

Professeur : RACHID FANIDI

L'année Scolaire :2024-2025

Lycée AL Massira AL Khadraa Tiznit

Etude des fonctions

Série 09

1BAC SC-EXF3-4



EXERCICE 01

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ Par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1)a-Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b-Etudier les branches infinies de la courbe (C_f)

2)a-Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b-Dresser le tableau de variations de f .

3)Etudier la concavité de la courbe (C_f) puis en déduire que le point $I(2;0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f) .

4)Montrer que le point I est un centre de symétrie de la courbe (C_f) .

5)Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point I .

6)Tracer la courbe (C_f) .

7)Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m ;le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$

EXERCICE 02

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 1}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Déterminer D_f .

2)Calculer $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ puis donner une

interprétation géométrique au résultat obtenu.

3)a-Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b-Vérifier que : $(\forall x \in D_f); f(x) = x + 2 + \frac{4}{x + 1}$.

c-En déduire que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

d-Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) .

3)a-Montrer que : $(\forall x \in D_f); f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$

b-Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f .

4)Etudier la concavité de la courbe (C_f) .

5)Déterminer une équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

6)Tracer la droite (D) et la courbe (C_f) .

7)Déterminer graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation $x^2 + (3 - m)x + 6 - m = 0$.

8)On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{x^2 - 3|x| + 6}{1 - |x|}$$

a-Montrer que h est paire.

b-Montrer que : $(\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0]) : h(x) = f(x)$

c-Tracer la courbe (C_h) dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

EXERCICE 03

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x - 3}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Déterminer D_f .

2)Calculer $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ puis donner une

interprétation géométrique au résultat obtenu.

3)a-Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

d-Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) .

3)a-Montrer que : $(\forall x \in D_f); f'(x) = \frac{2x^2 - 12x + 16}{(x-3)^2}$

b-Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f .

4) Etudier la concavité de la courbe (C_f) .

5) Montrer que le point $\Omega(3;5)$ est le centre de symétrie de la courbe (C_f) .

6) Tracer la droite (D) et la courbe (C_f) .

EXERCICE 04

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 1}{x^2}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Déterminer D_f .

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

3)a-Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b-Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

c-Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) .

4)a-Montrer que : $(\forall x \in D_f); f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$

b-Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f .

5)a-Montrer que : $(\forall x \in D_f); f'(x) = \frac{6-2x}{x^4}$ (on peut

utiliser $f'(x) = \frac{x^3 + x - 2}{x^3}$)

b-Etudier la concavité de la courbe (C_f) puis déterminer les coordonnées du point d'inflexion I .

6) Construire la droite (D) et la courbe (C_f) . (on prend $f(-1) = -1; f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$).

EXERCICE 05

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x}{x^2 - 2x + 1}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Déterminer D_f .

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique aux résultats obtenus.

4)a-Montrer que : $(\forall x \in D_f); f'(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 4}{(x-1)^4}$

b-Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f .

5)a-Montrer que : $(\forall x \in D_f); f''(x) = \frac{2(2x-5)}{(x-1)^4}$.

b-Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse $\frac{5}{2}$.

6) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) et les axes du repère.

7) Tracer la courbe (C_f) .

EXERCICE 06

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Montrer que : $D_f =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$

2) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 et droite en 2 puis interpréter chaque résultat obtenu géométriquement.

3)a-Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis montrer que la droite (D)

D'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique de

La courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

b-Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite

(Δ) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique

de La courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

4)a-Montrer que pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

b-Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

5)Tracer la courbe (C_f) .

EXERCICE 07

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1)Montrer que : $D_f =]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$

2)Etudier la dérivabilité de f à gauche en -2 et droite en 0 puis interpréter chaque résultat obtenu géométriquement.

3)a-Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ puis donner interprétation géométrique au résultat obtenu.

b-Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

4)a-Montrer que pour tout $x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x+1+\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2+2x}}$$

b-En déduire que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; 2]$.

5) Tracer la droite (D) et la courbe (C_f) .

EXERCICE 08

Soit f une fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1)Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$

Puis interpréter le résultat obtenu géométriquement

2)Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$ puis

interpréter le résultat obtenu géométriquement.

3)a-Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) : f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

b-Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

c-Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) Au point d'abscisse 4.

4)On considère la droite (D) d'équation $y = x$.

Etudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite (D) sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

5)Tracer la droite (D) et la courbe (C_f) .

EXERCICE 09

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty; 3]$ par :

$$f(x) = x\sqrt{3-x}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1)Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat obtenu géométriquement.

2)Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en 3 puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

3)a-Montrer que : $(\forall x \in]-\infty; 3[) : f'(x) = \frac{3(2-x)}{2\sqrt{3-x}}$.

b-Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

c-Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse -1 .

4)a-Montrer que $(\forall x \in]-\infty; 3[) : f(x) - x = \frac{x(2-x)}{1+\sqrt{3-x}}$

b-En déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation $y = x$

5)Tracer la droite (D) et la tangente (T) et la courbe (C_f) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

6)Soit la fonction numérique h définie sur $[-3; 3]$ par : $h(x) = f(|x|)$.

a-Montrer que h est paire.

b-Tracer la courbe (C_h) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

EXERCICE 10

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1)Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat graphiquement.

2)a-Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

b-Interpréter les résultats obtenus graphiquement.

3)a-Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{x-1}{x\sqrt{x}}$

b-Dresser le tableau de variations de f .

c-Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 4 .

4)a-Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) : f''(x) = \frac{3-x}{2x^2\sqrt{x}}$.

b-Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse 3 .

5)a-Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

b-Déterminer graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de

$$\text{l'équation : } \frac{2(x+1)}{\sqrt{x}} = m + 4.$$

EXERCICE 11

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = (x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$.

1)Montrer que : $D_f =]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$.

2)Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3)a-Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b-Montrer que la droite $(\Delta) : y = x + 2$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty$.

c-Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) sur D_f .

4)Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

5)a-Montrer que pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[:$

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x-1)^2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}.$$

b-Dresser le tableau de variations de f .

6)Tracer la droite (Δ) et la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

EXERCICE 12

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{x-1}; x \geq 1 \\ f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}; x < 1 \end{cases}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1)a-Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

b-Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis

interpréter le résultat obtenu géométriquement.

2)a-Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$: $\frac{f(x)}{x-1} = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

b-Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1, puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

b-Etudier la dérivabilité de la fonction f à gauche en 1, puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

3)a-Montrer que : $(\forall x \in]1; +\infty[) : f'(x) = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$.

b-Montrer que : $(\forall x \in]-\infty; 1[) : f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$.

c-Etudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

4)a-Montrer que : $(\forall x \in]-\infty; 1[) : f''(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$

b-En étudiant le signe de $f''(x)$, montrer que (C_f) admet deux points d'inflexion d'abscisses $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$ respectivement.

5)Tracer la courbe (C_f) .

EXERCICE 13

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1; x > 0 \\ f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}; x \leq 0 \end{cases}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1)Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Que peut-on déduire ?

2)a-Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

b-Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis en déduire la nature du branchement infini au voisinage de $+\infty$.

3)a-Etudier la dérivabilité de f en 0.

b-Déterminer les équations des deux tangentes

(T_1) et (T_2) à droite et à gauche en 0.

4)a-Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 0[$.

b-Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

5)Dresser le tableau de variations de f .

6)Déterminer l'intersection de (C_f) et les axes du repère.

7)Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.

8)a-Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 0[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$.

b-Déterminer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe (C_f) .

9) Tracer la courbe (C_f) et les tangentes (T_1) et (T_2) .

EXERCICE 14

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1}, x \geq 1 \\ f(x) = x-1+2\sqrt{1-x}, x < 1 \end{cases}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1)Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1 puis donner une interprétation géométrique aux résultats obtenus.

2)a-Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

b-Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et calculer

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x$ puis interpréter

géométriquement les résultats obtenus.

3)a-Montrer que : $(\forall x \in]-\infty; 1[) : f(x) - x = \frac{3-4x}{2\sqrt{1-x+1}}$

b-En déduire la position relative de la courbe et (C_f) la droite $(\Delta) : y = x$ sur $]-\infty; 1[$

4)a-Montrer que : $(\forall x \in]1; +\infty[) : f'(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$ Et

que : $(\forall x \in]-\infty; 1[) : f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)}$

b-Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ (justifier votre réponse).

c-Tracer la courbe (C_f) (Remarquer $f(-3) = 0$).