

EXERCICE 1 : a) Calculer les limites des fonctions suivantes en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$ (si cela est possible !) :

$$x \rightarrow \sin x ; \quad x \rightarrow \frac{3x^2-1}{x} ; \quad x \rightarrow x + \frac{1}{x^2} ; \quad x \rightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{x}} ; \quad x \rightarrow \frac{2x-1}{x} ;$$

$$x \rightarrow \frac{2x-1}{x} \sin x ; \quad x \rightarrow \sqrt{x^2+1}-x ; \quad x \rightarrow \sqrt{x^2+x+1}+x+2 ; \quad x \rightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} .$$

b) Calculer la limite de $x \rightarrow \frac{\sqrt{x^2-1}+3}{x}$ en $+\infty$; Calculer la limite de $x \rightarrow \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ en 3 .

EXERCICE 2 : a) Après avoir déterminé leur ensemble de définition, déterminer les asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{5x^2-2x+1}{2x+3} ; \quad g(x) = \frac{2x+5}{x-3} ; \quad h(x) = \frac{x^3+4x-1}{x^2+1} ; \quad j(x) = 3x-1 + \frac{2x+1}{x^2+3} .$$

b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$; montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f . Y a-t-il une autre asymptote ?

c) On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$; déterminer son ensemble de définition et déterminer les limites de cette fonction aux bornes de cet ensemble. Montrer que les droites d'équation $y = x - 2$ et $y = -x + 2$ sont asymptotes à la courbe représentative de la fonction f .

EXERCICE 3 : En utilisant les théorèmes de comparaison sur les limites de fonctions, calculer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$:

$$f(x) = \cos x - 3x ; \quad g(x) = \frac{\sin x}{x} ; \quad h(x) = x \sin \frac{1}{x} ; \quad j(x) = \frac{x}{2 \sin x + 3x} .$$

Etudier la limite en 0 des fonctions g, h, j et de la fonction k définie par $k(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$.

EXERCICE 4 : Etudier la continuité des fonctions suivantes en la valeur a indiquée :

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1, \text{ en } a = 0 ; \quad g(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 1, \text{ en } a = 0 ;$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } h(0) = 1, \text{ en } a = 0 .$$

EXERCICE 5 : Résolution d'équations :

a) On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles l'équation $f(x) = m$ a une unique solution ?

b) Résoudre l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ (montrer l'existence de solutions et donner des valeurs exactes ou approchées des solutions).

c) Résoudre l'équation $\cos x = x$ (montrer l'existence de solutions et donner des valeurs exactes ou approchées des solutions).

d) Résoudre l'équation $|x^3 - 12x| = 1$ (montrer l'existence de solutions et donner des valeurs exactes ou approchées des solutions).

EXERCICE 6 : Dans un repère orthonormal, on considère le cercle (C) d'équation $x^2+y^2=1$ et le point I de coordonnées (1;0). M et N sont deux points du cercle (C) tels que (MN) et (OI) soient perpendiculaires et H est le point d'intersection des droites (OI) et (MN). On pose $OH=x$.

1. Calculer l'aire du triangle MNI en fonction de x .

2. f est la fonction définie sur $[-1;+1]$ par : $f(x) = (1-x) \sqrt{1-x^2}$.

a) Trouver les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

- b) Etudier la dérivabilité de la fonction en -1 et +1.
En déduire une équation des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses -1 et +1.
- c) Etudier le sens de variation de la fonction f et donner son tableau de variation.
- d) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité graphique: 10 cm).
3. Pour quelle valeur de x l'aire du triangle MNI est-elle maximale? Quelle est cette aire?
4. Déterminer à 0,01 près, pour quelle valeur de x , autre que zéro, l'aire du triangle MNI est égale à 1.

EXERCICE 7 : Soit f la fonction définie sur $]1; +1[$ par $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ et (C) sa courbe représentative.

1. Déterminer les nombres réels a , b et c tels que, pour tout x de $]1; +1[$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.

Dans la suite du problème, vous pourrez utiliser, suivant les questions, la forme initiale de $f(x)$ ou la forme établie dans cette première question.

2. a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
- b) Déterminer les limites de f en 1 et +1.
- c) Etablir le tableau de variations de f .
3. a) Donner une équation de l'asymptote verticale à (C).
- b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$, est asymptote oblique à (C).

EXERCICE 8 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$.

1. Vérifier que f est définie sur $]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$.
2. Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie pour la courbe (C) représentative de f .
3. a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- c) La fonction f est-elle dérivable en 0 et en -2 ?
4. Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C) en +1.

EXERCICE 9 : Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 12x + 27}{x^2 - 4x + 5}$.

1. Déterminer f' et étudier son signe.
2. Etudier les limites de f en +1 et en -1. Montrer que la courbe (C) représentative de f admet une asymptote dont vous préciserez l'équation.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f .
4. Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.
5. Préciser la position de la courbe (C) par rapport à l'asymptote.
6. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, construire la courbe (C), la tangente et l'asymptote.

EXERCICE 10 : On considère la fonction $f : f(x) = \frac{ax + 1}{x^2 - 4x + 3}$ définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1; 3\}$.

1. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles la fonction:
 - a) n'admet ni maximum, ni minimum ?
 - b) admet un maximum M et un minimum m (démontrer alors que $M \cdot m > 0$)
 - c) admet seulement un minimum ?
2. Représenter, sur une même figure, les courbes correspondant à a égal à 2, 0 et 4.

EXERCICE 11 : On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{x^2 + 1}$.

- 1) Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = x + 1 + 2 \frac{x+1}{x^2 + 1}$.

- 2) Calculer la dérivée f' de la fonction f . Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme $f'(x) = \frac{(x-1)^2 (x^2 + ax + b)}{(x^2 + 1)^2}$

avec a et b que l'on déterminera. En déduire son signe.

- 3) Calculer les limites de la fonction f en +1 et en -1.
- 4) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 5) Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C) représentative de f .
- 6) Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.
Donner une interprétation géométrique.
- 7) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse -1.
Préciser la position de (T) par rapport à (C).

EXERCICE 12 : Une ficelle de longueur l est coupée en deux morceaux; avec l'un d'eux, on forme un cercle, et avec l'autre un carré. A quel endroit doit-on couper la ficelle pour que la somme des aires des domaines obtenus soit maximale ?

EXERCICE 13 : On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 4x + 5}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$ pour tout $x \neq 1$.
2. a) Montrer que la dérivée de la fonction f peut s'écrire sous la forme $f'(x) = \frac{2(x-2)(x^2 + dx + e)}{(x-1)^3}$,
pour des réels d et e que l'on déterminera et étudier son signe.
b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
c) Montrer que la courbe représentative (C) de f admet une asymptote oblique (D) dont on donnera une équation. Préciser la position de (C) par rapport à (D).
d) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
b) Déterminer l'abscisse du point de (C) où la tangente a pour coefficient directeur $9/4$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α . Montrer que $\alpha \in]-2; -1[$.
5. Tracer la courbe (C), les asymptotes et la tangente (T).
6. Déterminer une primitive de f sur $]1; +\infty[$.

EXERCICE 14 : On fabrique un cornet en papier de forme conique en rejoignant les bords droits d'un disque de rayon a amputé d'un secteur circulaire. Quelle est le volume du plus grand cornet possible ?

EXERCICE 15 : D'une longue feuille de zinc de 30 cm de large, on veut faire une gouttière en pliant les bords à 120° . A quel endroit faut-il plier pour que la capacité de la gouttière soit maximale ?

EXERCICE 16 : Dans le plan P, ABCD est un rectangle ; une droite variable (d) passant par C est sécante à la droite (AB) en M et à la droite (AD) en N. On désigne par I le milieu du segment [MN]. En se plaçant dans le repère orthogonal (A, $\vec{AB}$, $\vec{AD}$), déterminer le lieu géométrique du point I.

EXERCICE 17 : On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 1,5$ et $u_{n+1} = u_n - f(u_n) / f'(u_n)$. Vérifier que la suite (u_n) converge et donner une approximation à 0,000001 près de sa limite.

Vérifier que cette limite est solution de l'équation $f(x) = 0$.