

INTEGRATION (Partie 2)

I. Calcul d'intégrales

1) Définition

Propriété : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Démonstration :

La dérivée de la fonction G définie sur $[a ; b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la fonction f .

Donc G est une primitive de f sur $[a ; b]$.

Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a ; b]$, on a $G(x) = F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

De plus, $G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ et $G(a) = F(a) + k$ donc $F(a) = -k$ et donc $k = -F(a)$.

Or $G(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) + k = F(b) - F(a)$.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a ; b]$.

On appelle **intégrale de f sur $[a ; b]$** la différence $F(b) - F(a)$ noté $\int_a^b f(x) dx$.

Remarque :

La définition est étendue à des fonctions de signe quelconque.

Ainsi pour une fonction f négative sur $[a ; b]$, on peut écrire :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

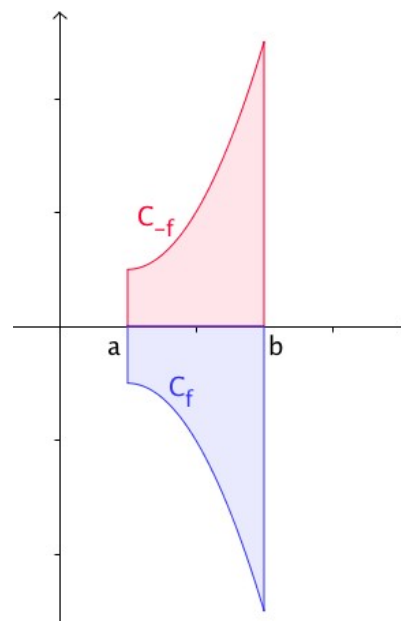
$$= - (G(b) - G(a)) \quad \text{où } G \text{ est une primitive de la fonction } -f.$$

$$= - \int_a^b (-f(x)) dx$$

Dans ce cas, l'intégrale de la fonction f sur $[a ; b]$ est égale à l'opposé de l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f sur $[a ; b]$.

Notations :

On écrit : $\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$



Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

Calculer : $A = \int_2^5 (3x^2 + 4x - 5) dx$

$$\begin{aligned} A &= \int_2^5 (3x^2 + 4x - 5) dx \\ &= \left[x^3 + 2x^2 - 5x \right]_2^5 \\ &= 5^3 + 2 \times 5^2 - 5 \times 5 - (2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2) \\ &= 125 + 50 - 25 - (8 + 8 - 10) \\ &= 144 \end{aligned}$$

$B = \int_1^1 e^{-2x} dx$

$$\begin{aligned} B &= \int_1^1 e^{-2x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2 \times 1} - \left(-\frac{1}{2} e^{-2 \times (-1)} \right) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} e^2 \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} \end{aligned}$$

$C = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 3} dx$

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 3} dx \\ &= \left[\ln(e^x + 3) \right]_0^1 \\ &= \ln(e^1 + 3) - \ln(e^0 + 3) \\ &= \ln(e + 3) - \ln 4 \\ &= \ln\left(\frac{e + 3}{4}\right) \end{aligned}$$

Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux réels de I .

a) $\int_a^a f(x) dx = 0$

b) $\int_a^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

a) $\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$

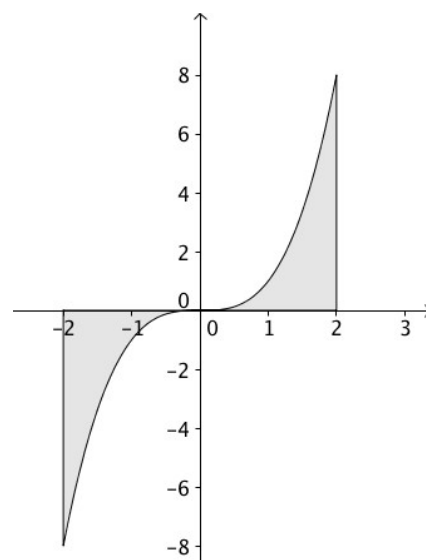
b) $\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(b) = - (F(b) - F(a)) = - \int_a^b f(x) dx$

Remarque :

Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.

Par exemple :

$$\int_{-2}^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_{-2}^2 = \frac{1}{4} \times 2^4 - \frac{1}{4} \times (-2)^4 = 4 - 4 = 0.$$



2) Relation de Chasles

Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a , b et c trois réels de I .

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 & \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\
 &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\
 &= F(b) - F(a) \\
 &= \int_a^b f(x) dx
 \end{aligned}$$

2) Linéarité

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I .

a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

b) $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

Démonstration :

On applique les propriétés sur les primitives :

- kF est une primitive de kf
- $F + G$ est une primitive de $f + g$

Méthode : Calculer une intégrale en appliquant la linéarité

On pose : $A = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$ et $B = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$

a) Calculer $A + B$ et $A - B$.

b) En déduire A et B .

a) On calcule en appliquant les formules de linéarité :

$$\begin{aligned}
 A + B &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 x) dx + \int_0^{2\pi} (\sin^2 x) dx \\
 &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx \\
 &= \int_0^{2\pi} 1 dx \\
 &= [x]_0^{2\pi} \\
 &= 2\pi - 0 \\
 &= 2\pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A - B &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 x) dx - \int_0^{2\pi} (\sin^2 x) dx \\
 &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\
 &= \int_0^{2\pi} (\cos 2x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{2} \sin(2 \times 2\pi) - \frac{1}{2} \sin(2 \times 0) = 0
 \end{aligned}$$

b) On a ainsi :

$$\begin{cases} A + B = 2\pi \\ A - B = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 2A = 2\pi \\ A = B \end{cases} \text{ soit : } A = B = \pi.$$

3) Inégalités

Propriétés : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I avec $a \leq b$.

a) Si, pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

b) Si, pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

Démonstration :

a) Par définition, lorsque f est positive, l'intégrale de f est une aire donc est positive.

b) Si $f(x) \geq g(x)$ alors $f(x) - g(x) \geq 0$.

Donc en appliquant a), on a : $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0$.

Par linéarité, on a $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0$ et donc $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Méthode : Encadrer une intégrale

a) Démontrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, on a $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) En déduire que $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$.

a) Sur $[0 ; 1]$, $x^2 \leq x$.

Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, on a $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) On déduit de la question précédente que $\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \int_0^1 e^x dx$.

$$\int_0^1 0 dx = 0 \text{ et } \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

D'où $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$

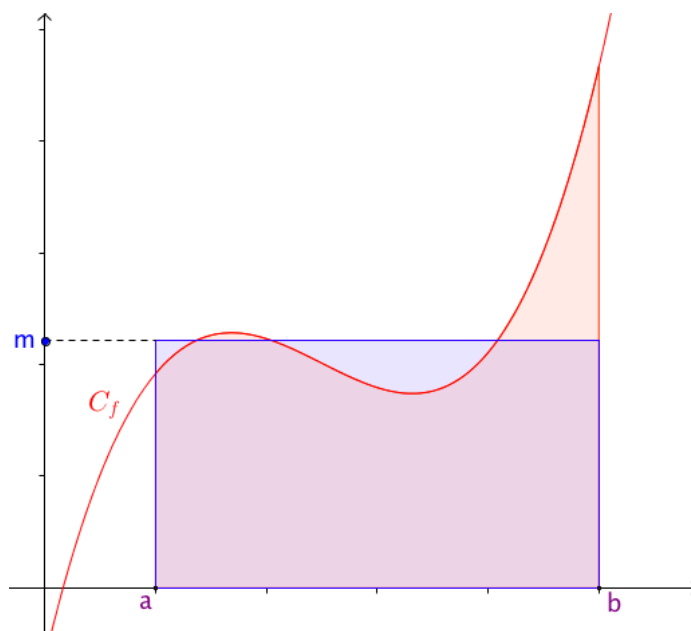
II. Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a \neq b$.

On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a ; b]$ le nombre réel $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Interprétation géométrique :

L'aire sous la courbe représentative de f (en rouge ci-dessous) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (en bleu).



Exemple :

Calculons la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{10 - 0} \int_0^{10} (3x^2 - 4x + 5) dx \\ &= \frac{1}{10} \left[x^3 - 2x^2 + 5x \right]_0^{10} \\ &= \frac{1}{10} (1000 - 200 + 50) \\ &= 85 \end{aligned}$$

Méthode : Calculer une valeur moyenne d'une fonction

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.

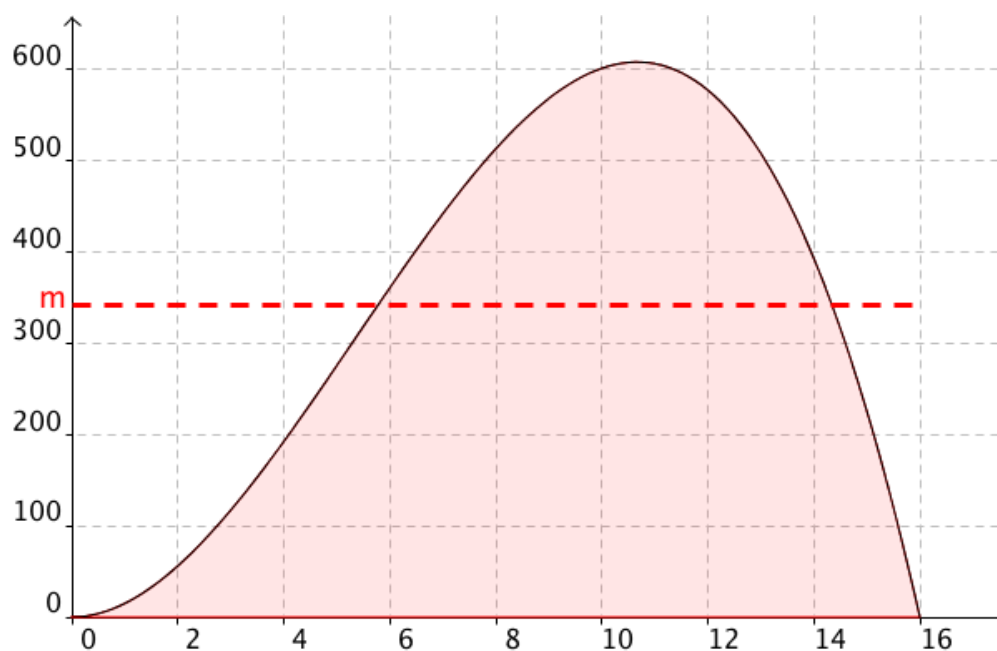
Au x -ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.

Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{16 - 0} \int_0^{16} f(x) dx \\ &= \frac{1}{16} \int_0^{16} (16x^2 - x^3) dx \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{16}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{16} \left(\frac{16}{3} \times 16^3 - \frac{1}{4} \times 16^4 \right) \\
 &= \frac{16^3}{3} - \frac{16^3}{4} \\
 &= \frac{16^3}{12} \\
 &= \frac{1024}{3} \approx 341
 \end{aligned}$$

Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales