

EXERCICE 1 :

1) Etudier la continuité de f au point x_0 dans les cas suivants :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1} ; x \neq 1 \\ f(1) = \frac{3}{4} \end{cases} \quad x_0 = 1 ; \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x\sqrt{x+2}-4}{x-2} ; x \neq 2 \\ f(2) = \frac{5}{2} \end{cases} \quad x_0 = 2$$

2) Etudier la continuité de f sur I dans les cas suivants :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{x^2-2x} ; x \geq 4 \\ f(4) = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad I = [4; +\infty[; \quad \begin{cases} f(x) = x^2-4x+5 ; x < 3 \\ f(x) = \sqrt[3]{5x-7} ; x \geq 3 \end{cases} \quad I = \mathbb{R}$$

EXERCICE 2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{ax^2+bx-1}{x^2-1} ; x \geq 2$
 $f(x) = 3x+c ; x < 2$

Déterminer les réels $a ; b$ et c pour que les conditions suivantes soit vérifiées :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- f continue en 2.

EXERCICE 3:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

1) Dresser le tableau de variations de f .

2) Déterminer :

$$f([1;3]) ; f([1;+\infty[) ; f(\mathbb{R}^-) ; f(]-\infty;1])$$

EXERCICE 4:

Dans chacun cas suivants, montrer que la fonction f est continue sur son ensemble de définition :

$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \sqrt{x-2}$	$f(x) = x^3 + 2x + \cos(x)$
$f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$	$f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2-3x+2}$
$f(x) = \sin(\sqrt{x-2})$	$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

EXERCICE 5 :

On considère la fonction g définie par : $g(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3$.

1) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique

$$\alpha \text{ sur l'intervalle } \left] \frac{5}{2}; 3 \right[.$$

2) Vérifier que : $\alpha = \sqrt{\frac{3}{2\alpha-5}}$.

EXERCICE 6 :

A. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que : $f(1) = \sqrt{2}$

Montrer que : $\exists c \in]0,1[, \sqrt[3]{c} f(c) = 1$.

B. Soit g continue sur $[0,1]$ telle que : $g([0;1]) \subset [0;1]$

Montrer que : $\exists \alpha \in]0,1[, g(\alpha) + g(\alpha-1) = 2\alpha$

C. Soit h continue sur $[a,b]$ telle que : $h(a) < ab$ et $b^2 < h(b)$

Montrer que : $\exists \beta \in]a,b[, h(\beta) = \beta b$

EXERCICE 7 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + x + 1$.

1)-a)- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

b)- Vérifier que : $-1 < \alpha < 0$

c)- Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,25

2) Montrer que : $1 + \alpha^2 = \frac{-1}{\alpha}$ et $\alpha + \sqrt[3]{1 - \sqrt[3]{1 - \sqrt[3]{1 + \alpha}}} = 0$.

3) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x - \alpha) \left(x^2 + \alpha x - \frac{1}{\alpha} \right)$.

4) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $x^4 + x^2 + x + 1 \geq 1$

6) Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = x^2 & ; x \geq \alpha \\ g(x) = -1 - \frac{1}{x} & ; x < \alpha \end{cases}$.

Étudier la continuité de g en α .

EXERCICE 8 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{x} - 2\sqrt{x+1}$.

1) Déterminer D_f , puis calculer les limites de f aux bornes de D_f

2) Étudier la continuité et la monotonie de f sur $]0, +\infty[$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]0, +\infty[$, et que : $\frac{1}{4} < \alpha < 1$.

4) Vérifier que : $\alpha^3 + \alpha^2 = \frac{1}{4}$.

EXERCICE 9 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - x$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+x-1}}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x-5}-1}{x-2}$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 2}{x-1}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}-1}$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{1+x-x^3} - \frac{1}{2}x + 7$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - 2\sqrt{x+1}$	

EXERCICE 10:

1) Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :

$$a = \sqrt{2} ; b = \sqrt[3]{4} ; c = 5^{\frac{1}{6}} ; d = \sqrt[4]{3}.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivante :

$$\sqrt[3]{3+x} - \sqrt[3]{3-x} = \sqrt[6]{9-x^2} . \quad \sqrt[3]{x^3-3x^2+x+1} \geq x-1$$

3) Simplifier le nombre suivant : $A = \frac{a^{\frac{5}{3}} \times \left(\sqrt[4]{\frac{1}{a^2}} \right)^3 \times b^{\frac{5}{2}}}{\left(a^{\frac{5}{3}} \right)^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[5]{b^4}} ; (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

4) Rendre rationnel le dénominateur de chacun des deux

$$\text{nombres suivants : } \frac{1}{2 + \sqrt[3]{5}} ; \frac{1}{\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{4}}.$$

EXERCICE 11 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$.

- 1) Déterminer D_f et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Étudier la continuité de f sur D_f .
- 3) Montrer que f est strictement croissante sur D_f .
- 4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 5) Dresser le tableau de variations de f^{-1} .

EXERCICE 12 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + 2\sqrt{x-3} - 2$.

- 1) Déterminer D_f et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Étudier la continuité de f sur D_f .
- 3) Vérifier que : $\forall x \in D_f, f(x) = (\sqrt{x-3} + 1)^2$.
- 4) En déduire la monotonie de f .
- 5) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 6) Dresser le tableau de variations de f^{-1} .
- 7) Déterminer $f^{-1}([1; +\infty[)$.

EXERCICE 13 :

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-1} + 3 & ; x \geq 1 \\ f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & ; x < 1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer D_f , puis calculer les limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Étudier la continuité de f sur D_f .
- 3) Soit g la restriction de f sur un l'intervalle $I = [1, +\infty[$.
 - a)- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b)- Exprimer $g^{-1}(x)$ en fonction de x , pour tout $x \in J$.

EXERCICE 14 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

- 1) Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 2) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = x^2$ admet au moins une solution α dans $[1; 2]$.
- 5) Montrer que : $\alpha^6 - \alpha^2 = 1$.

EXERCICE 15 :

Partie A : Soit g la fonction sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$.

- 1) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 2) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
- 3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$, et que : $-1 < \alpha < 0$.
- 4) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - \frac{2}{x^2+1}$.

- 1) Déterminer D_f , puis calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 2) Étudier la continuité de f sur D_f .
- 3) Montrer que : $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$.
- 4) Étudier les variations de f , puis dresser son tableau de variations.
- 5) Soit h la restriction de f sur un l'intervalle $I = [0, +\infty[$
 - a)- Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b)- Dresser le tableau de variations de h^{-1} .

EXERCICE 16 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x(x + \sqrt{x^2+1})$

- 1) Déterminer D_f , puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- 2) Étudier la continuité de f sur D_f .
- 3) a)- Montrer que l'équation $(x+2)(x+3)f(x) = 2x+5$ admet au moins une solution α dans $] -3, -2[$.
 - b)- En déduire que : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\alpha+3}$.
- 4) a)- Vérifier que : $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}$.
 - b)- Dresser le tableau de variations de f .
 - c)- En déduire que $f(x)$ et x ont le même signe sur D_f .
- 5) Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique β dans D_f .
- 6) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- 7) Exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x , pour tout $x \in J$.
- 8) Déterminer la valeur de β .
- 9) Dresser le tableau de variations de f^{-1} .
- 10) Simplifier $f^{-1}(x) \left(f^{-1}(x) + \sqrt{(f^{-1}(x))^2 + 1} \right)$, pour tout $x \in J$.

EXERCICE 1 :

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{(x+1)\sqrt{x}-2}{x^2-1} & x > 1 \\ f(x) = x - \sqrt{1-x} & x \leq 1 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de f en 1
- 2) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 puis interpréter le résultat géométriquement.
- 3) La fonction f est-elle dérivable en 1?

EXERCICE 2 :

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx & x \leq 1 \\ f(x) = x^3 + 3x^2 - 5 & x > 1 \end{cases}$$

Déterminer les réels a ; b sachant que La fonction f est-elle dérivable en 1

EXERCICE 3:

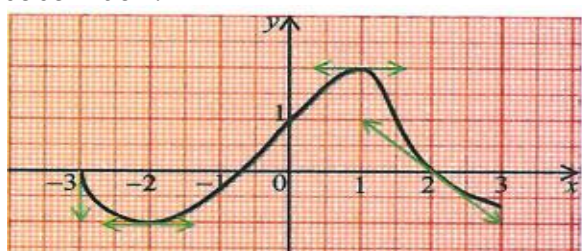
Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivantes : Déterminer :

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 2} ; f(x) = \left(\frac{x+2}{x^2 + 3x + 7} \right)^4 ; f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{3x - x^3} + 3x ; f(x) = \sqrt[4]{8x^3 - 3x + 2} ; f(x) = \frac{4\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x+1}}$$

EXERCICE 4:

Le dessin suivant présente la courbe d'une fonction f sur son ensemble de définition :



1. Déterminer D_f .
2. Résoudre dans D_f l'équation $f'(x) = 0$
3. Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2}$	$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3}$
---	--	--
4. Résoudre dans D_f l'inéquation $f'(x) \geq 0$
5. Dresser le tableau de variations de f sur D_f
6. Donner l'équation de la tangente à la courbe (C_f) aux points d'abscisses 1 et 2

EXERCICE 5 :

On considère la fonction g définie par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1. Etudier les variations de la fonction g
2. Pour tout $x \in [1; +\infty[$.
 - a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
 - b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α et que : $2 < \alpha < 3$.
 - c. Montrer que : $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$

EXERCICE 6:

1) Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x} + 1 & x < 1 \\ f(x) = x - 2\sqrt{x-1} & x \geq 1 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en 1.
2. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1, puis interpréter le résultat géométriquement.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe (C_f) aux points d'abscisses 5
4. Pour tout $x \in [1; +\infty[$.
 - a. Montrer que : $\forall x \in [1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+1)}$
 - b. Dresser le tableau de variations de f sur $[1; +\infty[$
 - c. Montrer que : $\forall x \in [1; +\infty[$, $2\sqrt{x-1} \leq x$
5. Pour tout $x \in I = [2; +\infty[$.
 - a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
 - b. Montrer que l'équation $f(x) = x - 1$ admet une seule solution α et que : $3 < \alpha < 4$.
 - c. Résoudre dans J l'inéquation $f^{-1}(2x) \geq f^{-1}(x-1)$
 - d. Montrer que : $(f^{-1})'(\alpha - 1) = \frac{3}{4(\alpha - 2)}$

EXERCICE 7 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x(\sqrt{x} - 2)^2$.

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$
2. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^+$, puis interpréter le résultat géométriquement.
3. Vérifier que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = 2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$
 - a. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
 - b. Déterminer le signe de f suivant les valeurs de x .
4. Pour tout $x \in I = [1; 4]$.
 - a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
 - b. Montrer que l'équation $f(x) = x - 2$ admet une seule solution α sachant que : $1 < \alpha < 4$.
 - c. Soient $(\beta, \gamma) \in J^2$ tel que $\beta < \gamma$:

comparer $f^{-1}(\beta)$ et $f^{-1}(\gamma)$

EXERCICE 8:

soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \sqrt[3]{\alpha x^2} - \frac{2x}{3}; (\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$$

Montrer que pour tout a et x de $\mathbb{R}_+^*$: $a^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{2}{3}} \leq \frac{2x+a}{3}$

Direction provinciale : Settat	Devoir Libre N° 1 1er Semestre	Pr : Y. Achab
Etablissement : LYCEE SIDI HAJJAJ		Niveau : 2Bac.PC

Exercice 1

1. Comparer les deux nombres suivants :

$$a = \sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{7} ; b = \sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{8}$$

2. Montre que : $\sqrt[3]{3\sqrt{21}+8} - \sqrt[3]{3\sqrt{21}-8} \in \mathbb{N}$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$$(E_1): \sqrt[3]{1+2x} + \sqrt[3]{1-2x} = 2^{\frac{1}{5}}; (E_2): \sqrt[3]{1+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$$

$$(E_3): \sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} > 1 ; (E_4): \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 12 > 0$$

4. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x+1}} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)} ; \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{\left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}}{x-8}$$

5. Montrer que : $\left(\exists c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) / \sqrt{1+\frac{1}{c}} - \sqrt{c^2+2c} = c$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2+\cos x} - \sqrt{3}}{x^2} ; x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{\sqrt{3}}{12} ; x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $|f(x)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{x^2}$

4. Calculer $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2-x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $f(x) = \sqrt[3]{2x}$

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$

4. La fonction f est-elle dérivable en 0 et en 2 ?

5. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = -2x\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 5x + 10$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}_+^*$

2. vérifier que : $1,4 < \alpha < 1,5$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation suivante :

$$(E): 2x^3\sqrt{x} - x^2 + 5x^3 - 10x^2 < 0$$

Problème

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2. Calculer les limites aux bornes de D_f

3. Étudier la continuité de f sur D_f .

4. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0. puis interpréter le résultat géométriquement.

5. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$

6. Dresser le tableau de variations de la fonction f

7. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisses 2.

8. Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses

en unique point et dont l'abscisse β tels que $\beta \in \left]2; \frac{5}{2}\right[$

9. Montrer que : $\beta - \sqrt[3]{\beta} = 1$.

10. Soit g la fonction définie sur $I =]1; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x)$$

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

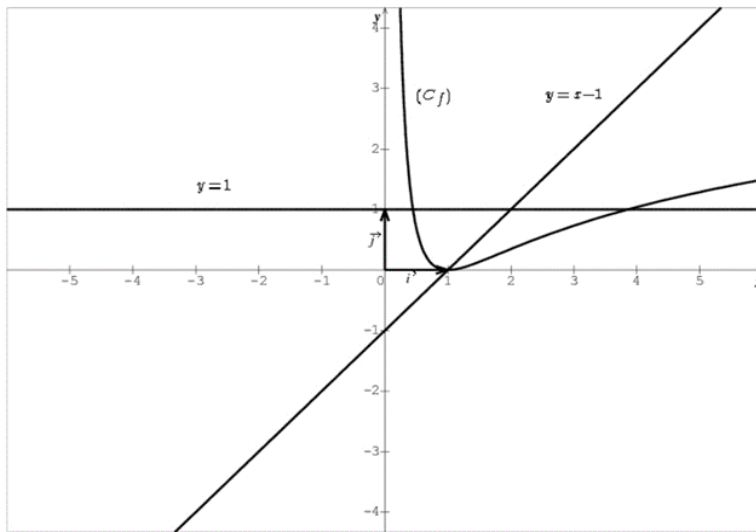
b. Montrer que g^{-1} sur dérivable J

c. Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1}

d. Montrer que : $(g^{-1})'(0) = \frac{2(\beta-1)^3}{1+2(\beta-1)^3}$

EXERCICE 1 :

Dans la figure ci-dessous (C_f) est la courbe représentative de f .

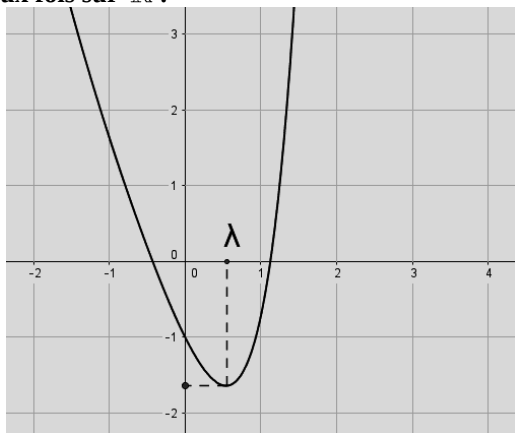


Par une lecture graphique :

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
- 2) Déterminer le signe de f
- 3) dresser le tableau de variation de f
- 4) Déterminer la concavité de (C_f) sur (D_f)
- 5) Déterminer les extrémums de f
- 6) Déterminer la position relative de la droite $(\Delta): y = x - 1$ et (C_f)
- 7) Déterminer le nombre sur (D_f) des solutions de l'équation $f(x) = 1$.
- 8) Pour tout $x \in I = [1; +\infty[$.
- 9) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
- 10) Tracer, $(C_{f^{-1}})$.

EXERCICE 2 :

La représentative graphique suivante est pour une fonction f dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.



Par une lecture graphique :

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 2) Déterminer les branches infinies.
- 3) dresser le tableau de variation de f
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet un deux solution α et β .
- 5) Déterminer le signe de $f(x)$ et $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$

EXERCICE 3:

I. En exploitant le tableau de variation de la fonction f .

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	-	0	+
f			-1		$+\infty$		$+\infty$
	$-\infty$					1	

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2) Déterminer $f'(-1)$ et $f'(0)$ puis interpréter les résultats géométriquement.
- 3) Déterminer le signe de f sur (D_f)

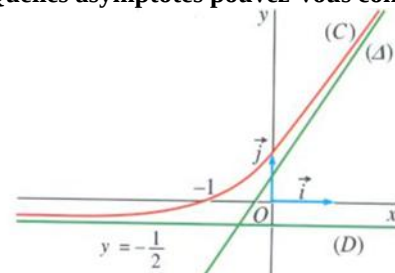
II. En exploitant le tableau de variation de la fonction f' .

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	1		1

- 1) Déterminer le signe de f'' sur (D_f)
- 2) Déterminer la concavité de (C_f) sur (D_f)
- 3) Déterminer les extrémums de f
- 4) Tracer, (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

EXERCICE 4:

Pour la courbe suivantes, déterminer D_f , les limites aux bornes de cet D_f puis dresser le tableau de variation de la fonction f représentée. Quelles asymptotes pouvez-vous conjecturer ?

**EXERCICE 5:**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 - 1}$

- 1) Déterminer D_f , puis étudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f . Justifier les réponses !
- 2) Etudier la parité de f et en déduire un élément de symétrie (C_f)
- 3) Etudier les limites de f aux bornes de D_f et en déduire les asymptotes éventuelles à (C_f) .
- 4) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- 5) Etudier la concavité de (C_f)
- 6) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
- 7) Etudier la position de (C_f) par rapport à (T)
- 8) Tracer (C_f) et (T) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

PROBLEME 1

Partie I

soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = 6x - 8x\sqrt{x} - \frac{1}{2}$.

- 1) Etudier les variations de la fonction g puis dresser le tableau de variation de la fonction g
- 2) Déterminer le signe $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

Partie II :

soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = (4x-1)\sqrt{x} - 4x^2 + 1$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis étudier la nature de la branche infinie.
- 2) a-Etudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter le résultat géométriquement.
b-Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*), f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}$
c-dresser le tableau de variation de f
- 3) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $\frac{1}{4}$.
- 4) a-Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sachant que : $0,9 < \alpha < 1,1$.
b- Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.
- 5) a-Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) f''(x) = \frac{(1-2\sqrt{x})(16x+2\sqrt{x}+1)}{4x\sqrt{x}}$
b- Etudier la concavité de (C_f)
- 6) Tracer (C_f) et (T) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie III :

soit la fonction h définie sur $[1; +\infty[$ par : $h(x) = f(x)$

- 1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
- 2) Montrer que : $(h^{-1})'(0) = \frac{\sqrt{\alpha}}{g(\alpha)}$
- 3) Tracer $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère de (C_f)
- 4) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h^{-1}(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h^{-1}(x)}{x}$

PROBLEME 2

Partie I

soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = 3 - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$.

- 1) Etudier les variations de la fonction g puis dresser le tableau de variation de la fonction g
- 2) Calculer $g(1)$ puis Déterminer le signe $g(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II :

soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = 4\sqrt{x} - 3x - \frac{1}{x}$

- 1) a-Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
b- puis étudier les branches infinies de la courbe (C_f) .

- 2) a-Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+^*$

b-Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*), f'(x) = -g(x)$

c-Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction de f

d-En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) 4\sqrt{x} \leq 3x + \frac{1}{x}$

- 3) Discuter suivant les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le nombre de solution de l'équation : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) 4\sqrt{x} \leq 3x + \frac{1}{x}$

- 4) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x-2}$

Partie III :

soit la fonction h définie sur $[1; +\infty[$ par : $h(x) = f(x)$

- 1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
- 2) Montrer que l'équation $h(x) = -1$ admet une seule solution α sur $[1; +\infty[$
- 3) Montrer que : $(h^{-1})'(-1) = -\frac{1}{g(\alpha)}$
- 4) Tracer $(C_{h^{-1}})$ et (C_f) dans le même repère.

PROBLEME 3

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = (x\sqrt{x} - 1)^2$.

- 1) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$
- 2) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^+$ puis interpréter le résultat géométriquement.
- 3) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f) .
- 4) Etudier la monotonie de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$
- 5) écrire l'équation de la tangente (Δ) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 4.
- 6) Déterminer l'intersection de (C_f) et les axes du repère
- 7) Montrer que le (C_f) admet un unique point d'inflexion et dans l'abscisse $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$
- 8) a-Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α sur $[0; 1]$

b- vérifier que : $\sqrt{\alpha} = \frac{1}{\alpha+1}$

c- Montrer que ! $f(\alpha) = \frac{1}{(\alpha+1)^2}$

Partie II :

soit la fonction g définie sur $[0; 1]$ par : $g(x) = f(x)$

- 1) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g^{-1}(\alpha) - \alpha}{x - \alpha}$
- 3) Tracer $(C_{g^{-1}})$ et (C_f) dans le même repère.

EXERCICE 1 :

soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 5u_n + 3$ On pose : $v_n = u_n + \frac{3}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer : u_1 , v_0 et v_1

2) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 5

3) Exprimer v_n en fonction de n

4) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{4}(11 \times 5^n - 3)$

5) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

6) Est-ce que le nombre 1718 est un terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Justifier la réponse.

EXERCICE 2:

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n}$.

Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

a) Montrer que tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

b) En déduire la monotonie de la suite (u_n)

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; puis calculer la limite de la suite (u_n)

a) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$

b) En déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$

EXERCICE 3:

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n} \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) montrer que $1 < u_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n - 3)}{5 - u_n}$

b) Déduire que (u_n) est décroissante et convergente

3) on considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) montrer que (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

b) calculer (v_n) en fonction de n

c) Déduire (u_n) en fonction de n

d) calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4) Soit la suite (w_n) définie par $w_n = \sqrt{5 - u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$

5) On pose ! $S_n = v_n - 2$ calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n S_k$.

EXERCICE 4:

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{11u_n - 20}{5u_n - 9} \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) montrer que $2 < u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a) montrer que (u_n) est décroissante

b) Déduire que (u_n) est bornée et convergente

3) a) montrer que $\frac{1}{u_{n+1} - 2} = \frac{1}{u_n - 2} + 5$ pour tout n de $\mathbb{N}$

b) Déduire $u_n = \frac{10n + 3}{5n + 1}$

c) calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4) calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{u_n}\right)$

EXERCICE 5

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right) \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) montrer que $1 < u_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a) montrer que (u_n) est décroissante puis montrer que $u_n \leq \frac{5}{2}$

b) Déduire que (u_n) est convergente

c) Déterminer sa limite

3) a) vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{u_n}\right)(u_n - 2)$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{10}(u_n - 2)$

c) Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{10}\right)^n \times \frac{1}{2}$

c) Déterminer de nouveau la limite de (u_n)

EXERCICE 6:

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2}{3} + 2} \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

soit la fonction f définie par: $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{3} + 2}$.

1) Déterminer D_f , puis Déterminer $f\left(\left[\sqrt{3}; 2\right]\right)$.

2) montrer que $u_n \geq \sqrt{3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

3) a) montrer que (u_n) est décroissante puis montrer que $u_n \leq 2$

b) Déduire que (u_n) est convergente puis Déterminer sa limite

4) Soit la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = u_n^2 - 3$

a) montrer que (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$

b) montrer que : $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3n + \frac{9}{2}$

EXERCICE 7:

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{-\sqrt{2}+2}{2} \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- 1) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 1$
- b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(u_n - 1)$
- c) déduire que la suite (u_n) est décroissante et convergent.
- 2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$
 - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
 - b) Ecrire (u_n) en fonction de n puis déduire la limite de (u_n)
 - c) Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2023}$

EXERCICE 8:

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n} \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- 1) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$
- b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{3 - u_n}$
- c) Montrer que la suite (u_n) est convergent.
- 3) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{1 - u_n}$
 - a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.
 - b) Ecrire (v_n) en fonction de n
 - c) déduire la limite de (u_n)
- 4) Déterminer la plus valeur de n pour que $u_n \geq \frac{1011}{1012}$

EXERCICE 9:

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- 1) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $2 < u_n$
- b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n + 1)}{u_n + 2}$
- c) Montrer que la suite (u_n) est convergent.
- 2) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$
- b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$
- c) Calculer la limite de (u_n)
- 2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \frac{2 - u_n}{1 + u_n}$
 - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
 - b) Ecrire (u_n) en fonction de n puis déduire la limite de (u_n)
 - c) Calculer en fonction de n le produit : $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_{n-1}$

EXERCICE 10:

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3(1-2u_n)} \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n < 0$
- 3) a) Montrer que tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{3}$
- b) En déduire la monotonie de la suite (u_n)
- c) Montrer que la suite (u_n) est convergent.
- 4) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{3}\right)|u_n|$
- b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$
- c) calculer la limite de la suite (u_n)

EXERCICE 11:

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 8\sqrt{2+u_n}}{9} \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $2 < u_n$
- 3) a) Montrer que (u_n) strictement décroissant.
- b) Montrer que la suite (u_n) est convergent.
- 4) Soit la suite (v_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \sqrt{u_n + 2} - 2$
 - a)-Montrer que (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$
 - b)-Ecrire (v_n) en fonction de n
 - c-Calculer la limite de (u_n)
- 5) Calculer la somme : $S_n = \sqrt{u_0 + 2} + \sqrt{u_1 + 2} + \dots + \sqrt{u_n + 2}$

EXERCICE 12:

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n^3}{3u_n^2 + 1} \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- 1) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$
- 2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissant
- b) déduire que la suite (u_n) est convergent.
- 3) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)u_n$
- b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- c) calculer la limite de la suite (u_n)
- 4) Soit la suite (v_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{2 + u_n}{1 + u_n}$
 - a)-Montrer que (v_n) est convergent
 - b)-Calculer la limite de (v_n)

Direction provinciale : Settat	Devoir Libre N° 2 1er Semestre	Pr : Y. Achab
Etablissement : LYCEE SIDI HAJJAJ		Niveau : 2Bac.PC

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x-1} & ; x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
- Étudier la continuité de f en 0.
- Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter les résultats géométriquement.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- Montrer que la droite (Δ) de l'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique de la courbe (C_f) au voisinage $+\infty$
- Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) sur $[0; +\infty[$

8. Montrer que
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} & ; x < 0 \\ f'(x) = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x}} & ; x > 0 \end{cases}$$

- Dresser le tableau de variations de la fonction f
- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) \geq 0$
- Etudier la concavité de (C_f)
- Tracer (C_f) et (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- Soit g la fonction définie sur $I = \mathbb{R}^+$ par : $g(x) = f(x)$
 - Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
 - Montrer que l'équation $g(x) = x + 1$ admet une solution unique β tels que $\beta \in]0; 1[$
 - Montrer que $\lim_{x \rightarrow \beta+1} \frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(\beta+1)}{x - \beta - 1} = \frac{1}{2 + \beta}$
 - Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans la même repère de (C_f)

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

a.
$$u_n = \frac{n^{\frac{3}{5}} + n^{\frac{6}{7}}}{n^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{4}{9}}}$$

b.
$$u_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + 2n + 1}$$

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5} \end{cases}$$

- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $-2 < u_n$
- a- Montrer que (u_n) strictement décroissant.
b- Montrer que la suite (u_n) est convergente.
- Soit la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{1}{u_n + 2}$
 - Montrer que (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$
 - Ecrire (v_n) en fonction de n
 - Calculer la limite de (u_n)
- Montrer que : $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{1 - n^2}{3}$

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ et soit la fonction f définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$

- a - Montrer que : $f([-1; 0]) \subset]-1; 0[$
b - En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); -1 < u_n < 0$
- a- Montrer que (u_n) strictement décroissant.
b- Montrer que la suite (u_n) est convergente.
- a - résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$
b- Montrer que : $\lim u_n \leq -\frac{1}{2}$
c- En déduire la limite de (u_n)

EXERCICE 1 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$$\bullet \ln(x^2) = 4 \quad \bullet \ln^2(1-x) = 9 \quad \bullet \ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{15}{4}$$

$$\bullet 1 + \ln(x+3) = \ln(x^2 + 2x - 3) \quad \bullet \ln^4(x) - 10\ln^2(x) = -9$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\bullet (\ln x - 3)(1 + 2\ln x) \geq 0 \quad \bullet \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \leq \ln(x+2) \quad \bullet \frac{\ln^2(x)}{\ln(x)} \leq 6$$

$$\bullet \ln(-x) - \frac{1}{\ln(-x)} \geq \frac{3}{2} \quad \bullet \ln^3(x) + \ln^2(x) + \ln(x) \geq -1$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \ln(x^3 y^2) = 5 \\ \ln(x) - 4\ln(\sqrt{y}) = -3 \end{cases} ; \begin{cases} x + y = e \\ \ln(x) + \ln(y) = 2 + \ln(3) \end{cases}$$

4) Pour chacun des cas suivants ,déterminer le plus entier naturel n vérifiant l'inégalité correspondante :

$2^{-n} \leq 10^{-5}$	$(1.1)^n \geq 100$	$4^{-n} < 0.03$
	$25\left(1 + \frac{7}{100}\right)^n \geq 4$	$40\left(1 - \frac{5.5}{100}\right)^n \leq 1$

EXERCICE 2:

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\ln x - 2}{1 + \ln x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \ln(-x)}{3 + \ln(-x)} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x + \ln x ; \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\ln(1 + \sqrt{x+3})}{x-3} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln^2 x - 3\ln x + 2}{x-e} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln(x)}{2 - \ln(x)} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{3x-2}{4x+1}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(5x+3)} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)}{x^2} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+2} \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

2) Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivantes :

$$f(x) = x^2(2\ln x - 1) ; f(x) = \ln \sqrt{1+4x+x^2} ; f(x) = x \ln(x^2 + 1)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) ; f(x) = \left(2 - \frac{3}{\ln x}\right)^3 ; f(x) = \ln(\ln x)$$

3) Déterminer une primitive F de la fonction f sur I .

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1} ; I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} ; I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} ; I =]1; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} ; I =]0; +\infty[$$

$$f(x) = \tan(x) ; I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$$

EXERCICE 3 :**Partie I :**Soit g la fonction sur $I =]0; +\infty[$ par : $g(x) = 2x^2 - 4\ln x + 4$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$
- 2) Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g
- 3) Dédire que $g(x) > 0 ; \forall x \in]0; +\infty[$

Partie II :Soit f la fonction définie sur I par : $f(x) = 2x - 3 + 4\frac{\ln x}{x}$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat graphiquement
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$
c) Déterminer la position relative de (C_f) et la droite (Δ)
- 3) a) Vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} ; \forall x \in]0; +\infty[$
b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur I
- 4) Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1
- 5) Tracer la droite (Δ) et la courbe de (C_f) .

EXERCICE 4 :**Partie I :**Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) ; x > 0 \\ f(0) = 0 ; x = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue à droite en zéro
- 2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en zéro , puis interpréter le résultat graphiquement
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter le résultat graphiquement
- 4) Calculer $f'(x)$, puis vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) f''(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$
- 5) Étudier les variations de la fonction f' et déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$
- 6) En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f
- 7) Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 2
- 8) Tracer la droite (T) et la courbe de (C_f) .

Partie II :Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h(x) = \frac{2x}{x+2}$

- 1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; f(x) - h(x) = x f'(x)$.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation $f(x) \leq h(x)$

Partie III :On considère la relation (R) suivante : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; g(x) - x g'(x) = h(x)$ On pose : $G(x) = \frac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

- 1) Montrer que la fonction g vérifie la relation (R)
si, et seulement si : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$
- 2) En déduire toutes les fonction g vérifie la relation (R)

EXERCICE 5 :**Partie I :**

Soit g la fonction sur $I =]0; +\infty[$ par : $g(x) = x + 1 + \ln x$

- 1) Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g
- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur I puis vérifier que : $e^{-2} < \alpha < e^{-1}$
- 3) dresser le tableau de signe g sur I

Partie II :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} & ; x > 0 \\ f(0) = 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue à droite en zéro
- 2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en zéro, puis interpréter le résultat graphiquement
- 3) Déterminer la nature de la branche infinie au voisinage $+\infty$
- 4) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$
- 5) Vérifier que $f(\alpha) = -\alpha$ puis Dresser le tableau de variation de f
- 6) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) f''(x) = -\frac{2x \ln x + (x^2 - 1)}{x(x+1)^3}$
- 7) Montrer que $2x \ln x$ et $x^2 - 1$ ont le même signe sur chacun intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$
- 8) Montrer que la courbe (C_f) admet un unique point d'inflexion que l'on déterminera.

Partie III :

soit la fonction h définie sur $] \alpha; +\infty[$ par : $h(x) = f(x)$

- 1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
- 2) Vérifier que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 1$
- 3) Montrer que : $(h^{-1})'(1) = \frac{1}{\alpha}$
- 4) Tracer $(C_{h^{-1}})$ et (C_f)

EXERCICE 6 :**Partie I :**

Soit g la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(1+x)$

- 1) Dresser le tableau de variation de g .
- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $] -1; +\infty[$ deux solutions 0 et α et vérifier que $3,8 < \alpha < 4$.
- 3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $] -1; +\infty[$
- 4) Montrer que $(\forall x \in] -1; +\infty[) : g(x) \leq 1$

Partie II :

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} & ; x > 0 \\ f(0) = 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
- 2) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.
- 3) Montrer que $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.
- 4) Dresser le tableau de variation de f
- 5) vérifier que : $f(\alpha) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.
- 6) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

EXERCICE 7 :**Partie I :**

Soit g la fonction sur $I =]1; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(\ln(x)) - \frac{x+1}{x \ln(x)}$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$
- 2) Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g
- 3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur I puis vérifier que : $6,4 < \alpha < 6,5$
- 4) dresser le tableau de signe g sur I

Partie II :

Soit f fonction définie sur $[1; +\infty[- \{e\}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{\ln(\ln(x))} & ; x > 1; x \neq e \\ f(1) = 0 & ; x = 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue à droite en 1
- 2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1, puis interpréter le résultat graphiquement
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$ puis interpréter les résultats graphiquement
- 1) Étudier la nature de la branche infinie au voisinage $+\infty$
- 2) Montrer que $(\forall x \in]1; +\infty[- \{e\}) ; f'(x) = \frac{g(x)}{(\ln(\ln(x)))^2}$
- 3) Vérifier que $f(\alpha) = \alpha \ln(\alpha)$ puis dresser le tableau de variation de f
- 4) Tracer (C_f) .(on prend $\alpha = 6,45$)
- 5) Résoudre graphiquement dans l'intervalle $]e; +\infty[$ l'inéquation : $\ln(\ln(x)) < x + 1$

EXERCICE 8:**Partie I :**

Soit g la fonction sur $I =]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2 \ln x$
à partir du tableau de variation de la fonction g en-dessous :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Montrer que :

$$> (\forall x \in]0; 1]) g(x) \leq 0$$

$$> (\forall x \in [1; +\infty[) g(x) \geq 0$$

Partie II :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat graphiquement
- 2) Étudier la branche infinie au voisinage $+\infty$
- 3) Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$
- 4) Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$, l'équation $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$
- 5) En déduire que la courbe (C_f) coupe la droite $(D) : y = x$ en deux points dont on déterminera les coordonnées.
- 6) Étudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D)
- 7) Tracer la droite (D) et (C_f) .(On admet que (C_f) admet un point d'inflexion unique dont l'abscisse est entre 2,4 et 2,5)

Partie III :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = \sqrt{3}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : 1 \leq U_n \leq 2$.
- 2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
- 3) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

DIRECTION PROVINCIALE : SETTAT		SERIE 7 : NOMBRES COMPLEXES	PR : Y. ACHAB
ETABLISSEMENT : LYCEE SIDI HAJJAJ			NIVEAU : 2BAC: PC+SVT
EXERCICE 1 :			
1) On pose : $(\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}); Z_1 = \frac{\bar{z}(z-1)}{\bar{z}-1}$			
a. Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}); \frac{Z_1 - z}{z-1} \in i\mathbb{R}$			
b. Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}); \frac{Z_1 + 1}{z-1} \in \mathbb{R}$			
c. Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}); Z_1 = z $			
2) Dans chacun des cas suivants, donner une forme trigonométrique des nombres complexes suivants :			
$z_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_3 = 2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2}$			
3) Soit $\alpha \in]0; 2\pi[$, Donne une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :			
$z_1 = 1 + \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$; $z_2 = 1 - \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$			
4) Soit le nombre complexe : $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2}$			
Montrer que : $\arg(z) + \arg(z-1) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$			
5) On considère le nombre complexe : $Z = \frac{\sqrt{3} + i}{1 + i}$			
On pose : $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = 1 + i$			
a. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique			
b. Ecrire Z sous forme algébrique			
c. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$			
EXERCICE 2:			
Soit le nombre complexe : $(\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}); Z = \frac{z+2}{z-i}$			
1) On pose : $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$			
a. Déterminer on fonction x et y : $\text{Im}(Z)$ et $\text{Re}(Z)$			
b. Déterminer l'ensemble des points $M(Z)$ du plan tels que $Z \in \mathbb{R}$			
c. Déterminer l'ensemble des points $M(Z)$ du plan tels que $Z \in i\mathbb{R}$			
d. Déterminer l'ensemble des points $M(Z)$ du plan tels que $ Z = 1$			
2) On considère dans le plan complexe les points A et K d'affixes respectives : $z_A = i$ et $z_K = 1$			
a. Montrer que : $ Z-1 \cdot z-i = \sqrt{5}$			
b. En déduire que si le point $M(Z)$ appartient à un cercle $\zeta(A; \sqrt{5})$ alors le point $M'(Z)$ appartient à un cercle on précisera le centre et le rayon			
EXERCICE 3 :			
On considère les points $A(2i); B(-\sqrt{3}-i)$, et $C(\sqrt{3}-i)$			
1) Montrer que les points A, B et C appartiennent au $\zeta(O; 2)$			
2) Tracer $\zeta(O; 2)$ et les points A, B et C			
3) Déterminer une mesure de l'angle $(\overline{AB}, \overline{AC})$			
4) Déterminer la nature du triangle ABC			
EXERCICE 4 :			
Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $a = 2i, b = \sqrt{3} - i, c = \bar{b}$ et $d = -2\sqrt{6} + (2\sqrt{2} + 2)i$			
1) Montrer que $AOBC$ est un parallélogramme.			
2) Calculer $ c-a $ et $ a $ puis en déduire la nature du $AOBC$			
3) Déterminer une mesure de l'angle $(\overline{AO}, \overline{AC})$			
4) Vérifier que : $\frac{d-a}{c-a} \in \mathbb{R}$ et interpréter ce résultat.			
5) Montrer que $\left(\frac{b}{c}\right)^{2016} = 1$			
EXERCICE 5:			
Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $a = 1 - i, b = \bar{a}, c = 1 + \sqrt{3}$ et $d = c + 2i$			
1) Montrer que $\frac{b-c}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$			
2) En déduire la nature du triangle ABC			
3) vérifier que D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overline{AB}$			
4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$			
a. Montrer que l'expression complexe de R est : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}az$			
b. Soit P le point d'affixe $p = 1 + \sqrt{2} + i$ et $P' = R(P)$			
Vérifier que $\bar{p}$ est l'affixe du point P'			
c. En déduire $\arg(p)$			
d. Déterminer la nature du triangle OPP'			
EXERCICE 6:			
1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$			
2) Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D tels que $a = 1 + 2i, b = 1 + \sqrt{3} + i, c = \bar{b}$ et $d = \bar{a}$			
a. Vérifier que : $ABCD$ est un trapèze.			
b. Montrer que : $\frac{d-b}{a-b} = i\sqrt{3}$			
c. Que peut-on déduire des droites (AB) et (BD) .			
d. Montrer que $A; B; C$ et D appartiennent au même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.			
EXERCICE 7:			
1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^2 - 4z + 5 = 0$			
a. Déterminer z_1 et z_2 solution de (E) tels que $(\text{Im } z_1 > 0)$			
b. Montrer que $(z_1 - 1)^{16} + (z_2 - 1)^{16} = 29$			
2) Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et Ω tels que $a = 2 - i, b = 2 + i$ et $\omega = 1$			
a. Vérifier que $\frac{b-\omega}{a-\omega} = i$ puis en déduire la nature du ΩAB			
b. Soit R la rotation de centre Ω et qui transforme A en B			
✓ Donner l'expression complexe de la rotation R			
✓ Déterminer l'affixe du point B' l'image de B par R			

EXERCICE 8 :

Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On considère les points A, B, C et

D d'affixes respectives $a = -\sqrt{2}$, $b = 1+i$, $c = \bar{b}$ et $d = 2 + \sqrt{2}$

1) a) Écrire b sous forme trigonométrique

b) Déterminer la petite valeur de l'entier naturel non nul n telle que b^n est un réel

c) Déterminer la petite valeur de l'entier naturel non nul n telle que b^n est un imaginaire pur

2) Vérifier que $\frac{b-a}{c-a} = \frac{\sqrt{2}}{2}b$ puis déduire que $AB = AC$ et

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

3) a) Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un losange.

b) En déduire que $\frac{\pi}{8}$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$

4) Soit G le point d'affixe $g = i\sqrt{2}$ et soit h l'homothétie de centre D et de rapport $\sqrt{2}$

a. Donner la représentation complexe de h

b. Vérifier que G est l'image de B par h

c. En déduire que les points B, D et G sont alignés.

5) On pose : $p = 1 + \sqrt{2} + i$

a. Vérifier que : $|p| = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

b. En utilisant la question 3)b), montrer que : $\arg(p) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$

c. Écrire p sous forme trigonométrique

d. Montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$

EXERCICE 9 :

1) Pour tout z dans $\mathbb{C}$, on pose : $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$

a. Déterminer les réelles a, b et c tels que :

$$(\forall z \in \mathbb{C}); P(z) = (z-4)(az^2 + bz + c)$$

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$

2) Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B

et C tels que $a = 4$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = 1 - i\sqrt{3}$

a. Construire les points A, B et C

b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3) Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$. Soit G l'image du point K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$ et F l'image du point K par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a. Déterminer l'affixe du point G .

b. Écrire l'affixe du point F sous forme exponentielle

c. Montrer que : $(OC) \perp (OF)$

EXERCICE 10 :

1) Soit a le nombre complexe tel que $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

a. Montrer que $|a| = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

b. Vérifier que $a = 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right) + 2i \sin\frac{\pi}{4}$

c. Montrer que : $1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$

d. Montrer que : $a = 4\cos^2\frac{\pi}{8} + 4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$

e. Montrer que $a = 4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ est l'écriture trigonométrique de a puis démontrer que $a^4 = \left(2\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^4 i$

2) Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et Ω tels que : $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $\omega = \sqrt{2}$ et R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Vérifier que l'affixe b du point B image du point A par la rotation R est $b = 2i$.

b. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z - 2i| = 2$

EXERCICE 11 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

2) Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a. Écrire a sous la forme algébrique

b. Vérifier que $\bar{a}b = \sqrt{3}$

Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On considère les points A, B et

C d'affixes respectives a, b et $\bar{a}$

3) Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport.

4) Soient $M'(z')$ image de $M(z)$ par R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a. Écrire z' en fonction de z et a

b. Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R puis montrer que $d = a + 1$

5) Soit I le point d'affixe le nombre 1

a. montrer que $ADIO$ est un losange.

b. Vérifier que $d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$ en déduire un argument du nombre $d - b$

c. Écrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique.

d. Déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD})$

EXERCICE 12 :

Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B

d'affixe $a = -1 - i\sqrt{3}$, $b = \bar{a}$ et la translation T de vecteur $\overrightarrow{OA}$

1) Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation T est $d = -2$

2) On considère la rotation R de centre D et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

a. Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c = -4$

b. Écrire le nombre $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique.

c. En déduire que $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$

4. Soient (ζ) de centre D et de rayon 2, (ζ') de centre O et de rayon 4 et $M(z)$ appartenant aux deux cercles (ζ) et (ζ')

a. Vérifier que : $|z + 2| = 2$

b. Prouver que $z + \bar{z} = -8$, puis en déduire que les cercles (ζ) et (ζ') se coupent en un point unique qu'on déterminera.

EXERCICE 13 :

Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1 + 5i$, $b = 1 - 5i$ et $c = 5 - 3i$

- Déterminer le nombre complexe d affixe du point D milieu du segment $[AC]$
- Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Déterminer le nombre complexe e affixe du point E l'image de B par h
- On considère la rotation R de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'image de B par R
- Soit F le point d'affixe $f = -1 + i$
 - Vérifier que $\frac{d-a}{f-a} \times \frac{f-e}{d-e} = -1$
 - En déduire que $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}) \equiv \pi [2\pi]$
 - Déterminer la forme trigonométrique du nombre $\frac{e-f}{a-f}$
 - en déduire la nature du triangle AEF
 - Déduire que les points $A ; D ; E$ et D appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre.

EXERCICE 14 :

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 13 = 0$
- Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 3 + 2i$, $b = 3 - 2i$ et $c = -1 - 2i$
 - Ecrire $\frac{c-b}{a-b}$ sous la forme algébrique
 - Déduire la nature du triangle ABC
- Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{12}$, et soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z' l'image de M par la rotation R , et soit D le point d'affixe $d = -3 - 4i$
 - Ecrire z' en fonction de z
 - Vérifier que le point C est l'image du point A par la rotation R
- Montrer que les points A, B et C sont alignés
 - Déterminer le rapport d'homothétie de centre C qui transforme A en D
 - Déterminer l'affixe m du point E tel que le quadrilatère $BCDE$ soit un parallélogramme
- Montrer que $\frac{d-a}{m-b}$ est un réel
 - Montrer que $ABED$ est un trapèze isocèle

EXERCICE 14 :

- Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C et D d'affixes respectives : $a = 1 - i\sqrt{3}$, $b = 2 + 2i$, $c = \sqrt{3} + i$ et $d = -2 + 2\sqrt{3}i$
 - Vérifier que : $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$.
 - En déduire que les points A, C et D sont alignés.
- On considère z l'affixe de M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$
Vérifier que : $z' = \frac{1}{2}az$

- Soient H l'image du point B par la rotation R , et h son affixe et P le point d'affixe p tel que $p = a - c$
 - Vérifier que : $h = ip$.
 - Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O

EXERCICE 15 :

- Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation: $(E): z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$
 - Vérifier que $\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$
 - En déduire les solutions de (E)
- Soient les nombres complexes $a = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$
 - Vérifier que $b\bar{c} = a$, puis en déduire que $ac = 4$
 - écrire b et c sous forme trigonométrique
 - En déduire que $a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$
- Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On considère les points B et D d'affixes respectives b , c et d telle que $d = a^4$
Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$
 - Vérifier que $z' = \frac{1}{4}az$
 - Déterminer l'image du point C par la rotation R
 - Déterminer la nature du triangle OBC
 - Montrer que $a^4 = 128b$
 - En déduire que les points O , B et D sont alignés

EXERCICE 16 :

- soit a le nombre complexe tel que $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$
 - écrire a sous forme trigonométrique
 - déduire que a^{2022} est un nombre réel.
- Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On considère les points A et B d'affixes respectives a et $\bar{a}$ telle que $d = a^4$. Déterminer une mesure de l'angle de rotation de centre O et qui transforme B en A
- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\alpha): z^2 - \sqrt{3}z + \alpha = 0$; $\alpha \in \mathbb{R}$
On suppose que (E_α) admet deux racines complexes conjuguées z et $\bar{z}$ non réel.
Soient les points $M(z); N(\bar{z})$ et $P(\sqrt{3})$ du plan complexe
 - Justifier que $\alpha > \frac{3}{2}$ et que $\alpha = z\bar{z}$
 - Montrer que $|z| = |z - \sqrt{3}|$
 - En déduire que les points M et N appartiennent à la médiatrice (Δ) du segment $[OP]$.
 - Déterminer la valeur de α pour laquelle $|z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$ et déduire dans ce cas, les d'intersection de la droite (Δ) et le cercle de centre P et de rayon $\sqrt{3}$

EXERCICE 1 :1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivants :

$$\bullet e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \quad \bullet e^{3x} - 7e^x + 6 = 0 \quad \bullet e^x - 21e^{-x} - 4 = 0$$

$$\bullet (8)^x - 7 \cdot (2)^x + 6 = 0 \quad \bullet 16^x - 5 \times 4^x + 6 = 0 \quad \bullet 4^x - 2^{x+1} + 1 = 0$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$\bullet 5e^{2x} - 2e^x - 3 \geq 0 \quad \bullet (e^x - 1)(e^x - 4) \leq 0 \quad \bullet e^{4x} + 21e^{2x} \leq 100$$

$$\bullet 4e^{2x-2} - 7e^{x-1} + 3 \geq 0 \quad \bullet \ln(3e^x - 5) > 4 \quad \bullet \ln(e^x - 2e^{-x}) < 0$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} e^x + e^{1-y} = e + 1 \\ e^{x-1} + e^{-y} = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} e^x - e^{-1}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$$

EXERCICE 2:Étudier les branches infinies de courbe (C_f) et les variations la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$1) f(x) = e^{2x} - 3e^x + 1; \quad 2) f(x) = e^{2x} + 3xe^x + 2$$

$$3) f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 5}; \quad 4) f(x) = 2x - 1 - \frac{3}{e^x + 1}$$

$$5) f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{e^x - 1}; \quad 6) f(x) = x - 3 + \frac{2}{e^x - 1}$$

$$7) f(x) = \ln(e^x + 1); \quad 8) f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)e^x$$

EXERCICE 3:Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-2x} \ln(e^{2x} + 1)$

- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) + 2f(x) = \frac{2e^{-2x}}{e^{-2x} + 1}$
- En déduire toutes les fonctions primitives de f sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer la primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0

EXERCICE 4 :

- Montrer que : l'équation $(\forall x \in \mathbb{R}); 1 + x \leq e^x$
- En déduire que : $(\forall x \in [0; 1]); e^x \leq \frac{1}{1-x}$.
- En déduire un encadrement du nombre $\sqrt[3]{e}$.

EXERCICE 5 :Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = (x - 2\sqrt{x})e^{\sqrt{x}} & ; x \geq 0 \\ f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & ; x < 0 \end{cases}$$

- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
- Étudier la dérivabilité à droite et à gauche de la fonction f en 0 puis interpréter le résultat graphiquement
- Étudier les branches infinies de courbe (C_f)

$$4) \text{ Montrer que : } \begin{cases} f'(x) = (x-2)\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} & ; x > 0 \\ f'(x) = \frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}} & ; x < 0 \end{cases}$$

- Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f
- Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point O
- Tracer la droite (T) et la courbe de (C_f) .

EXERCICE 6 :**Partie I :**Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - xe^{-x}$

- Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction g
- déduire que $(x \in \mathbb{R}); g(x) > 0$

Partie II : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + (x+1)e^{-x}$

- Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis déduire la branche infinie à (C_f) au voisinage de $-\infty$
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 - Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$
 - Etudier la position relative de (Δ) et (C_f) sur $\mathbb{R}$
- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = g(x)$
 - Déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
 - Etudier la concavité de la courbe (C_f)
 - Donner l'équation de tangente (T) en point d'abscisse 0.
- Construire (C_f) ; (Δ) et (T) .

EXERCICE 7 :**Partie I :** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2 \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$$

- Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = 2x + 2 \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote de (C_f) au voisinage $+\infty$
- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ Puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- calculer $f'(x)$: et vérifier que $f'(0) = 0$
 - Etudier le signe de $\sqrt{e^x} - 1$ sur $\mathbb{R}$
 - dresser le tableau de variation de f
- Etudier le signe de $(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$ sur $\mathbb{R}$
 - Montrer que $(\forall x \in [0; \ln 4]); f(x) \leq x$
- Construire (C_f) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Partie II :On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq \ln 4$
- Montrer que la suite (u_n) est décroissante
- En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 8 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

- Montrer que $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et déduire que le point O est le centre de symétrie de la courbe (C_f)
- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$
- a- calculer $f'(x)$: et vérifier que $f'(0) = \frac{3}{2}$
b- dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
- Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point O
- a-Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
b- En déduire que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote de (C_f) au voisinage $+\infty$
c-Montrer que la (C_f) est située en-dessous de la droite (D)
- Tracer les droites (D) et (T) et la courbe (C_f)
- Montrer que la fonction $H : x \rightarrow x - \ln(e^x + 1)$ est une primitive de la fonction $h : x \rightarrow \frac{1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$

- Déterminer la primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$

EXERCICE 9 :**Partie I :**

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - 2x$

- Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g
- Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$

- a-Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
b-Interpréter géométriquement chacun des deux derniers résultats
- a-calculer $f'(x)$ puis étudier le signe de $f'(x)$
b- dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
c- Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point O
- Tracer (T) à (C_f) (on prendra $\frac{1}{e-2} \approx 1,4$ et on admettra que la (C_f) a deux points d'inflexion l'abscisse de l'un appartient à l'intervalle $]0;1[$ et l'abscisse de l'autre est supérieur à $\frac{3}{2}$)
- Résoudre graphiquement l'inéquation $(\forall x \in]-\infty;0]); f(x) \geq x$

Partie III : Soit h la fonction définie sur $]-\infty;0]$ par $h(x) = f(x)$.

- Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
- Comparer $h^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ et $h^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$
- Tracer, dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe $(C_{h^{-1}})$

Partie IV :

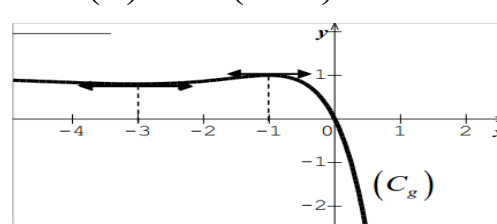
On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = h(u_n)$

- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \leq 0$
- Montrer que la suite (u_n) est croissante
- En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 10 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$

- a- Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + 1 - 4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$
b- En déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
c- Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote de (C_f) au voisinage $-\infty$
d-Montrer que la (C_f) est située en-dessous de la droite (D)
- a-Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
b- Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.
- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 1 - (x+1)^2 e^x$
- La courbe (C_g) ci-contre est la représentation graphique de la fonction $g(x) = 1 - (x+1)^2 e^x$



- A partir la courbe (C_g) de g déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$
- dresser le tableau de variation de f
- Montrer que la courbe (C_f) possède deux points d'inflexion d'abscisses -3 et -1
- Tracer les droites (D) et la courbe (C_f)
(On prendra $f(-3) \approx -2,5$ et $f(-1) \approx -0,7$)
- a-Vérifier que la fonction $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$
b-Déterminer la primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$

EXERCICE 11:**Partie I :**

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$

- Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}^+$
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]\ln(4); \ln(6)[$
- Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}^+$

Partie II : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{1 - e^x}{x^2}$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat graphiquement
- Etudier la branche infinie au voisinage $+\infty$
- Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$
- Etudier les variations de f sur $]0; +\infty[$
- Tracer (C_f) (On prendra $\alpha \approx 1,5$)

Partie III :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n})$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq \alpha$
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = g(u_n)$
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante
En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 12:

Partie I :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 + 8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$

1. a- Vérifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
b- Interpréter géométriquement chacun des deux derniers résultats
2. a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
b- Montrer que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage $+\infty$
3. a- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*); f'(x) = \frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$
b- Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$
4. Construire la courbe (C_f)
5. a- Vérifier que la fonction $H : x \rightarrow \frac{1}{x}e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \rightarrow \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
b- Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32\frac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$
c- Déterminer la primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$

Partie II :

Soit g une fonction définie sur $I = [2; 4]$ par $g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2$

1. Calculer $g(4)$
2. a- Vérifier que : $(\forall x \in I); g(x) = -(x-2)^2 e^{x-4} + x^2(e^{x-4} - 1)$
b- Vérifier que : $(\forall x \in I); e^{x-4} - 1 \leq 0$
c- En déduire que : $(\forall x \in I); g(x) \leq 0$
3. a- Montrer que : $(\forall x \in I); f(x) - x = \left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x)$
b- En déduire que : $(\forall x \in I); f(x) \leq x$

Partie III :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 \leq u_n \leq 4$
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n)
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 13:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
2. a- Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$
b- Résoudre l'équation $e^{(x-2)} - 4 = 0$

c- Montrer que la courbe (C_f) est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; 2 + \ln(4)]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2 + \ln(4); +\infty[$

3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat
4. a- Montrer pour tout x de $\mathbb{R}$ que $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$
b- Dresser le tableau de variations de la fonction f
5. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que $A(2; 2)$ est un point d'inflexion de (C_f)
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$
7. Construire (Δ) et (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
8. a- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$
b- Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(C_{f^{-1}})$
9. Calculer $(f^{-1})'(2 - \ln(3))$ (Remarque : $f^{-1}(2 - \ln(3)) = 2 + \ln(3)$)

EXERCICE 14:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat
3. a- Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$
b- Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ)
4. a- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 + xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$
b- Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$
5. Montrer que $f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$; où

$$g(x) = (2x+4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4 \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}$$

6. A partir de la courbe ci-contre de la fonction g déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (remarque : $g(\alpha) = 0$)
7. Etudier la concavité de (C_f) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions.
8. Construire (Δ) et (C_f)

(On prend : $\alpha \approx -4,5$ et $f(\alpha) = -3,5$)

9. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$, puis calculer $(f^{-1})'(\ln 4)$
10. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq \ln 4$
b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante
c- En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

