

MATIÈRE : MATHÉMATIQUES NIVEAU : TS1-TS3 PROFESSEUR : M.S. TOUBA GUEYE

FONCTION LN ET EXPO

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$$2 \ln(x+1) = \ln(x-1) + \ln(x+3); \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0; \frac{2e^{3x}-3e^{2x}}{3e^{x-2}} = 1;$$

$$8e^{3x+3} + 21 = 6e^{2x+2} + 23e^{x+1}; 9^x + 3^{x+1} = 4; 2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} = 9^{\frac{x}{2}+1};$$

$$(\sqrt{2})^{\frac{1}{x}} = 16^x; x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x; \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1; \frac{1+\ln x}{1-\ln x} \geq \frac{1-\ln x}{1+\ln x}; \frac{e^x-1}{e^{2x}+1} < \frac{e^x-2}{e^x+2}$$

$$3e^{3x} - 12e^{2x} + 3e^x + 21 \leq 3; \ln^3 x + 2 \ln^2 x - \ln x - 2 \geq 0; 2^x < -1;$$

$$4^x - 2^x - 2 \geq 0;$$

2. Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^5) = 19 \\ -\ln(x^3) + \ln(y^4) = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x^4 + y^4 = 12 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases} \quad \begin{cases} e^x + e^y = 7 \\ e^{x+y} = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} e^{x-1} \times e^y = e^2 \\ \ln x + \ln 5 = \ln 10 - \ln y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x - 2^{2-y} = 0 \\ 2^x + 2^{y+2} = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 8^x \times (\sqrt{2})^y = 2^{2x+1} \\ 3^x \times 27^y = 9^{x-1} \end{cases}$$

3. Déterminer les entiers naturels n tels que $2^n \leq 100$ et $(\frac{1}{3})^n \leq 10^{-3}$.

Exercice 2 : Calculer si elles existent les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x; \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\cos x) \ln x; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln(1+2x)}; \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln(x^2 + 1); \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\sin x - \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} + \ln x - \ln(x+1); \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} + \ln x - \ln(x+1); \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 \ln(x^3 - 8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x E(\ln x); \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(\ln x)}{\sqrt{x}}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[\ln(3-2x)]^2}{4x-6}; \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\ln(\frac{1}{x}) + \ln 7}{x-7}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\ln x}{1-\ln x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x}-1}{x}; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} + \ln x - 1}{x-1}; \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{x}{x+3}} - 1 \right); \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \cos x}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right); \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3})^x; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{1-x}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} e^x; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{2^{x^2+x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^x - \left(\frac{1}{4} \right)^{x+1}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 3^{x+1}}{2^x + 2^{x-1}}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x)}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(1+x^2)}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}} \right) \ln x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln[\sin x]; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2^x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x - x^2; \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x}; \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{\sin(x-1)}}; \lim_{x \rightarrow 0^+} |x|^{\frac{1}{x}}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{|x|^{\frac{1}{2}}}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^x};$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{2x} + e^x - 2) - ax$; $a \in \mathbb{R}$ (discuter suivant les valeurs de a); $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 1$.

Exercice 3 :

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur I :

$$f(x) = \frac{\ln^3 x}{x} \text{ et } I =]0; +\infty[; f(x) = \frac{1}{x \ln x} \text{ et } I =]0; 1[; f(x) = \tan x; I =]0; \frac{\pi}{2}[$$

$$f(x) = \frac{e^{3x+2e^x+1}}{e^x}; I = \mathbb{R}; f(x) = \frac{e^x}{e^{x+1}}; I = \mathbb{R}; f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}; I =]0; +\infty[; f(x) = \frac{1}{x} \sqrt{\ln x};$$

$$I =]1; +\infty[; f(x) = \sqrt[4]{3+2x}; I =]-\frac{2}{3}; +\infty[$$

2. a. Trouver les réels a, b et c tels que $\frac{2x^2-5x+6}{(x-1)^2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$. En déduire une primitive sur $]1; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2-5x+6}{(x-1)^2}$.

3. $f(x) = \frac{x + \ln|1-x|}{1-x}$.

a. Montrer que si $x > 1$ alors $f(x) = -1 - \frac{1}{x-1} - \frac{\ln(x-1)}{x-1}$.

b. En déduire une primitive de f sur $]1; +\infty[$.

4. $f(x) = (x^2 - 1)e^x$. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui a la forme $(ax^2 + bx + c)e^x$.

5. Déterminer les réels a et b tels que $\frac{1}{\sin x} = \frac{a \sin x}{1 - \cos x} + \frac{b \sin x}{1 + \cos x}$. En déduire une primitive sur $]0; \pi[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

6. $h(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}; k(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$.

a. Calculer $h(x) + k(x)$ et $h(x) - k(x)$

b. En déduire une primitive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ de h et de k .

Exercice 4 :

1. Démontrer que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

2. En déduire que pour tout $x > 0$, $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x < e < \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$

Exercice 5 : Soient a, b tels que $0 < a < b$ et $f(x) = \frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}$

1. Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ f est-elle définie ? dérivable ? Déterminer f' .

2. Soit $g: x \mapsto a(bx+1) \ln(bx+1) - b(ax+1) \ln(ax+1)$. Déterminer g' . En déduire que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\frac{1}{b}; 0[$ et $]0; +\infty[$.

3. Démontrer que $\ln\left(\frac{a}{b} + 1\right) \ln\left(\frac{b}{a} + 1\right) < (\ln 2)^2$.

Exercice 6 :

1. Démontrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$.

2. a. En déduire que pour tous $u, v \in]0; +\infty[$, $\frac{\ln u + \ln v}{2} \leq \ln\left(\frac{u+v}{2}\right)$.

b. Démontrer que pour tous réels u, v , $e^{\frac{u+v}{2}} \leq \frac{e^u + e^v}{2}$

3. Soit $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En étudiant les variations de $x \mapsto f(x) = ax - \frac{x^q}{q}$ sur $]0; +\infty[$, démontrer que pour tous $a, b > 0$, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?
4. En déduire que
 - a. pour tous $u, v \in]0; +\infty[$, on a : $\frac{\ln u}{p} + \frac{\ln v}{q} \leq \ln\left(\frac{u}{p} + \frac{v}{q}\right)$.
 - b. pour tous réels u, v , on a : $e^{\frac{u}{p} + \frac{v}{q}} \leq \frac{e^u}{p} + \frac{e^v}{q}$.
5. Soit $(\bar{\gamma})$, la courbe de la fonction $\ln$, A et B les points de $(\bar{\gamma})$ d'abscisses respectives u et v . Interpréter graphiquement l'inégalité du 4.a), en considérant le barycentre K de $\left\{\left(A, \frac{1}{p}\right); \left(B, \frac{1}{q}\right)\right\}$ et le point D de $(\bar{\gamma})$ de même abscisse que K.
6. De même, interpréter graphiquement l'inégalité 4.b).

Exercice 7 :

1. Déterminer tous les trinômes du 2nd degré $P(x)$ vérifiant $xP'(x) - 2P(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit f une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.
 - a. Vérifier que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et montrer que pour que f vérifie l'égalité (1) : $xf'(x) - 2f(x) = \ln x$ pour tout $x > 0$ alors il faut et il suffit que g soit une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^3}$.
 - b. Quel est l'ensemble des primitives de $x \mapsto \frac{\ln x}{x^3}$.
 - c. En déduire que l'ensemble des fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et vérifiant (1) est l'ensemble des fonctions $-\frac{1+\ln(x^2)}{4} + ax^2$ où a est une constante réelle arbitraire.
3. Soit φ telle que $\varphi(x) = -\frac{1+\ln(x^2)}{4} + \frac{1}{4}x^2$ pour tout $x > 0$. Etudier les variations de φ puis tracer sa courbe dans un repère orthonormé.

Exercice 8 : (Inégalité de Holder)

Soient $p, q > 0$ tels que $p + q = 1$ et $y > 0$ fixé. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = px + qy - x^p y^q$.

1. Vérifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = p\left[1 - \left(\frac{y}{x}\right)^q\right]$.
2. En utilisant les propriétés de la fonction $t \mapsto t^q$ avec $0 < q < 1$, vérifier que $f'(x) < 0$ pour $x < y$; $f'(x) = 0$ pour $x = y$ et $f'(x) > 0$ pour $x > y$.
3. En déduire le signe de $f(x)$ et $x^p y^q \leq px + qy$ pour tous $x, y > 0$ (NB : Cette inégalité est dite **inégalité de Holder**)
4. Soient $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$. En appliquant l'inégalité de **Holder** à $x_1 = \frac{a_1^{\frac{1}{p}}}{a_1^{\frac{1}{p}} + a_2^{\frac{1}{p}}}$, $y_1 = \frac{b_1^{\frac{1}{q}}}{b_1^{\frac{1}{q}} + b_2^{\frac{1}{q}}}$ et à x_2, y_2 définis de manière analogue à x_1, y_1 , montrer que $a_1 b_1 + a_2 b_2 < (a_1^{\frac{1}{p}} + a_2^{\frac{1}{p}})^p (b_1^{\frac{1}{q}} + b_2^{\frac{1}{q}})^q$.

Exercice 9 : $f_m(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + m})$; $m \in \mathbb{R}$

1. Déterminer D_{f_m} .
2. Préciser la nature des branches infinies de C_{f_m} .
3. Etudier les variations de f_m .
4. Etudier la parité de f_1 .
5. Montrer que f_m admet une fonction réciproque g_m dont on précisera le domaine de définition.

6. Montrer que pour tout réel x , $\frac{1}{2}[e^{f_1(x)} - e^{-f_1(x)}] = x$ et $\frac{1}{2}[e^{f_{-1}(x)} - e^{-f_{-1}(x)}] = x$. En déduire les expressions de f_1 et f_{-1} .
7. Soit $\varphi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
 - a. Exprimer $\varphi(x)$ en fonction de g_1 et g_{-1} et montrer que $\varphi(x) < 1$.
 - b. Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.
 - c. Etudier les variations de φ puis montrer qu'elle admet une fonction réciproque φ^{-1} .
 - d. φ^{-1} est-elle dérivable ?
 - e. Calculer $\varphi^{-1}(0)$ et $(\varphi^{-1})'(0)$.

Exercice 10 : Soit $f_m(x) = \ln \left| \frac{mx+1}{x+m} \right|$; $m \in \mathbb{R}$ et C_m sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Etudier f_m et tracer C_m pour $m \in \{0; 1; -1\}$.

Dans la suite, on suppose que $m \notin \{0; 1; -1\}$.

2.
 - a. Déterminer les ensembles de définition, de continuité et dérivabilité de f_m .
On désigne par D_m , l'ensemble définition de f_m .
 - b. Démontrer que les C_m passent par deux points fixes.
 - c. Démontrer que $D_m = D_{\frac{1}{m}}$ et que pour tout $x \in D_m$, $f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x)$.
En déduire la position relative de C_m et $C_{\frac{1}{m}}$.
 - d. Démontrer que $x \in D_{-m} \Leftrightarrow -x \in D_m$ et que pour tout $x \in D_{-m}$, $f_{-m}(x) = f_m(-x)$.
En déduire la position relative de C_m et C_{-m} .
 - e. Déduire des questions précédentes qu'il suffit d'étudier f_m et de tracer C_m pour $m > 1$ pour obtenir toutes courbes C_m .
3. On suppose que $m > 1$
 - a. Etudier f_m et dresser son tableau de variations. En déduire le tracé de C_2 , $C_{\frac{1}{2}}$ et C_{-2} .
Soit Ω , le point d'intersection de C_2 et son asymptote parallèle à l'axe des abscisses.
 - b. Démontrer que Ω est un centre symétrie à C_2 .
 - c. Soit g la restriction de f_2 à $]-2; -\frac{1}{2}[$. Démontrer que g réalise une bijection de $]-2; -\frac{1}{2}[$ vers $\mathbb{R}$ puis construire sur un autre graphique les courbes de g et g^{-1} .

Exo 11 : Le repère (O, I, J) est orthogonal. L'unité graphique est de 2 cm sur (OI) et de 15 cm sur (OJ) .

Soit $f_m(x) = \frac{x^m}{m!} e^{-x}$; $m \in \mathbb{N}^*$ et C_m sa courbe dans (O, I, J) .

1.
 - a. Démontrer par récurrence sur m que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, on a $e^x > \frac{x^m}{m!}$. En déduire que les parties positives des courbes C_m sont comprises entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
 - b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$.
2.
 - a. Etudier les variations de f_m suivant les valeurs de m . (On distinguera les cas $m = 1$, m pair et m impair).
 - b. Dresser les tableaux de variations correspondant à chaque cas.
3. On désigne par A_m , le point de C_m dont l'abscisse désigne le maximum relatif de f_m .
 - a. Vérifier que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f_m - f_{m+1} = f'_{m+1}$
Etudier la position relative de C_m et C_{m+1} et démontrer qu'elles se coupent en O et A_{m+1} .
 - b. Etudier la position relative de C_m et C_{m+2} et démontrer qu'elles se coupent en O et en un point dont l'abscisse appartient à $[m+1; m+2]$.
4. Utiliser les résultats précédents pour tracer C_1 , C_2 et C_3 (On précisera les points d'intersection des courbes que la question précédente permet de connaître ainsi que les tangentes en O à ces courbes).

Exercice 12 : $f(x) = \ln(\tan x)$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est π -périodique.
3. Etudier les variations et la convexité de f sur $]0; \frac{\pi}{2}[$. En déduire que pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $|f(x)| \geq 2 \left| x - \frac{\pi}{4} \right|$.
4. Montrer que C_f est symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.
5. Soient a, b tels que $\frac{\pi}{4} < a < b < \frac{\pi}{2}$.
 - a. Montrer que $\tan$ est continue, ne s'annule pas sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.
 - b. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\frac{\tan a}{\tan b} = e^{(a-b) \times \frac{1+\tan^2 c}{\tan c}}$.

Exercice 13 (extrait bac 2011) : Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. Soit f_a telle que $f_a(x) = a^{\sqrt{x}}$ et C_a sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

1.
 - a. Déterminer l'ensemble de définition de f_a .
 - b. Justifier que f_a est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis calculer $f_a'(x)$ pour tout $x > 0$.
 - c. La fonction f_a est-elle dérivable en 0 ?
 - d. Etudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x)$. Dresser le tableau de variations de f_a suivant les valeurs de a .
2.
 - a. Donner une équation de la tangente (T_a) à (C_a) au point A d'abscisse 1.
 - b. Calculer $f_a''(x)$ pour $x > 0$. Etudier selon les valeurs de a le signe de $f_a''(x)$ pour $x > 0$. En déduire l'existence d'un point d'inflexion de (C_a) si $a > 1$.
 - b. Construire dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (T_e) la tangente à (C_e) au point d'abscisse 1 et (C_e) .

Exercice 14 : Soit $f(x) = |\sin x|^{\cos x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Justifier que l'étude de f peut être réduite à $]0; \pi[$.
3.
 - a. Définir g , le prolongement par continuité de f en 0.
 - b. Etudier la dérivabilité de g en 0.
 - c. Etudier et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Exercice 15 (extrait bac 2022)

Partie A : Soit $a > 0$ et g_a une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée g_a' vérifiant les propriétés suivantes :

(P₁) Pour tout réel x , $(g_a'(x))^2 - a^2(g_a(x))^2 = -1$;

(P₂) $g_a'(0) = 0$;

(P₃) g_a' est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que qu'il existe une fonction g_a vérifiant (P₁), (P₂) et (P₃).
 - a. Calculer $g_a(0) = 0$.
 - b. Démontrer que pour tout réel $x \neq 0$, on a $g_a'(x) \neq 0$.
 - c. En utilisant (P₁), montrer que pour tout réel $x \neq 0$, on a $g_a''(x) = a^2 g_a(x)$.
 - d. En déduire que pour tout réel x , $g_a(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$.
2. Montrer que la fonction g_a définie par $g_a(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$ où a est un réel strictement positif, est une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ dont la fonction dérivée g_a' vérifie (P₁), (P₂) et (P₃).

Partie B : Soit $a > 0$, f_a , la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = \ln\left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}\right)$ et (C_a) sa courbe dans un repère orthonormé

1. Etudier la parité de f_a , ses variations et dresser son tableau de variations.
2. Etudier les branches infinies de (C_a) .
3. Tracer (C_1) .

Partie C :

1. Montrer que pour tout réel x , on a:
 - a. $|f_1'(x)| < 1$
 - b. $f_1''(x) = 1 - [f_1'(x)]^2$.
2. Montrer que pour tout $y \in]-1; 1[$, l'équation $f_1'(x) = y$ admet une solution unique notée t_y puis exprimer t_y en fonction de y .

Plus tu agis avec intelligence, mieux tu augmentes tes chances. Si tu veux faire la différence alors tu dois parler avec aisance, agir avec déférence et te comporter comme une référence. L'essence de la vie, ce n'est pas la vengeance, ni les revanches mais c'est d'accomplir des œuvres immenses avant de tirer sa révérence. L'extravagance, les manigances, la répugnance n'ont aucune importance et sont des signes d'incompétence. Commence par résorber tes carences puis accélère ta cadence si tu veux prendre de l'avance. N'oublie pas que le silence fait aussi parti de l'éloquence. Réclame toujours ton indépendance si tu veux une bonne existence. Si tu veux entendre un jour son excellence alors il faut toujours t'adonner à une réflexion dense.