

PREMIERS EXERCICES:

1. Calculs dans $\mathbb{C}$: Ecrire les nombres complexes suivant sous la forme $a + ib$ où a et b sont des réels :

$$z_1 = i^3 ; \quad z_2 = i^4 ; \quad z_3 = (3 + 2i)(5 + 4i) ; \quad z_4 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) ; \quad z_5 = (1 + i)^3 ;$$

$$z_6 = \frac{1-i}{1+i} ; \quad z_7 = \frac{1+2i}{3-i} ; \quad z_8 = z_5 \times z_6 ; \quad z_9 = \frac{z_3}{z_5} ; \quad z_{10} = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 .$$

2. Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$: Résoudre les équations suivantes dans l'ensemble des nombres complexes :

a) $z^2 - z + 1 = 0$; b) $2z^2 + 3z + 2 = 0$; c) $z^3 - 1 = 0$; d) $(z^2 - 2z)^2 - 4 = 0$;
 e) $z^4 + z^2 - 6 = 0$; f) $z^4 = 1$; g) $z^6 = 1$; h) $z^3 + 1 = 0$.

3. Module et argument : Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; \quad z_2 = 1 + i ; \quad z_3 = i ; \quad z_4 = -1 + i ; \quad z_5 = \sqrt{3} + i ; \quad z_6 = 3 - i\sqrt{3} ; \quad z_7 = (\sqrt{3} + i)(1 - i) ;$$

$$z_8 = z_3 \times z_2 ; \quad z_9 = (1 + i)^8 ; \quad z_{10} = z_1 \times z_5 ; \quad z_{11} = \frac{z_2}{z_4} ; \quad z_{12} = \frac{z_6}{z_5} .$$

4. Forme trigonométrique : Donner la forme trigonométrique des nombres complexes de la question 3.

5. Forme exponentielle complexe : Donner la forme exponentielle des nombres complexes de la question 3.

6. Représentation graphique : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, placer les points $M_1, M_2, \dots, M_{12}$ images des nombres complexes de la question 3.

Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants:

$$z_1 = 1 + i ; \quad z_2 = 3 + i\sqrt{3} ; \quad z_3 = \frac{1+i}{1-i} ; \quad z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} ; \quad z_5 = \left(\frac{i}{1-i}\right)^5 ; \quad z_6 = \frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{3}} ;$$

EXERCICE 1 : On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, et on considère les points A, B et C distincts situés sur le cercle de centre O et de rayon r . Les points A', B' et C' sont les images de A, B et C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Les points U, V et W sont les milieux des segments [A'B], [B'C], [C'A] ; montrer que le triangle UVW est équilatéral.

EXERCICE 2 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, et on considère l'application f du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z) = \frac{z+iz}{2}$.

- Montrer que l'ensemble (d) des points M dont l'affixe z vérifie $f(z) = z$ est une droite.
- Montrer que le nombre $\frac{f(z)-z}{1-i}$ est réel.
- En déduire que M' appartient à la droite Δ passant par M et de vecteur directeur $\vec{u} - \vec{v}$.
- Montrer que pour tout nombre complexe z , $f(f(z)) = f(z)$.
- Déduire des questions précédentes que M' est le point d'intersection des deux droites (d) et Δ .
- Caractériser géométriquement l'application f .

EXERCICE 3 : On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A le point d'affixe 1 et par C le cercle de centre A et de rayon 1.

PARTIE A : Soit F le point d'affixe 2, B le point d'affixe $z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et E le point d'affixe $z_E = 1 + z_B^2$.

Montrer que le point B appartient au cercle C.

Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\vec{AF} ; \vec{AB})$. Placer le point B.

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $z_B - z_A$ et $z_E - z_A$. En déduire que les points A, B et E sont alignés. Placer le point E.

PARTIE B : Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' où $z' = 1 + z^2$.

Pour $z \neq 0$ et $z \neq 1$, donner, à l'aide des points A, M et M' une interprétation géométrique d'un argument du

nombre complexe $\frac{z'-1}{z-1}$. En déduire que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si $\frac{z^2}{z-1}$ est un réel.

EXERCICE 4 : On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, et l'application f du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z^3 - 3z^2 + 3z$. On considère les points B et C d'affixe respectives i et $i\sqrt{3}$. Calculer les affixes des points images de O, B et C par f . Placer les points B et C et leur image B' et C'. L'application f conserve-t-elle l'alignement ?

Montrer qu'un point M d'affixe z est invariant par f si et seulement si z vérifie l'équation : $z^3 - 3z^2 + 2z = 0$. En déduire que f possède trois points invariants dont on déterminera les affixes.

Montrer pour tout z de $\mathbb{C}$ l'égalité : $z' - 1 = (z - 1)^3$.

Soit z un nombre complexe différent de 1, on note r le module de $z - 1$ et α un argument de $z - 1$. Exprimer le module r' et un argument α' de $z' - 1$ en fonction de r et de α .

Soit A le point d'affixe 1, déduire des résultats précédents une relation entre la distance AM' et la distance AM, et une relation entre une mesure de l'angle $(\vec{u}; \vec{AM}')$ et une mesure de l'angle $(\vec{u}; \vec{AM})$.

Montrer que si le point M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$, alors M' appartient au cercle Γ' de même centre dont on déterminera le rayon.

Montrer que si M appartient à la demi-droite ouverte (d) d'origine A passant par le point B, alors le point M' appartient à une demi-droite (d') que l'on déterminera.

Justifier l'appartenance du point B' à Γ' et à (d').

Compléter la figure avec les différents éléments Γ , Γ' , (d) et (d').

EXERCICE 5 : On considère le plan complexe $\mathbf{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère le point M d'affixe z , le point M₁ d'affixe $\bar{z}$, le point A d'affixe 2 et le point B d'affixe 1. Soit f l'application de

$\mathbf{P}$ privé de A dans $\mathbf{P}$, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{\bar{z} + 4}{z - 2}$.

Déterminer les points invariants par f .

Soit C le point d'affixe $2(1 + i\sqrt{3})$. Montrer que C' est le milieu du segment [OC].

Calculer pour tout $z \neq 2$, le produit $(\bar{z} - 2)(z' - 1)$.

En déduire : la valeur du produit $AM_1 \times BM'$; une expression de l'angle $(\vec{u}; \vec{BM}')$ en fonction de $(\vec{u}; \vec{AM}_1)$.

Justifier les relations : $AM \times BM' = 6$; $(\vec{u}; \vec{BM}') = (\vec{u}; \vec{AM})$.

Application : construire l'image D' du point D d'affixe $2 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

EXERCICE 6 : On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm). Soit A le point d'affixe $z_A = -i$ et B le point d'affixe $z_B = -2i$. On considère le point M₁ d'affixe $\bar{z}$, le point A d'affixe 2 et le point B d'affixe 1. Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z , M distinct de A, associe

le point M' d'affixe z' défini par $z' = \frac{iz - 2}{z + i}$.

Démontrer que, si z est imaginaire pur, $z \neq -i$, alors z' est imaginaire pur.

Déterminer les points invariants par l'application f .

Calculer $|z' - i| \times |z + i|$.

Montrer que, quand le point M décrit le cercle de centre A et de rayon 2, le point M' reste sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Développer $(z + i)^2$ puis factoriser $z^2 + 2iz - 2$.

Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que M' soit le symétrique de M par rapport à O.

Déterminer et représenter l'ensemble E des points M tels que le module de z' soit égal à 1.

(On pourra remarquer que $z' = \frac{i(z - z_B)}{z - z_A}$).

EXERCICE 7 : Soit le nombre complexe $u = 1 + i$. Ecrire u et $\bar{u}$ sous forme exponentielle.

Soit n un entier naturel. On pose $S_n = u^n + \bar{u}^n$. Donner une écriture de S_n à l'aide d'une exponentielle. En déduire

que $S_n = \lambda_n \cos(n\frac{\pi}{4})$ où λ_n est un réel à préciser en fonction de n . Pour quelles valeurs de n a-t-on $S_n = 0$?

Prouver que si n est pair, S_n est un entier relatif.

EXERCICE 8 : On considère le point A d'affixe 1 et, pour tout θ appartenant à $[0 ; 2\pi [$, le point M d'affixe $z = e^{i\theta}$. On désigne par P le point d'affixe $1 + z$ et par Q le point d'affixe z^2 .

1. A partir du point M, donner une construction géométrique de P et Q.
2. Placer les points O, A, M, P et Q sur une même figure.
3. Déterminer l'ensemble des points P pour θ appartenant à $[0 ; 2\pi [$.
4. Soit S le point d'affixe $1 + z + z^2$, z étant toujours l'affixe du point M. a) Construire S en justifiant la construction.
b) Dans le cas où S est différent de O, tracer la droite (OS). Quelle conjecture apparaît sur le point M ?
c) Démontrer que le nombre $\frac{1+z+z^2}{z}$ est réel quel que soit θ appartenant à $[0 ; 2\pi [$.
d) Conclure sur la conjecture précédente.

EXERCICE 9 : Soit A le point d'affixe i ; à tout point M d'affixe z , distinct de A, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz}{z-i}$. Déterminer l'ensemble C des points M, distincts de A, pour lesquels z' est réel.

On suppose que M appartient au cercle C' de centre A et de rayon 1. Montrer que M' appartient à C'.

EXERCICE 10 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Ecrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes respectives a et b .

2.a. Soit r la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{3}$. Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r . Ecrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.

b. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$. Calculer l'affixe b' du point B' image du point B par h . Placer B' sur la figure précédente.

3. Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle OA'B' et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'affixe du point C.

a. Justifier les égalités suivantes : $c\bar{c} = R^2$; $(c-2i)(\bar{c}+2i) = R^2$; $(c+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i)(\bar{c}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i) = R^2$.

b. En déduire que $c - \bar{c} = 2i$ puis que $c + \bar{c} = \frac{-4\sqrt{3}}{3}$.

c. En déduire l'affixe du point C et la valeur de R.

EXERCICE 11 : On donne dans le plan P muni d'un repère orthonormal, les trois points A, B, C de coordonnées : A(1;0) B(3;6) C(2-3√3 ; 3+√3).

1. Soient a, b, c les affixes respectives de A, B, C.

Exprimer sous forme algébrique le nombre complexe : $\frac{c-a}{b-a}$.

2. Interpréter géométriquement ce nombre complexe. En déduire la mesure principale en degrés de l'angle orienté (AB, AC) et la nature du triangle ABC.

3. A tout nombre complexe $z, z \neq b$, on associe le nombre complexe Z défini par $Z = \frac{z-c}{z-b}$.

Déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$.

EXERCICE 12 : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on associe à tout nombre complexe z distinct de $-i$, le nombre complexe $Z = \frac{z+2}{-i(z+i)}$.

1. Calculer le nombre complexe Z_0 obtenu pour $z = i$; déterminer le module de Z_0 .

2. Dans cette question on pourra poser $Z = U+iV$ et $z = x+iy$ où U, V, x, y sont des réels.

Soit A le point d'affixe -2 et B le point d'affixe -i.

a) Déterminer et représenter l'ensemble (C) des points M d'affixe z tel que Z soit réel.

b) Déterminer et représenter l'ensemble (D) des points M d'affixe z tel que Z soit imaginaire pur.

3. Donner une interprétation géométrique du module de Z.

Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$.

EXERCICE 13 : 1. Résoudre les équations du second degré à l'inconnue complexe x : $x^2 - 8x + 7 = 0$ de racines x_1 et x_2 ; $x^2 - 8x + 25 = 0$ de racines z_1 et z_2 .
 2. Dans le plan complexe on appelle A_1 et A_2 les points d'affixes x_1 et x_2 ; B_1 et B_2 les points d'affixes z_1 et z_2 .
 a) Placer ces quatre points. b) Montrer que le quadrilatère $A_1A_2B_1B_2$ est un carré.

EXERCICE 14 : Soit z un nombre complexe; on lui associe les nombres complexes Z et Z' définis par: $Z = z - i$ et $Z' = z - 1$.

On appelle respectivement m , M et M' les images de z , Z et Z' dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

1. Dans cette question: $z = \frac{3+i}{4}$.

a) Calculer Z et Z' .

b) Calculer les modules $|Z'| - |z|$ et $|Z'| - |Z|$.

c) Représenter les points m , M et M' . Montrer que le triangle mMM' est isocèle.

2. On pose $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du produit ZZ' .

b) Déterminer et représenter l'ensemble E des points m du plan complexe tels que ZZ' soit un nombre réel.

EXERCICE 15 : Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 1 cm). On considère la suite de points M_n du plan P d'affixes respectives non nulles z_n définies par:

$$z_0 = 8 \text{ et pour tout entier naturel } n, z_{n+1} = \frac{3+i\sqrt{3}}{4} z_n .$$

1. Calculer le module et un argument du nombre complexe $\frac{3+i\sqrt{3}}{4}$ L'écrire sous forme trigonométrique.

2. Calculer z_1, z_2, z_3 et vérifier que z_3 est imaginaire pur. Placer dans le plan P les points M_0, M_1, M_2, M_3 .

3. Pour tout entier naturel n , calculer le rapport $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$, en déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et

$$\text{que } |z_{n+1} - z_n| = \frac{\sqrt{3}}{3} |z_{n+1}| .$$

EXERCICE 16 : A. On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par

$$P(z) = z^3 + (3 - \sqrt{3})z^2 + (6 - 2\sqrt{3})z + 4 - 4\sqrt{3} .$$

1. Vérifier que $P(\sqrt{3} - 1) = 0$.

2. Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

3. Ecrire les solutions sous forme algébrique et trigonométrique.

B. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; u, v)$; on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} - 1$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$

1. Placer les trois points A, B, C .

2. Calculer les longueurs AB, AC et l'angle (BAC) et en déduire la nature du triangle ABC .

3. Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_B}$ puis $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_B}\right)$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 17 : On considère le triangle ABC rectangle isocèle en C tel que ; M est un point quelconque du plan, M_1 et M_2 sont les milieux respectifs de $[AM]$ et $[BM]$. Le but de l'exercice est de trouver l'ensemble des points M du plan tels que le triangle CM_1M_2 est équilatéral. Pour cela, on choisira un repère orthonormé à préciser.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $CM_1 = CM_2$.

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $CM_1 = M_1M_2$.

3. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que le triangle CM_1M_2 est équilatéral.

EXERCICE 18 : PARTIE A : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère un triangle MNP équilatéral et R son centre. Les points M, N, P et R ont pour affixe z_M, z_N, z_P, z_R . Déterminer z_R en fonction de z_M, z_N, z_P . Déterminer l'aire du triangle équilatéral en fonction de z_M et z_N .

PARTIE B : Le triangle ABC est un triangle équilatéral direct de côté 1. Le point D est sur le segment $[BC]$. On construit les triangles équilatéraux BDE et CDF extérieurs à ABC . Les points I, J, K sont les centres de gravité respectivement des triangles ABC, BDE et CDF . Le but de l'exercice est de montrer que le triangle IJK est équilatéral.

Pour cela, on choisira un repère orthonormé à préciser.

Dans ce repère, déterminer l'affixe des points A, B, C, E, F, I, J, K.

Montrer que $z_K - z_I = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_J - z_I)$.

En déduire que le triangle IJK est équilatéral.

Déterminer l'aire du triangle IJK en fonction de x (Ecrire l'expression le plus simplement possible).

Préciser l'aire maximale et l'aire minimale et pour quelle valeur elles sont atteintes.

EXERCICE 19 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les triangles

ABC et ADE rectangles isocèles en A et tel que $(\vec{AB}; \vec{AC}) = (\vec{AD}; \vec{AE}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Démontrer que les droites (BD) et (CE) sont perpendiculaires et que $BD = CE$ par deux méthodes :

- 1) Grâce à une méthode géométrique ;
- 2) A l'aide des nombres complexes.

EXERCICE 20 : ABC est un triangle, O le centre du cercle circonscrit, et H le point défini par

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC par deux méthodes :

- Grâce à une méthode géométrique : on pourra utiliser les points D, E et F définis par $\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{OC}$, $\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{OC}$, $\vec{OF} = \vec{OB} + \vec{OA}$.
- A l'aide des nombres complexes : soient a, b, c, h les affixes des points A, B, C, H ; montrer que $w = \bar{b}c - b\bar{c}$ est imaginaire pur ; montrer que $(b+c)(\bar{b}-\bar{c})$ et $\frac{b+c}{b-c}$ sont imaginaires purs.

Exprimer en fonction de a, b, c, h les affixes des vecteurs $\vec{AH}$ et $\vec{CB}$. Conclure.

Soit G le centre de gravité du triangle ABC, d'affixe g . Montrer que les points O, H et G sont alignés.

EXERCICE 21 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On considère la suite de points M_n du plan d'affixes respectives non nulles z_n définies par $z_0 = 8$ et pour tout entier naturel n ,

$$z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n. \text{ Ecrire } \frac{1+i\sqrt{3}}{4} \text{ sous forme exponentielle complexe.}$$

Calculer z_1, z_2, z_3 et vérifier que z_3 est réel. Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 .

Pour tout entier naturel n , calculer le rapport $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$.

En déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et que $M_nM_{n+1} = \sqrt{3} OM_{n+1}$.

On pose $r_n = |z_n|$. Montrer que la suite (r_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

Ecrire r_n en fonction de n . En déduire la longueur M_nM_{n+1} en fonction de n .

On considère la longueur L_n de la ligne brisée formée par les points $M_0, M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$.

On a alors $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$. Calculer L_n en fonction de n . Déterminer la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.