

$BD = |z_D - z_B| = |2 - 2i + 1 + i| = |3 - i| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

On a : $\begin{cases} BC = BD = \sqrt{10} \\ CD^2 = BC^2 + BD^2 \end{cases}$. **D'où BCD est un triangle rectangle et isocèle en B.**

b) Démontrons que les points A, B, C et D sont cocycliques (c'est-à-dire appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon).

1re méthode

Soit $I(x;y)$ le centre du cercle et r son rayon

A, B, C et D appartiennent au cercle de centre I et rayon $r \Leftrightarrow AI = BI = CI = DI = r$

$AI = BI \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}$

$\Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \Rightarrow y = 0$ (1)

$CI = DI \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} = \sqrt{(x - x_D)^2 + (y - y_D)^2}$

$\Leftrightarrow (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = (x - x_D)^2 + (y - y_D)^2$

$\Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y + 2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4$

$\Leftrightarrow 4x - 8y - 4 = 0$ (2)

En remplaçant y par sa valeur dans (2) on a : $4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ donc $I(1;0)$

$AI = \sqrt{(x_I - x_A)^2 + (y_I - y_A)^2} = \sqrt{(1 + 1)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{5}$ donc $AI = BI = \sqrt{5}$.

$CI = \sqrt{(x_I - x_C)^2 + (y_I - y_C)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5}$ donc $CI = DI = \sqrt{5}$.

Alors $AI = BI = CI = DI = r = \sqrt{5}$.

D'où A, B, C et D appartiennent à un même cercle de centre $I(1;0)$ et de rayon $r = \sqrt{5}$.

2e méthode

$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_D} = \frac{-1-3i}{-3+i} = \frac{10}{10}i = i$. **D'où BCD est un triangle rectangle et isocèle en B.**

$\left(\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}\right) \times \left(\frac{z_D - z_A}{z_D - z_B}\right) = \left(\frac{1+3i}{1+i}\right) \times \left(\frac{3-3i}{3-i}\right) = \frac{6+3i}{2+i} = 3 \in \mathbb{R}^*$. **D'où les points A, B, C et D sont cocycliques**

Déterminons le centre et le rayon de ce cercle

ACD est un triangle rectangle en A donc les points A, C et D appartiennent à un même cercle de centre I milieu du segment $[CD]$ et de rayon $r = \frac{CD}{2}$.

$z_I = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{2i+2-2i}{2} = \frac{2}{2} = 1$ donc $I(1;0)$; $r = \frac{CD}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

$IB = |z_B - z_I| = |-1 - i - 1| = |-2 - i| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} = r$.

D'où A, B, C et D appartiennent à un même cercle de centre $I(1;0)$ et de rayon $r = \sqrt{5}$.

c) Déterminons les affixes des images de A et de C par la rotation de centre O (origine du repère) et d'angle orienté $-\frac{\pi}{2}$

Soit A' et C' les images respectives de A et C par la rotation de centre O et d'angle orienté $-\frac{\pi}{2}$

$z_{A'} = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_A = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right](-1+i) = (-i)(-1+i) = 1+i$.

D'où $z_{A'} = 1 + i$.

$z_{C'} = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_C = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right](2i) = (-i)(2i) = 2$. **D'où $z_{C'} = 2$.**

d) Déterminons l'affixe du point N pour que CDN soit un triangle équilatéral direct

$\frac{z_N - z_C}{z_D - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z_N - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_C) \Leftrightarrow z_N = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(z_D - z_C) + z_C$

$z_N = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2 - 2i - 2i) + 2i = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2 - 4i) + 2i$

$= 1 - 2i + i\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2i = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}$. **D'où $z_N = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}$.**

3-3-3 Lieux géométriques et nombres complexes

Activité

A tout nombre complexe z, différent de $-2+i$, on associe le nombre complexe z' tel que : $z' = \frac{z-1+3i}{z+2-i}$.

Soit $M(x;y)$ d'affixe $z = x + iy$ et $M'(x';y')$ d'affixe $z' = x' + iy'$.

1. Exprime x' et y' en fonction de x et y.
2. Détermine et construis les ensembles des points M d'affixe z tels que :

a) z' est un nombre réel b) z' est un nombre imaginaire pur c) $|z'| = 1$

d) $arg(z') = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

3. Détermine l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z'| = 2$.

Solution

1. Exprimons x' et y' en fonction de x et y.

$$z' = \frac{z-1+3i}{z+2-i}$$

$$x'+iy' = \frac{x+iy-1+3i}{x+iy+2-i} = \frac{x-1+i(y+3)}{x+2+i(y-1)} = \frac{[x-1+i(y+3)][x+2-i(y-1)]}{[x+2+i(y-1)][x+2-i(y-1)]}$$

$$= \frac{[(x-1)(x+2)+(y+3)(y-1))]+i[(x-1)(-y+1)+(x+2)(y+3))]}{(x+2)^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+x+2y-5+i(4x+3y+5)}{(x+2)^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+x+2y-5}{(x+2)^2+(y-1)^2} + \frac{4x+3y+5}{(x+2)^2+(y-1)^2}i$$

D'où $\boldsymbol{x' = \frac{x^2+y^2+x+2y-5}{(x+2)^2+(y-1)^2}}$ **et** $\boldsymbol{y' = \frac{4x+3y+5}{(x+2)^2+(y-1)^2}}$.

2. Déterminons et construisons les ensembles des points M d'affixe z tels que :

a) z' est un nombre réel

z' est un nombre réel $\Leftrightarrow Im(z') = 0 \Leftrightarrow \frac{4x+3y+5}{(x+2)^2+(y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4x+3y+5=0 \\ (x+2)^2+(y-1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y+5=0 \\ (x;y) \neq (-2;1) \end{cases}.$$

D'où l'ensemble des points M est la droite (D) d'équation $4x+3y+5=0$ privée du point **$A(-2;1)$.**

Autre méthode

Posons $z' = \frac{z-1+3i}{z+2-i} = \frac{z-z_B}{z-z_A}$ avec $z_A = -2+i$ et $z_B = 1-3i$

z' est un nombre réel $\Leftrightarrow z' = 0$ ou $\arg(z') = k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow z - z_B = 0$ *ou*

$arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow z = z_B$ *ou* $mes(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}) = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

D'où l'ensemble des points M est la droite (AB) privée du point $A(-2;1)$.

b) z' est un nombre imaginaire pur

z' est un nombre imaginaire pur $\Leftrightarrow Re(z') = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+x+2y-5}{(x+2)^2+(y-1)^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+2y-5=0 \\ (x+2)^2+(y-1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y+1)^2 - 1 - 5 = 0 \\ (x;y) \neq (-2;1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{25}{4} \\ (x;y) \neq (-2;1) \end{cases}.$$ **D'où l'ensemble des points M est le cercle (C)** de centre **$I\left(-\frac{1}{2};-1\right)$ et de rayon $r = \frac{5}{2}$ privé du point $A(-2;1)$.**

Autre méthode

Posons $z' = \frac{z-1+3i}{z+2-i} = \frac{z-z_B}{z-z_A}$ avec $z_A = -2+i$ et $z_B = 1-3i$

z' est un nombre imaginaire pur $\Leftrightarrow z' = 0$ *ou* $arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow z - z_B = 0$ *ou* $arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow z = z_B$ *ou* $mes(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

D'où l'ensemble des points M est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point $A(-2;1)$.

c) $|z'| = 1$

$|z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-1+3i}{z+2-i}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-1+3i|}{|z+2-i|} = 1 \Leftrightarrow |z-1+3i| = |z+2-i|$

$\Leftrightarrow |x+iy-1+3i| = |x+iy+2-i| \Leftrightarrow |x-1+i(y+3)| = |x+2+i(y-1)|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+6y+9 = x^2+4x+4+y^2-2y+1 \Leftrightarrow -6x+8y+5 = 0$

D'où l'ensemble des points M est la droite (D') d'équation $-6x+8y+5=0$.

Autre méthode

Posons $z' = \frac{z-1+3i}{z+2-i} = \frac{z-z_B}{z-z_A}$ avec $z_A = -2+i$ et $z_B = 1-3i$

$|z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z_B}{z-z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-z_B|}{|z-z_A|} = 1 \Leftrightarrow |z-z_B| = |z-z_A| \Leftrightarrow BM = AM$

D'où l'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[AB]$.

d) $\arg(z') = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\arg(z') = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{y'}{x'} \Rightarrow -1 = \frac{\frac{4x+3y+5}{(x+2)^2+(y-1)^2}}{\frac{x^2+y^2+x+2y-5}{(x+2)^2+(y-1)^2}}$$

$$\Rightarrow -1 = \frac{4x+3y+5}{x^2+y^2+x+2y-5} \text{ avec } (x;y) \neq (-2;1)$$

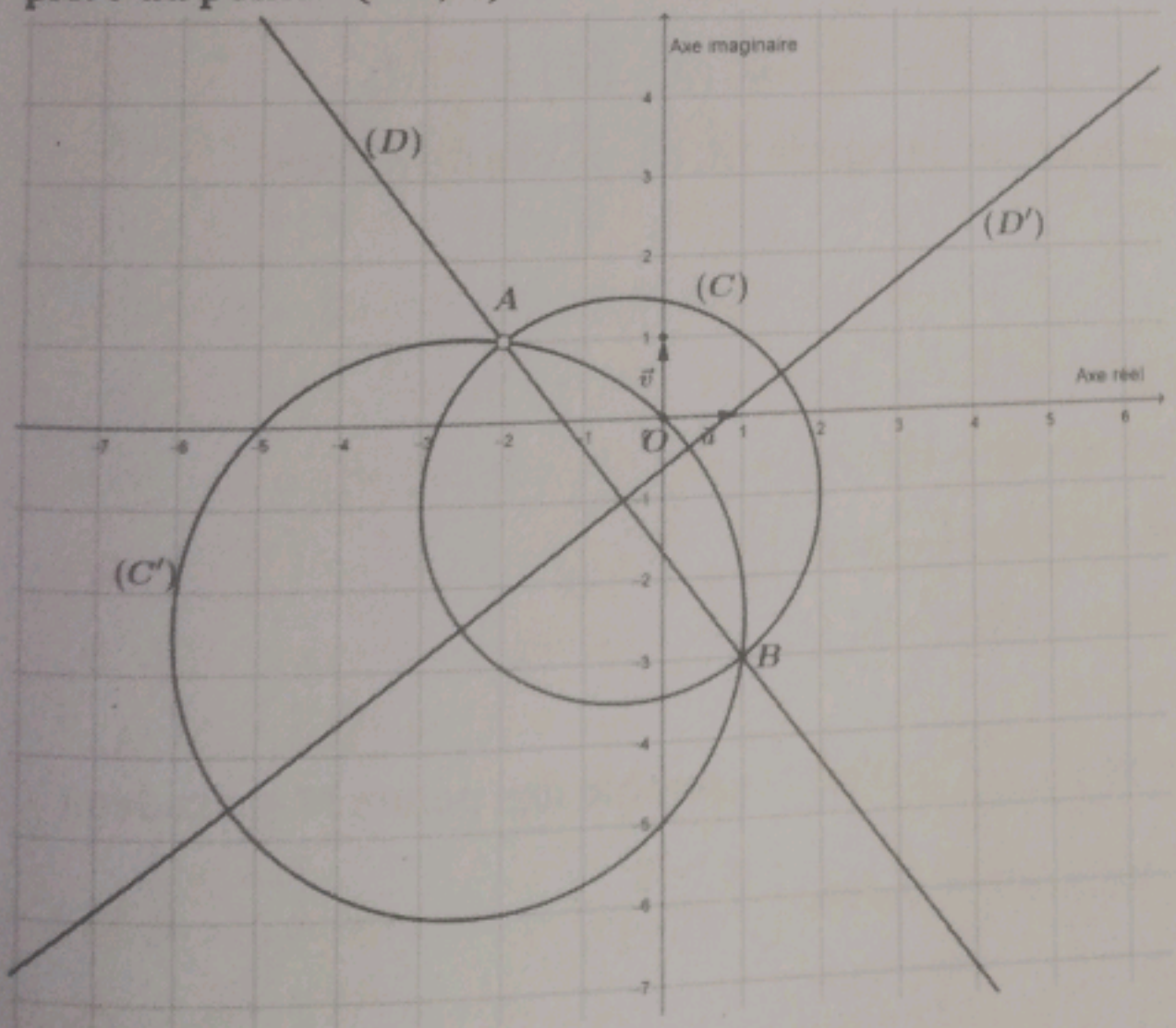
$$\Rightarrow -x^2-y^2-x-2y+5 = 4x+3y+5 \text{ avec } (x;y) \neq (-2;1)$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+5x+5y = 0 \text{ avec } (x;y) \neq (-2;1)$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \left(y+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0 \text{ avec } (x;y) \neq (-2;1)$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{50}{4} \text{ avec } (x;y) \neq (-2;1).$$

D'où l'ensemble des points M est le cercle (C') de centre $J\left(-\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$ et de rayon $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ privé du point $A(-2;1)$.



Activité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$. Soit le point A d'affixe $z_A = 2-i$.

Détermine l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

a) $|z-2+i|=3$ b) $arg(z-2+i)\equiv\frac{\pi}{3}[\pi]$ c) $arg(z-2+i)\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]$

d) $arg(z-2+i)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$.

Solution

Déterminons l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

a) $|z-2+i|=3$

Posons $z=x+iy$

$|z-2+i|=3\Leftrightarrow|x+iy-2+i|=3\Leftrightarrow|x-2+i(y+1)|=3$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=3\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+1)^2=9.$

D'où l'ensemble des points M est le cercle de centre $A(2;-1)$ et de rayon $r=3$.

Autre méthode

$|z-2+i|=3\Leftrightarrow|z-z_A|=3\Leftrightarrow AM=3$

D'où l'ensemble des points M est le cercle de centre $A(2;-1)$ et de rayon $r=3$.

b) $arg(z-2+i)\equiv\frac{\pi}{3}[\pi]\Leftrightarrow arg(z-2+i)=\frac{\pi}{3}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Posons $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$z-2+i=x+iy-2+i=x-2+i(y+1)$

$arg(z-2+i)\equiv\frac{\pi}{3}[\pi]\Rightarrow\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{y+1}{x-2}$ avec $(x;y)\neq(2;-1)$

$\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{y+1}{x-2}$ avec $(x;y)\neq(2;-1)$

$\Rightarrow x\sqrt{3}-y-2\sqrt{3}-1=0$ avec $(x;y)\neq(2;-1)$.

D'où l'ensemble des points M est la droite d'équation $x\sqrt{3}-y-2\sqrt{3}-1=0$ privée du point $A(2;-1)$.

Autre méthode

$arg(z-2+i)\equiv\frac{\pi}{3}[\pi]\Leftrightarrow arg(z-z_A)\equiv\frac{\pi}{3}[\pi]\Leftrightarrow mes(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{AM})\equiv\frac{\pi}{3}[\pi]$

D'où l'ensemble des points M est la droite de repère $(A,\vec{u})$, privée de A, avec $mes(\overrightarrow{e_1},\vec{u})\equiv\frac{\pi}{3}[\pi]$.

c) $arg(z-2+i)\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Posons $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$z-2+i=x+iy-2+i=x-2+i(y+1)$

$arg(z-2+i)\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]\Rightarrow\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{y+1}{x-2}$ avec $\begin{cases}x-2>0\\y+1<0\end{cases}$

$\Rightarrow-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{y+1}{x-2}$ avec $\begin{cases}x>2\\y<-1\end{cases}$

$\Rightarrow-x\sqrt{3}-3y+2\sqrt{3}-3=0$ avec $\begin{cases}x>2\\y<-1\end{cases}$. **D'où l'ensemble des points M est la demi droite d'équation $-x\sqrt{3}-3y+2\sqrt{3}-3=0$ avec $\begin{cases}x>2\\y<-1\end{cases}$.**

Autre méthode

$arg(z-2+i) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow arg(z-z_A) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow mes(\widehat{\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{AM}}) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

D'où l'ensemble des points M est la demi-droite de repère $(A,\vec{u})$, privée de A, avec $mes(\widehat{\overrightarrow{e_1},\vec{u}}) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

d) $arg(z-2+i) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

$arg(z-2+i) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow z-2+i$ est un imaginaire pur avec $z \neq 2-i$

Posons $z = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$z-2+i = x+iy-2+i = x-2+i(y+1)$

$z-2+i$ est un imaginaire pur avec $z \neq 2-i \Rightarrow x-2=0$ avec $(x;y) \neq (2;-1)$

$\Rightarrow x=2$ avec $(x;y) \neq (2;-1)$. **D'où l'ensemble des points M est la droite d'équation $x=2$ privée du point $A(2;-1)$.**

Synthèse

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B, M d'affixe z.

- $|z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow AM = BM$ alors le lieu de M est la médiatrice du segment $[AB]$.
- $|z-z_A| = r \Leftrightarrow AM = r$ alors le lieu de M est le cercle de centre A et de rayon r $(r>0)$.
- $|z-z_A| \leq r \Leftrightarrow AM \leq r$ alors le lieu de M est le disque de centre A et de rayon r $(r>0)$.
- $|z-z_A| < r \Leftrightarrow AM < r$ alors le lieu de M est l'intérieur du disque de centre A et de rayon r, frontière non comprise $(r>0)$.
- $|z-z_A| > r \Leftrightarrow AM > r$ alors le lieu de M est l'extérieur du disque de centre A et de rayon r frontière non comprise. $(r>0)$
- $arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow mes(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}}) = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ alors le lieu de M est la droite (AB) privée des points A et B.
- $arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow mes(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}}) = 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ alors le lieu de M est la droite (AB) privée du segment $[AB]$.
- $arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \pi + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow mes(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}}) = \pi + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ alors le lieu de M est le segment $[AB]$ privé des points A et B.
- $arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow mes(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}}) = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ alors le lieu de M est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.
- $arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow mes(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ alors le lieu de M est le demi cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B tel que $mes(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}}) = \frac{\pi}{2}$.
- $arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow mes(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ alors le lieu de M est le demi cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B tel que $mes(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}}) = -\frac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$. α un nombre réel et A le point d'affixe z_A.

- $arg(z-z_A)\equiv\alpha[\pi] \Leftrightarrow mes(\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AM}})\equiv\alpha[\pi]$ alors le lieu de M est la droite de repère $(A,\vec{u})$, privée de A, avec $mes(\widehat{\overrightarrow{e_1},\vec{u}})\equiv\alpha[\pi]$.
- $arg(z-z_A)\equiv\alpha[2\pi] \Leftrightarrow mes(\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AM}})\equiv\alpha[2\pi]$ alors le lieu de M est la demi droite de repère $(A,\vec{u})$, privée de A, avec $mes(\widehat{\overrightarrow{e_1},\vec{u}})\equiv\alpha[2\pi]$.

Evaluation générale

Exercice 1

Les points A, B, M et M' du plan complexe ont pour affixes respectives : $4+2i, -i, z$ et z' avec $z' = \frac{-iz-2+4i}{z+i}$ avec $z \neq -i$

1) Exprime les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction de celles $(x; y)$ de M.

2) Détermine et représente l'ensemble des points M tels que :

a) z' soit réel.

b) z' soit imaginaire pur.

3) On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$. Vérifie que $ZZ' = -3 + 4i$ puis calcule $|ZZ'|$.

4) a) Détermine l'ensemble des points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$.

b) Détermine r pour que M et M' soient sur le même cercle.

Exercice 2

Soit l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$f(z) = z^3 + (14 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - 14i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}$

1) Trouve les réels a et b tels que $f(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$.

2) Déduis-en l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$.

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

a) Place les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = -7 + 5i$, $z_B = -7 - 5i$ et $z_C = 1 + i$.

b) Détermine l'affixe du point N pour que $ABCN$ soit un parallélogramme.

c) Place le point D d'affixe $z_D = 1 + 11i$. Ecris sous forme algébrique et trigonométrique le nombre complexe $Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$. Justifie que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

d) Détermine la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 3

1) Détermine l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant :

a) $|\overline{z} - 2 + i| = 3$ b) $|(1+i)z - 2i| = 2$ c) $|z - 1 - i| = |\overline{z} - 2 + 3i|$

d) $|z - 3 + i| = 2|z + 1 + 5i|$ f) $|z - 1 + i| \leq 2$. e) $arg\left(\frac{1}{z+2i}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

2) Trouve l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points images des nombres complexes : 1 ; z ; $1 + z^2$ soient alignés.

3) A tout nombre complexe $z = x + iy$, $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, on associe le nombre complexe Z défini par : $Z = iz^2 - (1+i)z + 1$.

a) Détermine l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que Z soit un réel.

b) Construis (E).

Exercice 4

Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $2z - 5\overline{z} + 6 + 7i = 0$ b) $\overline{z}^2 + 2|z|^2 - 3 = 0$ c) $z^2 + 2i\overline{z} - 2i - 1 = 0$

d) $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0$ e) $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$ f) $z^4 - \sqrt{2}z^2 + 1 = 0$.

Exercice 5

Soit z et Z les nombres complexes définis par : $z = \sqrt{1+\sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2}-1}$ et $Z = z^4$.

1) Détermine les racines quatrièmes de Z sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.

2) Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et de $\sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A et B par les points d'affixes respectives 2 et 3. On fera un dessin (unité graphique 2 cm) qui sera complété selon les indications de l'énoncé.

1) a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 6 = 0$.

b) On désigne par M_1, M_2 les points d'affixes respectives : $z_1 = 2 + i\sqrt{2}$ et $z_2 = 2 - i\sqrt{2}$. Détermine la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_1-3}{z_1}$. Déduis-en la nature du triangle OBM_1.

c) Démontre sans nouveau calcul que les points O, B, M_1 et M_2 appartiennent à un même cercle $(\mathcal{C})$ que l'on précisera. Trace le cercle $(\mathcal{C})$ et place les points M_1 et M_2 sur le dessin.

2) On appelle f l'application du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = z^2 - 4z + 6$. On désigne par (Γ) le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$. Ce cercle ne sera pas tracé sur le dessin.

a) Vérifie l'égalité suivante $z' - 2 = (z-2)^2$.

b) Soit M le point de (Γ) d'affixe $z = 2 + \sqrt{2}e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi;\pi]$. Vérifie l'égalité suivante : $z' = 2 + 2e^{2i\theta}$ et déduis-en que M' est situé sur un cercle (Γ') dont on précisera le centre et le rayon. Trace (Γ') sur le dessin.

3) On appelle D d'affixe $d = 2 + \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$ et on désigne par D' l'image de D par f.

a) Ecris sous forme exponentielle le nombre complexe $d - 2$.

b) A l'aide de la question 2) b), donne une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AD'})$ et place le point D' sur le dessin.

c) Démontre que le triangle OAD' est équilatéral.

Exercice 7

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm). On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $3 + 2i$.

On appelle f l'application qui, à tout point M distinct de A et d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$

1) Calcule les affixes des points O' et B', images respectives des points O et B par f. Place les points A, O', B et B' dans le plan.

2) Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

3) a) Calcule, pour tout complexe z différent de 1, le produit $(z'-1)(z-1)$.

b) Déduis-en que, pour tout point M distinct de A, on a :

$AM \times AM' = 2$ et $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4) Démontre que, si M appartient au cercle (C) de centre A passant par O, alors M' appartient à un cercle (C') dont on précisera le centre et le rayon. Construis (C) et (C').

5) a) Détermine la mesure de l'angle $\left(\vec{u}; \overrightarrow{AB}\right)$.

b) Démontre que, si M est un point autre que A de la demi-droite (d) d'origine A, passant par B, alors M' appartient à une demi-droite que l'on précisera.

6) On appelle P le point d'intersection du cercle (C) et la demi-droite (d). Place son image P' sur la figure.

Exercice 8

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'équation d'inconnue z, (F): $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$.

1) Montre que l'équation (F) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (F).

3) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 4+i$, $z_B = 4-i$ et $z_C = -i$.

a) Place les points A, B et C.

b) Soit D d'affixe $z_D = 2$; on appelle E le point tel que le triangle DAE soit rectangle et isocèle direct en D ; calcule l'affixe de E.

c) Démontre que les points B, A, E *et* C appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$ de centre D et de rayon r que l'on précisera.

d) Place le point E et construis le cercle $(\mathcal{C})$.

Exercice 9

1) Détermine les racines cinquièmes de $Z = \frac{9\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$

2) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation, $z^6 = 4\sqrt{2}(-1+i)$

3) Détermine les racines cubiques de $Z = 4\sqrt{2}(1+i)$

4) Détermine les racines sixièmes de $Z = 32(\sqrt{3}+i)$

Exercice 10

1) Détermine sous forme algébrique les racines sixièmes de l'unité

2) Calcule $(1+i)^6$

3) En utilisant les questions 1) et 2), donne la forme algébrique des solutions de l'équation $(E) : z \in \mathbb{C}, 8z^6 + i = 0$

4) Détermine la forme trigonométrique des solutions de (E)

Exercice 11

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$,on considère le polynôme

$f(z) = z^4 - 8z^3 + 41z^2 - 74z + 100$

1) Soit z_0 un nombre complexe. Montre que $f(\overline{z_0}) = \overline{f(z_0)}$

2) Déduis que $f(z_0) = 0$ alors $\overline{f(z_0)} = 0$

3) Calcule $f(3+4i)$. Que conclure ?

4) Déduis-en la résolution de l'équation $f(z) = 0$

4-Soit A, B , Cet D les points images respectives des solutions z_A, z_B, z_C et z_D de l'équation

$f(z)=0$ tel que $\mathcal{R}e(z_A)>2$ et $Im(z_A)>2$; $\mathcal{R}e(z_B)>2$ et $Im(z_B)<0$; $\mathcal{R}e(z_C)<2$ et $Im(z_C)>0$ et z_D la quatrième solution.

a) Place ces points dans le plan complexe.

b) Soit I le point d'affixe $z_I=3+i\sqrt{3}$. Calcule $\frac{z_A-z_I}{z_C-z_I}$. En déduis la nature du triangle ACI.

c) Détermine la nature, le périmètre et l'aire du quadrilatère ACDB.

d) Montre que les points ABCD sont sur le même cercle dont on précisera les coordonnées de son centre et son rayon.

Exercice 12

A)1-Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1-i)z-3i\bar{z}=1+4i$.

2-Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z\in\mathbb{C}$,

$z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.

3-Linéarise $\cos^3 x\times\sin^3 x$

Exercice :13

1) Ecris sous forme algébrique $z=7-i+\frac{5}{(1-7i)(i-1)}$.

2) Ecris sous forme trigonométrique le nombre complexe t dans chacun des cas suivants :

a) $t=\frac{(1+i)^4}{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}$;b) $t=-2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ c) $t=\frac{1+e^{i\frac{2\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

3-a) Déterminer les racines sixièmes de l'unité sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique

b) calcule $(1-i)^6$

c) Déduis-en les racines sixièmes du complexe $t=8i$ sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique

Exercice 14

A) Soit α un nombre réel appartenant à $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.On considère l'équation d'inconnue z complexe (E): $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha)=(1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$

1) Soit z une solution de (E)

a) Montre que $|1+iz|=|1-iz|$

b) Déduis-en que z est réel

2-a) Exprimer $z=\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$

b) Soit z un nombre réel ,on pose $z=\tan\varphi$ ou $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

écris l'équation portant sur φtraduisant (E) et le résoudre

c)Détermine les solutions z_1,z_2,z_3de (E)

B-linéarise $\cos^3(5x)\times\sin^4(3x)$

Exercice 15

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé ,on considère le polynôme complexe $f(z)=z^3-(5+8i)z^2-(13-32i)z+57-24i$

1) Montre que l'équation $f(z)=0$admet une solution réelle α

2) Détermine les complexes P et Q tels que $f(z)=(z-\alpha)(z^2+Pz+Q)$

3) Déduis-en la résolution de l'équation $f(z)=0$ (on noteraz$_A$ la solution réelle ; $z_B$la solution non imaginaire dont la partie réelle est positive et $z_C$la troisième solution.

4) Soit A,B ,C les points images respectives des solutions $z_A; z_B; z_C$ de l'équation $f(z) = 0$. Placer ces points dans le plan complexe. En déduire la nature du triangle ABC.

5) Détermine les coordonnées du point I d'affixe $z = x + iy$ tel que :

$|z - z_A| = |z - z_B| = |z - z_C|$

6) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points $M(x; y)$ du plan tel que :

$MA^2 + MB^2 = 32$,

7) Soit D le point d'affixe$z_D = -1 - 3i$

a) Détermine la nature du polygone ABCD

b) Calcule le périmètre et l'aire du polygone ABCD.

Exercice 16

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}; \vec{v})$.

Pour tout $\in \alpha]-\pi; \pi[$, on pose $P(z) = z^3 + 2(1 - 2\cos 2\alpha)z^2 + 4(1 - 2\cos 2\alpha)z + 8$

1) Calcule $P(-2)$.

2) Détermine les réels a ; b et c tels que $P(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c)$.

3) Pour $a = 1$; $b = -4\cos 2\alpha$ et $c = 4$; résous $P(z) = 0$.

4) Calcule le module et un argument de chacune des solutions de l'équation $P(z) = 0$.

5) Soient A, B et C les points images dans le plan complexe des solutions de l'équation $P(z) = 0$ Pour quelles valeurs de α le triangle ABC est-il rectangle en A ?

Exercice 17

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique $4cm$. On considère le point A d'affixe 1 et le point B d'affixe $-i$. A tout point M d'affixe z, distinct de A et de B, on associe le nombre complexe $Z = \frac{iz-1}{z-1}$.

1) a) On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$, avec x, y, X *et* Y des réels. Exprime X et Y en fonction de x et de y.

b) Détermine et représente dans P l'ensemble D des points M de P tels que Z soit imaginaire pur.

2) a) Interprète géométriquement l'argument du nombre complexe $w = \frac{z+i}{z-1}$.

b) Exprime Z à l'aide de w.

c) Soit E l'ensemble des points M de P tels que Z soit réel strictement positif. Vérifie que O est un point de E.

d) Détermine et représenter dans P l'ensemble E.

Exercice 18

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par :

$f(z) = z^3 - 3z^2 + (3 - i)z - 2(1 - i)$. On notera (E) l'équation : $f(z) = 0$.

1) Dans le cas où $z = x$ $(x \in \mathbb{R})$; détermine en fonction de x, la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$.

2) L'équation admet-elle une racine réelle ?

3) Démontrer qu'il existe trois nombres complexes a, b et c, que l'on déterminera, tels que : $f(z) = (z - 2)(az^2 + bz + c)$.

4) Détermine dans $\mathbb{C}$, toutes les solutions de l'équation (E).

Exercice 19

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique $2cm$).

A et B sont les points d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$. f est l'application qui à tout point $M \neq B$ d'affixe z on associe le point M' d'affixe z': $z' = \frac{z-1}{z+1}$

1) Détermine les points invariants de f.

2) a) Montre que pour $z \neq 1$, on a : $(z' - 1)(z + 1) = -2$.

b) Déduis-en une relation entre $|z' - 1|$ et $|z + 1|$ puis entre $\arg(z' - 1)$ et $\arg(z + 1)$. Traduis ces deux relations en termes de distances et d'angles.

3) Montre que si M appartient au cercle C de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle C' de centre A et de rayon 1.

4) Soit P le point d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.

a) Montre que P appartient au cercle C.

b) Détermine la forme exponentielle de $p + 1$.

c) Soit Q le point d'affixe $q = -\bar{p}$. Quelle est la nature du triangle APQ ?

Exercice 20

A) $\mathbb{C}$ représente le corps des nombres complexes ; θ est un nombre réel donné.

1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation à l'inconnue z : $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$ (E).

2) Déduis-en la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation à l'inconnue z :

$z^4 - 2z^2\cos\theta + 1 = 0$ (E') (les racines sont donnés sous forme trigonométrique)

Exercice 21 :

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$; $a \in \mathbb{R}$ (E'')

1) Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$, a-t-on $|1 + iz| = |1 - iz|$?

2) Montre, sans les calculer, que les solutions sont réelles. Trouve alors les solutions.

Exercice 22

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2i$, par B le point d'affixe $z_B = -2 + 2i$ et par $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2cm

1.Détermine z_Ω l'affixe du centre Ω du cercle $(\mathcal{C})$ et calcule son rayon.

2.Soit D le point d'affixe $z_D = \frac{3 + 9i}{4 + 2i}$

Ecris z_D sous forme algébrique et montre que D appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

3.Soit E le point du cercle $(\mathcal{C})$ tel que $(\overrightarrow{\Omega I}; \overrightarrow{\Omega E}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

a) Détermine le module et un argument de $z_E + \frac{1}{2}$

b) Déduis-en l'affixe z_E de E.

4. Soit f l'application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M'd'affixe z' tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

a) Détermine la nature de f et ses éléments caractéristiques.

b) Soit K le point d'affixe $z_K = 2$
Détermine par le calcul l'image K' de K par f.

Exercice 23

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :
(E_n): $(iz)^n = (z + 2i)^n$ Où n est un entier supérieur ou égal 2.
1.a) Pour $n = 2$, Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2).
Ecris sous forme trigonométrique les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_2), où z_1 est la solution telle que $\mathrm{Re}(z_1) < 0$
b) On pose $u = \frac{\sqrt{2}}{2} z_1$. Montre que $\forall\, p \in \mathbb{N}, (u)^p + (\bar{u})^p = 2\cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$ (où $\bar{u}$ est le conjugué de u). (0,5pt)
c) On considère l'application f définie dans l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p z^p \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$$

Montre que $f(z) = \frac{1}{2}[(1 + uz)^n + (1 + \bar{u}z)^n]$
d. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$
2.On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, les deux points A d'affixe $-2i$ et M d'affixe z.
a) Montre que si z est solution de (E_n) alors $OM = AM$.
b) Déduis-en que toute solution de (E_n) peut s'écrire sous la forme $a - i$ où a est un réel.
3.a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_n).
b) Montre que les solutions de (E_n) peuvent s'écrire sous la forme :
$z_k = -i + cotan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{n}\right)$ $avec$ $k \in \{0, 1, 2, \ldots . n - 1\}$

Exercice 24

A/ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct ($(O; \vec{u}; \vec{v})$,soit F la transformation du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M'd'affixe z' définie par : $z' = (1 + i)\bar{z} + i$
Donne la nature et les éléments caractéristiques de la transformation F.
B/I/ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct ($(O; \vec{u}; \vec{v})$ (l'unité graphique 1cm). On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation
(E) : $z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$.
1.Montre que $-i$ est une solution de l'équation (E).
2.Détermine les réels a, b et c tels que :
$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(z^2 + az + b)$
3.Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
II/ On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 4 + i$, $z_B = 4 - i$ et $z_A = -i$
1.Place les points A, B et C sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2.Le point Ω est le point d'affixe $z_\Omega = 2$. On appelle D l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
Calcule l'affixe z_D de D.
3.Démontre que les points B, A, D, C appartiennent à un même cercle (C_1) de centre Ω dont on déterminera le rayon. Trace (C_1).

4.A tout point M d'affixe $z \neq 2$ on associe le point M'd'affixe $z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$

a) Détermine les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B, C.

b) Vérifie que A', B', C' appartiennent à un même cercle (C_2) de centre p d'affixe i.

Détermine son rayon et trace (C_2).

c) Démontre que pour tout nombre complexe $z \neq 2$, $|z' - i| = \frac{10}{|z-2|}$

d)Démontre que lorsque M décrit le cercle (C_1) alors M'décrit le cercle (C_3) de centre p et de rayon que l'on déterminera. Trace (C_3).

Exercice24 :

θ est un réel quelconque, on considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$E(\theta): z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0.$

1) Résous dans $\mathbb{C}$, les équations $E(\frac{\pi}{2})$ et $E(\frac{\pi}{6})$ en donnant à θ respectivement les valeurs $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{6}$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$, on donne les points A, B, C, D d'affixes respectives : $Z_A = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $Z_B = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $Z_C = \overline{Z_B}$, $Z_D = \overline{Z_A}$.

a) Détermine les formes algébriques des affixes des points puis placer les points dans le repère.

b) Détermine la nature du quadrilatère ABCD et celle du triangle ABD.

c)Déduis-en que ces points appartiennent à un cercle $\mathcal{T}$ dont on donnera une équation.

3) a) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $E(\theta)$.

b) Démontre que les points qui ont pour affixes les solutions de $E(\theta)$ sont les points de $\mathcal{T}$.

Exercice 25

1-Résous dans C l'équation : $z^7 = \frac{(-\sqrt{3}+i)^5}{(i+1)^8}$.

2-Ecris sous forme exponentielle puis sous forme algébrique le nombre complexe $t = (\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{2025}$

3-Détermine les racines quatrièmes de $-8 + 8\sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique

4- Détermine les racines carrées du complexe $-8 + 6i$

5-Détermine l'entier relatif n pour que : $(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^n$ soit un réel.

Exercice 26

1-Soit α un nombre réel avec $\alpha \in]-\pi; \pi[$ .On considère l'équation d'inconnue z complexe $(E): z^2 - 2(1 + i\sin\alpha)z + 2i\sin\alpha = 0$

Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

b) Mets sous forme trigonométrique les solutions de (E)

2-Soit z un nombre complexe tel que $\arg(-1 - \sqrt{3}i) + \arg z = \frac{-7\pi}{15}$.

Détermine $\arg(-z)$; $\arg(\bar{z})$ et $\arg(-\bar{z})$

3-Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^9 = 256(-1 + \sqrt{3}i)$

4- Mettre sous forme exponentielle $z = \cos(\frac{11\pi}{74}) - i(i\cos(\frac{3\pi}{11}) - \sin(\frac{3\pi}{11}) - \sin(\frac{11\pi}{74}))$

5-Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation ; $2|z| + (1 - 7i)\bar{z} = 63 + 51i$

6- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation ; $(z - i)^7 = (z + i)^7$

Exercice 27

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$,

On considère l'équation (E): $z^3+(5i-2\sqrt{3})z^2+(4-10\sqrt{3}i)z+20i=0$

1- Montre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera

2- Déduis-en une résolution de l'équation (E)

3- Soit A, B et C les points images respectives des solutions $z_A; z_B et z_C$ de l'équation (E) tel que z_A est la solution non imaginaire pure ayant partie imaginaire positive, z_B la solution imaginaire pure et z_C la troisième solution

a) Place ces points dans le plan complexe.

b) Soit I le point d'affixe $z_I=-i$. Calcule $\frac{z_B-z_I}{z_C-z_I}$. Déduis-en la nature du triangle BCI.

c) Détermine l'affixe de D pour que ADBC soit un parallélogramme.

d) Détermine le périmètre du quadrilatère ADBC puis l'aire du triangle BCI.

e) Montre que les points B, C et I sont sur le même cercle dont on précisera les coordonnées de son centre et son rayon.

f) Soit le complexe T défini par $T=\frac{1}{2}(z_A-z_C)$. Détermine les racines quatrièmes de T sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

4- On pose $Z=\frac{-iz}{z+2-5i}$, $Z=X+iY$ et $z=x+iy$ avec $X;Y;x$ et y des nombres réels

a) Exprime X et Y en fonction de x et y

b) Détermine les ensembles (E) des points $M(z)$ vérifiant :

$b_1)\ |Z|=1$ $\quad b_2)\ \arg(Z)=\frac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$ $\quad b_3)\ \arg(Z)=2k\pi; k\in\mathbb{Z}$

$b_4)\ |Z|=\frac{3}{2}$ $\quad b_5)$ Z est un réel $\quad b_6)$ Z est un imaginaire pur

$b_7)$ Z est un réel négatif $\quad b_8)$ Z est un réel positif $\quad b_9)\ \arg(Z)=\frac{\pi}{2}+2k\pi; k\in\mathbb{Z}$

Exercice 28

1- Détermine le module et un argument des nombres complexes suivants :

$Z_1=\cos\frac{2\pi}{3}e^{i\theta}\ ;\ \theta\in\mathbb{R}$; $\quad Z_2=\frac{(-1+i\sqrt{3})(\cos\theta+i\sin\theta)}{\cos\theta+i\sin\theta+i(\cos\theta-i\sin\theta)}\ ;\ \theta\in\mathbb{R}$

2- Ecris sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants :

$Z_1=(1-e^{i\theta})(1+e^{i\theta})\ ;\ \theta\in]0;\pi[$; $\quad Z_2=\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}-1}{2-2e^{-\frac{i\pi}{4}}}$

Exercice 29

Le plan complexe est muni d'un repère est orthonormé d'unité graphique $1cm$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(F): z^4-2z^3(1+\sqrt{3})+2z^2(3+2\sqrt{3})-4z(2+\sqrt{3})+8=0.$

1- Démontre que si le complexe z_0 est une solution de l'équation (F) alors il en est de même pour son conjugué $\overline{z_0}$.

2- Vérifie que le complexe $z_0=1+i$ est une solution de l'équation (F). Déduis-en une seconde solution de (F).

3- Détermine les deux autres solutions de z_1 et z_2 de l'équation (F).

4- Représente dans le plan complexe les points images des solutions de l'équation (F).

5- Détermine la nature du quadrilatère ainsi obtenu puis calcule en cm^2 l'aire de sa surface.

Exercice 30

Dans cet exercice z désigne le nombre complexe $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$.

1- Vérifie que $z^5 - 1 = 0$. Déduis-en la relation : $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.

2- a) Exprime $z; z^2; z^3; z^4$ sous forme trigonométrique.

b) Démontre les égalités : $z + z^4 = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $z^2 + z^3 = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.

3- Utilise les relations des questions 1-) et 2-) pour trouver une relation entre $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

Puis montre que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est une solution de l'équation $4x^2 + 2x + 1 = 0$, déduis-en la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Exercice 31

Soit A et B les points d'affixes respectives i et $2i$. A tout point M d'affixes z distinct de i et $2i$ on associe le nombre complexe Z tel que $Z = \frac{iz+1}{z-2i}$.

1- Détermine l'ensemble (E) des points M d'affixes z tels que $|Z| = 1$.

2- Détermine l'ensemble (F) des points M d'affixes z tels que $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

3- Détermine l'ensemble (G) des points M d'affixes z tels que $\arg(Z) \equiv \pi[\pi]$.

Exercice 32

1- a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2e^{\theta}\sin\theta\, z + e^{2\theta} = 0, \theta \in [\theta; 2\pi]$

b) Détermine le module et un argument de chacune des solutions

2- Linéarise $A = \cos\frac{2}{3}x\sin^2\frac{2}{3}x$ et $B = \cos^2(\frac{7}{4}x)\sin^5(3x)$

Exercice 33

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1) **Proposition 1 :** Pour tout entier naturel n : $(1+i)^{4n} = (-4)^n$.

2) **Proposition 2 :** Un argument de $\frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{i\frac{\pi}{3}}$ est $-\frac{\pi}{12}$.

3) **Proposition 3 :** Pour tout nombre réel α : $1 + e^{2i\alpha} = 2e^{i\alpha}\cos\alpha$.

4) Soit J le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

Proposition 4 : $1 + J + J^2 = 0$.

5) Soit l'équation (E) : $(z-4)(z^2 - 4z + 8) = 0$, z désigne un nombre complexe.

Proposition 5 : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

6) Soit A le point d'affixe $z_A = \frac{1}{2}(1+i)$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Proposition 6 : Si $n - 1$ est divisible par 4 alors les points O, A et M_n sont alignés.

7) **Proposition 7 :** Le conjugué de $1 - e^{i\theta}$ est $1 - e^{-i\theta}$.

8) Soit M le point d'affixe $z = -1 + e^{i\theta}, \theta \in [0; 2\pi]$.

Proposition 8 : Lorsque θ varie dans $[0; 2\pi]$, M varie sur un cercle de centre $B(-1; 0)$ et de rayon 1.

9) **Proposition 9 :** $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$ **NB :** $z \neq 1, 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$.

10) **Proposition 10 :** $\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} = e^{2i\theta}$ $\left(\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$.

Exercice 34

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation (E) d'inconnue z : $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$ où θ est un paramètre réel appartient à $[0; 2\pi[$.

1) a) Résous l'équation (E) et on pose z_1 et z_2 ces deux solutions.

b) Discute suivant les valeurs du paramètre θ, le module et un argument de z_1 et z_2.

2) On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et soient M_1 et M_2 les deux points d'affixes respectives z_1 et z_2.

a) Montre que lorsque θ décrit $[0; 2\pi[$ alors les points M_1 et M_2 décrivent un cercle (Γ) de centre $A(1; 0)$ dont on déterminera le rayon, et que la droite (M_1M_2) passe par un point fixe que l'on déterminer.

b) Représente M_1 et M_2 sur (Γ), dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 35

A tout nombre complexe $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, on associe le nombre complexe Z défini par : $Z = iz^2 - (1 + i)z + 1$. Détermine l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que Z soit réel. Construis (Γ) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 36

z étant un nombre complexe, on considère l'équation (F) : $z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$.

1) Vérifie que $U = \sqrt{2} + i$ est une solution de (F).

2) Détermine sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité. Déduis-en dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de (F) sous forme algébrique.

Exercice 37

1. Pour chaque question, on propose 3 affirmations. Pour chacune d'elles, indique si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

   Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal.