

Exercice N°1

On considère la fonction numérique f par : $f(x) = \frac{e^{2\sqrt{\ln x}}}{x}$ Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

- 1 a Montrer que $D_f = [1; +\infty[$
- b Vérifier que pour tout $x \in [1; +\infty[: f(x) = e^{\sqrt{\ln x}(2-\sqrt{\ln x})}$
- c Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

- 2 Vérifier que pour tout $x \in]1; +\infty[:$

$$\frac{f(x) - 1}{x - 1} = \frac{e^{2\sqrt{\ln x} - \ln x} - 1}{2\sqrt{\ln x} - \ln x} \times \sqrt{\frac{\ln x}{x - 1}} \times \left(\frac{2}{\sqrt{x - 1}} - \sqrt{\frac{\ln x}{x - 1}} \right)$$

- 3 Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = +\infty$. puis donner une interprétation géométrique du résultat.

- 4 a Vérifier que pour tout $x \in]1; +\infty[: f'(x) = \frac{(1 - \sqrt{\ln x})}{x\sqrt{\ln x}} f(x)$.

- b Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

- 5 a Vérifier que pour tout $x \in [1; +\infty[: f(x) - x = x \left(e^{2\sqrt{\ln x}(1-\sqrt{\ln x})} - 1 \right)$

- b Déterminer la position relative de la courbe (C_f) et de la droite (Δ) d'équation $y = x$.

- 6 Tracer la courbe (C_f) et la droite (Δ) .

- 7 La fonction F définie sur l'intervalle : $F(x) = \frac{1}{2} (2\sqrt{\ln x} - 1) e^{2\sqrt{\ln x}}$.

- a Vérifier que la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle $[1; +\infty[$

- b Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations cartésiennes : $x = 1$ et $x = e$.

- 8 Calculer V le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[1; e]$ autour de l'axe des abscisses un tour complet.

- 9 On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = \sqrt{e}$, $U_{n+1} = f(U_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- a Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : 1 \leq U_n \leq e$.

- b Étudier le sens de variation de la suite (U_n) et en déduire sa convergence.

- c Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$.