

FONCTIONS NUMERIQUES

Ce n'est pas le chemin qui est difficile ; c'est le difficile qui est le chemin. Il faut travailler.

DOMAINE DE DEFINITION

EXERCICE 1

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{1-2x}{x+1}$

2) $f(x) = 1-x + \frac{2}{x}$

3) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

4) $f(x) = \frac{2x+7}{|1-3x|-4}$

5) $f(x) = \frac{7x+12}{|4x-7|-|3x+5|}$

6) $f(x) = \frac{4x^2+x+1}{-3|4-x|+2|3x-1|+x-5}$

7) $f(x) = \frac{2x-7}{x^2+|x|-2}$

8) $f(x) = \frac{2x^2-3}{|x^2-x|-3x}$

9) $f(x) = \frac{2x+1}{1+\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

10) $f(x) = \frac{2x^2+x-1}{|x^3|-1}$

11) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+4}$

12) $f(x) = \sqrt{|x^2+3x+2|}$

13) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$

14) $f(x) = \sqrt{|x+1|}+x$

15) $f(x) = \sqrt{|x+1|-2|x+3|}$

16) $f(x) = \sqrt{|3x-x^2|-|2x^2+1|}$

17) $f(x) = \sqrt{-2|x-3|+3|2x+1|-x+5}$

18) $f(x) = \sqrt{3x-|4x^2+x|}$

19) $f(x) = \sqrt{2x-3}-\sqrt{4x-8}$

20) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+2x}-x+3}$

21) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{1-x}$ $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{1+x^2}$

22) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{1+x}$

23) $f(x) = \sqrt{2+x} + \frac{1}{x\sqrt{4-x}}$

24) $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x^2-1}$

25) $f(x) = \frac{x+3\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$

26) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

27) $f(x) = \frac{1-\sqrt{2x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$

28) $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{2x^2-3x+1}-x+1}$

29) $f(x) = \frac{1-2x}{x^3+x^2+4}$

30) $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^3+x^2+4}$

31) $f(x) = \frac{1-2x}{\sqrt{x^3+x^2+4}}$

32) $f(x) = \sqrt{\frac{1-2x}{x^3+x^2+4}}$

33) $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt{x^3+x^2+4}}$

34)
$$\begin{cases} f(x) = 1+x+\frac{1}{x} & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = \sqrt{x^2+x-1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

EXERCICE 2

On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x-2}$. Déterminer D_f ,

D_g , $D_{f \circ g}$, $D_{g \circ f}$ puis calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$. On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$. Déterminer D_f , D_g et

$D_{g \circ f}$ puis calculer $g \circ f(x)$.

Quelle remarque peut-on faire ?

CALCUL DE LIMITES

EXERCICE 3

Dans chacun des cas suivants, calculer la limites (lorsqu'elle existe) en $+\infty$ et en $-\infty$ de f

- 1) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} - x$
- 2) $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1}$
- 3) $f(x) = \frac{3x^2}{2x + 1} - \frac{(2x - 1)(3x^2 + x + 2)}{4x^2}$
- 4) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
- 5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$
- 6) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$
- 7) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 3x$
- 8) $f(x) = 2x + \sqrt{3x^2 + x + 7}$
- 9) $f(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$
- 10) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$
- 11) $f(x) = \sqrt{x^3 + x + 1} - x\sqrt{x + 1}$
- 12) $f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2}$
- 13) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{x}$
- 14) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x - 1}} - \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$
- 15) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{3x - 1}$
- 16) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 1} + 5x}{3x - 1}$
- 17) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 2}}{\sqrt{4x^2 + 3}}$
- 18) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} - x}{3x}$
- 19) $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{4x^2 + 1}} + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 1}$

- 20) $f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{1 + x - \sqrt{1 + x^2}}$
- 21) $f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x^2 - 3x + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + x}}$
- 22) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$
- 23) $f(x) = \frac{7x}{4x + 1 + \sqrt{16x^2 + x + 1}}$
- 24) $f(x) = \frac{x(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1})}{x + \sqrt{x + 1}}$
- 25) $f(x) = \tan\left[\left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)\frac{\pi}{2}\right]$
- 26) $f(x) = \tan\left[\left(\sqrt{x^2 - 4x + x}\right)\frac{\pi}{8}\right]$
- 27) $f(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 3x + 5}}{x + 3 - \sqrt{x^2 - 6x}}$
- 28) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x + 1}} - \frac{x}{\sqrt{x + 2}}$

EXERCICE 4

Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x + 3} - 3}{9 - x^2}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - 2x}{x + 2}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 3}{1 - x}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^2 - 4}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 4}{x^2 + 2x - 3}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{-2x^2 + x + 1}{2x + 1}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

- 10) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt{3}}{x+1}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 3x}{x}$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{2x^3 - 3x^2 + 1}$
- 15) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2}$
- 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+4} - 2}{x}$
- 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$
- 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$
- 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\tan^2 x}$
- 20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$
- 21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\tan x}$
- 22) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
- 23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}$
- 24) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - x) - \tan x}{1 - \sin(\frac{\pi}{4} + x)}$
- 25) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\cos 2x - 1}{\cos 3x}$
- 26) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2\cos x - \sqrt{2}}$
- 27) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \sin x}$
- 28) $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{\cos(x - \frac{\pi}{3}) - \sin \frac{x}{4}}{\tan 3x}$

- 29) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin x}$
- 30) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\tan^2 \frac{x}{2}}$
- 31) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$
- 32) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$
- 33) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right)$
- 34) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$
- 35) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}}$
- 36) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\sin x + \cos x}$
- 37) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 5x}$
- 38) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$
- 39) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 3x^2 - 10x}$
- 40) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3(x^2 - 1)} - \frac{1}{2(x^3 - 1)}$
- 41) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x^3 - 15x - 4}$
- 42) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$
- 43) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)\sqrt{|x+2|}}{x^2 + x - 2 - 3|x+2|}$
- 44) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin ax - \sin x^2}{x - a}$
- 45) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{3x}$
- 46) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt[3]{x+54} - 4}{2\sqrt[3]{x+17} - \sqrt[3]{20x+16}}$

EXERCICE 5

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f
- 2) Etudier les limites aux bornes de D_f

EXERCICE 6

1) On donne $f(x) = 2x - x \sin x$.

a) Démontrer que pour tout $x \geq 0$ on a :
 $x \leq f(x) \leq 3x$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Démontrer que pour tout $x \leq 0$ on a :
 $3x \leq f(x) \leq 0$. En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2) On donne $g(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$.

Démontrer que pour tout $x > 0$,

$$-\frac{x^2+1}{x^3} \leq g(x) \leq \frac{x^2+1}{x^3}.$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

EXERCICE 7

On considère les fonctions f , g et h définies par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}}$$

et $h(x) = -x + \sin x$

1) Démontrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x}, \quad |g(x)| \leq \frac{3}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad h(x) \leq -x + 1.$$

2) En déduire la limite en $+\infty$ de f , g et h .

3) En utilisant un encadrement, déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos x}{x+1}.$$

EXERCICE 8

Trouver deux constantes m et M telles que :

$$m \leq \frac{1}{2 - \sin x} \leq M \quad \text{pour tout réel } x.$$

En déduire le comportement en $+\infty$ des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{x}{2 - \sin x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x + \sin x}{2 - \sin x}.$$

ASYMPTOTES ET BRANCHES INFINIES

EXERCICE 9

Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de la fonction f , calculer ses limites aux bornes de ce domaine et préciser les asymptotes et branches infinies éventuelles de la courbe C_f de f .

1) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$;

2) $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x - 2}$

3) $f(x) = \frac{5x^2 + 3x - 5}{-x^2 - 2x + 3}$

4) $f(x) = \frac{3x^3 + x^2 + 2x - 4}{x^2 - 1}$

5) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

6) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

7) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$

8) $f(x) = x + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

9) $f(x) = x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

10) $f(x) = x + 1 + 5\sqrt{x^2 + 2x - 2}$

11) $f(x) = 2x - \sqrt{-x} - 3$

12) $f(x) = \frac{x|x^2-1| - 2x|x|+1}{x^2|x-3|-x^3}$

13) $f(x) = \frac{\sqrt{|x|} - \sqrt{|2x+1|}}{x - |x-4|}$

EXERCICE 10

Pour les fonctions f suivantes démontrer qu'il existe une parabole P asymptote à C_f .

1) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4x}$

2) $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 5}{x - 1}$

3) $f(x) = \frac{\sin x}{x} - 1 + x^2$

EXERCICE 11

Dans chacun des cas suivants, trouver les réels a et b en tenant compte des renseignements donnés sur la fonction f .

1) $f(x) = a \frac{x+1}{x-2} + b \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $f(0) = -1$.

2) $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{2x + 1} - x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

3) $f(x) = \frac{ax + 1}{bx - 3}$ C_f admet les droites d'équations $x = 3$ et $y = 2$ pour asymptotes.

4) $f(x) = \frac{ax - 3}{x - b}$; C_f admet le point $I(3, 1)$ pour centre de symétrie.

CONTINUITE, DERIVABILITE

EXERCICE 12

I) Dans chacun des cas suivants, déterminer D_f puis étudier la continuité et la dérivabilité de f en x_0 .

- 1)
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x} & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}; x_0 = 2.$$
- 2)
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}; x_0 = 0.$$
- 3)
$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}; x_0 = 0.$$
- 4)
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{-x^3}}{x} - 2 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 - x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -2 \end{cases}; x_0 = 0$$

5) $f(x) = |x^2 - x|$; $x_0 = 0$; $x_0 = 1$.

II) Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

- 1) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 8$.
- 2)
$$\begin{cases} f(x) = x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Remarque : Une fonction périodique n'admet pas de limite à l'infini.

- 3)
$$\begin{cases} f(x) = x - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = -2x + 7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$
- 4)
$$\begin{cases} f(x) = 1 + x & \text{si } x < -1 \\ f(x) = 2x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
- 5)
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{|1 - x|} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$
- 6) $f(x) = |-2x^2 + 5x + 3|$
- 7) $f(x) = \sqrt{(1 - x^2)^3}$

EXERCICE 13

Dans chacun des cas suivants, peut-on prolonger f par continuité en a donné ? Si oui déterminer ce prolongement noté g .

- 1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $a = 0$.
- 2) $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x}$; $a = 0$.
- 3) $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{3x^2}$; $a = 0$.
- 4) $f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{2x - 1}$; $a = \frac{1}{2}$.
- 5) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{1 - x}$; $a = 1$.
- 6) $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 4}{x + 1}$; $a = -1$.

EXERCICE 14

Soit f l'application de $[0, 2]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - 3x}{x - 2} & \text{si } x \in [0, 1] \\ f(x) = 2 \sin \frac{\pi}{2} x & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de f en 1.
- 2) Etudier la dérivabilité de f en 1.

EXERCICE 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{-x - 1} & \text{si } x \in]-\infty; -1[\\ f(x) = x^2 - 1 & \text{si } x \in [-1; 0] \\ f(x) = 2 \sin(x - 1) & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de f en 1 et en -1 .
- 2) Etudier la dérivabilité de f en 1 et en -1 .

EXERCICE 16

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 3 & \text{si } x \leq -5 \\ f(x) = x^2 + a & \text{si } -5 < x \leq 2 \\ f(x) = 2x^3 + 5x^2 + bx + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Déterminer les nombres réels a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 17

1) Déterminer le nombre réel m pour que f soit

dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - 2}{x - 1} & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = m(x^2 - 4) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

2) Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = x^2 + x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ g(x) = ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer les couples de réels (a, b) pour que g soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 18

Soit a et b deux nombres réels et f la fonction définie par : $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{x(x+1)}$.

- 1) Déterminer les limites éventuelles de f en 0, -1, en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 2) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0, en -1 ? Si oui quel est ce prolongement.

EXERCICE 19

Soit a un nombre réel et f_a la fonction définie par :

$$f_a(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + (1-a)x - a}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f_a .
- 2) Déterminer l'ensemble E des réels a, pour lesquels f_a admet un prolongement par continuité en a. Pour chaque réel a de E, vous déterminerez le prolongement par continuité de f_a en a.

EXERCICE 20

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 3 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ . Pour quelles valeurs de } a \text{ f est-elle continue en } x_0 = 1 ?$$

EXERCICE 21

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -2 \sin x & \text{si } x \leq \frac{-\pi}{2} \\ f(x) = A \sin x + B & \text{si } \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ f(x) = \cos x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Déterminer A et B pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$

EXERCICE 22

Soit la fonction définie par : $h(x) = \frac{x\sqrt{x-8}}{4-x}$.

- 1) Déterminer le domaine de définition D_h de h puis calculer les limites de h aux bornes de D_h .
- 2) Démontrer que h admet un prolongement par continuité en 4 noté g. Déterminer g.
- 3) Étudier la dérivabilité de g en 4.
- 4) Soit k la fonction définie par : $\begin{cases} k(x) = h(x) & \text{si } x > 4 \\ k(x) = x + a & \text{si } x \leq 4 \end{cases}$; $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre réel a pour que k soit continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 23

1) On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x \sqrt{\left| \frac{1+x}{x} \right|} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- a) Ecrire f(x) sans le symbole valeur absolue.
- b) Étudier la continuité de f en 0.

2) Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x+1}{x-a} & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{a\} \\ g(a) = b \end{cases} \text{ Déterminer les réels a et b pour que g soit continue sur son ensemble de définition.}$$

EXERCICE 24

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 4\sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \sqrt{x + \alpha^2}} & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ } \alpha \text{ est un réel donné.}$$

Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

PARITE, PERIODICITE, AXE ET CENTRE DE SYMETRIE

EXERCICE 25

Déterminer la période de la fonction numérique f dans chacun des cas suivants :

- 1) $f(x) = \sin 3x$
- 2) $f(x) = 1 + \sin^2 x$
- 3) $f(x) = \tan x - \cos 4x$
- 4) $f(x) = \tan \frac{x}{6} - \cos \frac{x}{4}$
- 5) $f(x) = \sin \pi x - \cos \pi x$
- 6) $f(x) = \sin x\sqrt{3} - \cos x\sqrt{2}$
- 7) $f(x) = \cos 2x + \sin 4x$
- 8) $f(x) = \cos x + \sin x - \cos 2x$
- 9) **En complément :** $f(x) = E(x)$ où E(x) désigne la fonction partie entière.
- 10) $f(x) = E(2x - 1) - E(3x)$

EXERCICE 26

Étudier la parité des fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}$
- 2) $f(x) = \frac{2x^3}{1+x^2}$
- 3) $f(x) = \frac{x^2 \cos x}{\sin 3x}$
- 4) $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$
- 5) $f(x) = \frac{x^3}{1-x^3}$
- 6) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{x}$

EXERCICE 27

Soit f une fonction numérique de variable réelle x définie sur un intervalle I centré à l'origine. On pose :

$$h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

- 1) Etudier la parité des fonctions f et g .
- 2) En déduire que toute fonction numérique définie sur un intervalle centré à l'origine est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

EXERCICE 28

- 1) On donne : $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. Montrer que le point $\Omega(1, 2)$ est centre de symétrie pour C_f .

- 2) On donne $g(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$. Démontrer que le point $I(2, 3)$ est centre de symétrie pour C_g .

- 3) On pose $k(x) = x^3 - 3x - 2$. Montrer $A(0, -2)$ est centre de symétrie pour C_k .

- 4) On donne $h(x) = x^2 - 4x + 3$. Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie pour C_h .

- 5) On pose $J(x) = \sin^2 x - \sin x + 2$. Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie pour C_J .

- 6) On donne : $M(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{|x+1| + |x+3|}$. Démontrer que la droite d'équation $x = -2$ est axe de symétrie pour C_M .

- 7) On pose $f(x) = \sqrt{|4x+2|} - \sqrt{4x^2 + 4x + 5}$. Démontrer que la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est axe de symétrie pour C_f .

- 8) On donne

$$f(x) = \sin(x^2 - 2x + 3) + \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$$

Démontrer que la droite d'équation $x = 1$ est axe de symétrie pour C_f .

- 9) On considère les fonctions M et N définies par :

$$M(x) = 2x^4 + x^2 + 1 \text{ et } N(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

Démontrer que C_M admet un axe de symétrie et que C_N admet un centre de symétrie.

EXERCICE 29

f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

- 1) Etudier la parité de gof dans les cas suivants :
 - a) f et g sont paires
 - b) f et g sont impaires
 - c) f est paire et g est impaire
 - d) f est impaire et g est paire
- 2) Justifier que gof est paire lorsque f est paire.

EXERCICE 30

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 4x^5 - 3x^3 + x$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Démontrer que f est fonction impaire. En déduire l'ensemble d'étude de f : D_E .
- 3) Calculer les limites de f aux bornes de D_E .

EXERCICE 31

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 5}{x^2}$

- 1) Démontrer que f est paire. En déduire l'ensemble d'étude D_E de f .
- 2) Calculer les limites aux bornes de D_E .

EXERCICE 32

Soit C_f la courbe représentative de la fonction f définie

par : $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ et C_g la courbe de la fonction g définie par : $g(x) = x^2 + 2x - 5$

- a) Montrer que le point $I(-1, 2)$ est un centre de symétrie pour C_f .
- b) Montrer que la droite $D : x = -1$ est un axe de symétrie pour C_g .

CALCUL DE DERIVEES, ETUDES ET REPRESENTATIONS GRAPHIQUES DE FONCTIONS

EXERCICE 33

Calculer la dérivée de f dans les cas suivants :

- 1) $f(x) = 9x^5 + 3x^4 - x^2 - 1$
- 2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{x}$
- 3) $f(x) = 2x + 3x^{-2}$
- 4) $f(x) = \frac{2x+3}{1-3x}$
- 5) $f(x) = \frac{-2x^2 + 7x - 5}{2x - 1}$
- 6) $f(x) = 3x - 4 + \frac{2}{2x+7}$
- 7) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$
- 8) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$
- 9) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{(1-x^2)}$
- 10) $f(x) = (3x-2)^3$
- 11) $f(x) = (x^2 - 1)^4$
- 12) $f(x) = (2x+1)^3(1-5x)^4$

- 13) $f(x) = \left(\frac{2x}{1+x} \right)^4$
- 14) $f(x) = x^4 (x^3 + 4x - 3)^3$
- 15) $f(x) = \frac{(x-3)^2}{(3x+5)^3}$
- 16) $f(x) = \sqrt{1-2x}$
- 17) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$
- 18) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2-x}}$
- 19) $f(x) = x^2 \sqrt{x} + \frac{2}{x}$
- 20) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x+1}$
- 21) $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$
- 22) $f(x) = x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
- 23) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2\sqrt{x}}$
- 24) $f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$
- 25) $f(x) = \frac{1}{1 + |x|}$
- 26) $f(x) = |x^2 - 1| + 5|x| - 8$
- 27) $f(x) = \cos x + \cos 2x$
- 28) $f(x) = 2x - \cos x$
- 29) $f(x) = x \sin x$
- 30) $f(x) = \sin^2 x - 3 \cos x + 1$
- 31) $f(x) = \sin x + \cos^2 x$
- 32) $f(x) = \tan^2 x + \cos^2 x$
- 33) $f(x) = \tan 2x$; $f(x) = \tan(1 - 3x)$
- 34) $f(x) = \sin 2x \tan x + \cos^2 x$
- 35) $f(x) = 3 \cos 2x - 2 \sin 3x - \sin 4x$
- 36) $f(x) = -2 \cos 2x - 5 \cos^2 2x$
- 37) $f(x) = \cos^2 3x \sin 2x + \sin^2 3x \cos 2x$
- 38) $f(x) = x \sin 5x \sin 2x$
- 39) $f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$
- 40) $f(x) = \frac{\cos x + x \sin x}{\sin x - x \cos x}$
- 41) $f(x) = \frac{\sin 3x - \sin 2x}{\tan x}$
- 42) $f(x) = \frac{\sin 3x}{2 - \cos x}$
- 43) $f(x) = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$

EXERCICE 34

Etudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;
- 2) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$
- 3) $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{1 - 2x}$
- 4) $f(x) = \frac{5x^2 + x - 4}{-x^2 - 2x + 3}$
- 5) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$
- 6) $f(x) = x + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
- 7) $f(x) = x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
- 8) $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$
- 9) $f(x) = \sin^2 x - 2 \cos x$
- 10) $f(x) = \frac{1}{2} \cos 4x - \sin 2x$

EXERCICE 35

- 1) Soit $f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 2}{1 - x}$. Déterminer le domaine de définition D_f de f puis les réels a , b et c tels que pour tout x de D_f , $f(x) = ax + b + \frac{c}{1-x}$.
- 2) Soit $g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x}$. Déterminer le domaine de définition D_g de g et les réels a , b et c tels que pour tout x de D_g : $g(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$.
- 3) On donne $h(x) = x^3 + ax + b$. Déterminer les nombres réels a et b sachant que la courbe de h passe par les points $A(2; 3)$ et $B(-1; -2)$.
- 4) On donne $I(x) = ax + b + \frac{1}{3-x}$. Déterminer a et b sachant que $I(2) = 1$ et $I'(2) = 0$.
- 5) Soit $J(x) = ax + b - \frac{1}{1-x}$. Déterminer a et b sachant que sachant que l'équation $J(x) = 0$ admet 2 et -1 pour solutions.
- 6) Soit $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$. Calculer a , b et c sachant que la courbe de K passe $A(1, 0)$; $B(-3, 0)$ et admet une tangente horizontale en A .
- 7) Soit $M(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 2x}$. Déterminer les réels a , b et c sachant que la courbe de M passe $A(1; -4)$, coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 3 et admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale.

EXERCICE 36

Soit C la courbe de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 3 ; D_m \text{ la droite de coefficient}$$

directeur 1 passant par le point A (0, m).

- 1) Déterminer une équation de D_m .
- 2) Soit S l'ensemble des points communs à C et D_m . Déterminer m de sorte que S soit un singleton. On calculera les coordonnées de ce point.
- 3) Montrer que D_m est tangente à C.

EXERCICE 37

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2} \text{ et } g(x) = -2x^2 + x + 5$$

Déterminer les nombres réels a, b et c sachant C_f :

- 1) Admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
- 2) Coupe la courbe C_g au point d'abscisse 1 et admet en ce point la même tangente que C_g .

EXERCICE 38

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{-x^2 + bx + 3}{x - 1}$

- 1) Comment choisir le nombre réel b pour que f n'admette pas d'extremum.
- 2) Déterminer b pour que C_f admette au point d'abscisse une tangente parallèle à la droite D d'équation $2x + 2y - 3 = 0$.

EXERCICE 39

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{1 - x^5}{1 - x}$$

- 1) Calculer $f'(x)$.
- 2) En déduire que pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$ on a :

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = \frac{1 - 5x^4 + 4x^5}{(1 - x)^2}$$

- 3) Généraliser ce résultat à :

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

EXERCICE 40

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I symétrique par rapport à O.

Montrer que si f est impaire alors f' est paire et si f est paire alors f' est impaire.

DERIVEES SUCCESSIVES

EXERCICE 41

Soit : $f(x) = \frac{1}{1 - x} = (1 - x)^{-1}$. Démontrer que

$$f^{(n)}(x) = n!(1 - x)^{-(n+1)} ; x \neq 1.$$

EXERCICE 42

- 1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x + 1}. \text{ Calculer la dérivée d'ordre n de f.}$$

- 2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$g(x) = \frac{2x + 1}{(x + 1)^2}. \text{ Déterminer les réels a et b tels que}$$

$$\text{pour tout x de } \mathbb{R} - \{1\}, g(x) = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{(x + 1)^2}.$$

En déduire la dérivée nième de la fonction g.

EXERCICE 43

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

- 1) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout x réel.

- 2) Montrer par récurrence que, pour tout réel x,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^{n+1}}. P_n \text{ étant une fonction}$$

polynôme de degré n vérifiant pour tout réel x :

$$P_{n+1}(x) = (1 + x^2)P'_n(x) - 2(n + 1)xP_n(x).$$

EXERCICE 44

- 1) Soit $f(x) = \cos x$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ puis

démontrer que $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) ; n \geq 1$

Démontrer de même que : $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

- 2) En déduire la dérivée d'ordre n des fonctions

$\cos(ax + b)$ et $\sin(ax + b)$.

- 3) Déterminer les réels a et b tels que

$$\cos^3 x + \sin^3 x = a \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + b \sin(3x + \frac{\pi}{4})$$

puis calculer la dérivée d'ordre n de la fonction f définie par : $f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$.

ETUDES GENERALES DE FONCTIONS

EXERCICE 45

- 1) On donne $f(x) = 4x + 1 + \frac{1}{x}$

a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation.

b) Montrer que la droite d'équation $y = 4x + 1$ est asymptote oblique à C_f . Construire C_f et ses asymptotes

- 2) On donne $f(x) = x + \sqrt{x}$.

a) Trouver D_f puis calculer $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f et Tracer C_f .

EXERCICE 46

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x^3 - 4x - 1$

- 1) Dresser le tableau de variation f.

- 2) Montrer que I (0, -1) est centre de symétrie pour C_f

- 3) Construire C_f sur $[0, +\infty[\cap D_f$ puis en déduire C_f sur $]-\infty, 0] \cap D_f$.

EXERCICE 47

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{3x + 1}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Déterminer les réels a, b, c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{3x + 1}$$
- 3) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations.
- 4) Montrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à C_f puis tracer C_f

EXERCICE 48

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{ax + b}{x + c}$

- 1) Déterminer les réels a, b et c pour que C_f admette $\Omega(1, 1)$ comme centre de symétrie et une tangente parallèle à la droite à la droite d'équation $y = 3x + 1$ au point d'abscisse 2.
- 2) Etudier les variations de f et construire C_f .

EXERCICE 49

On considère les fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1} ; g(x) = \left| \frac{2x+1}{x+1} \right| \text{ et } h(x) = \frac{|2x|+1}{|x|+1}$$

- 1) Etudier les variations de f . Construire la courbe C_f .
- 2) Montrer que les courbes C_g et C_h se construisent sans étudier les variations de g et h .
- 3) Construire C_g et C_h

EXERCICE 50

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + \frac{2}{x}$

- 1) Montrer que f est impaire. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^*$.
- 2) Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal ; préciser les asymptotes à la courbe (C) puis construire (C) .
- 3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}. \text{ Montrer que, pour tout } x \in \mathbb{R} - \{1\} : g(x) = f(x - 1) + 2.$$

En déduire que le point $I(1; 2)$ est centre de symétrie de la courbe (C') représentative de g . Sans étudier la fonction g , construire (C') dans le même repère (on précisera les asymptotes à la courbe (C')).

EXERCICE 51

I) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{2}{2x - 1}. \text{ Déterminer les réels } \alpha \text{ et } \beta$$

pour que C_f passe par le point $A(1; 5)$ et que la tangente en ce point ait pour coefficient directeur -3 .

II) Soit g définie par : $g(x) = \frac{2x^2 + 3x}{2x - 1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g puis montrer qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels

$$\text{que } g(x) = ax + b + \frac{c}{2x - 1}.$$

2) Etudier les variations de g .

3) Soit C_g la courbe représentative de g dans un

repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que la droite d'équation $y = x + 2$ est

asymptote à (C_g) et que le point $I(\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$ est centre

de symétrie pour C_g . Construire C_g .

III) Soit h définie par : $h(x) = \frac{2x^2 + 3x}{|2x - 1|}$.

Expliquer comment peut-on obtenir la courbe représentative (C_h) de h à partir de celle de g sans étudier les variations de h . On tracera C_h dans le repère

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ en utilisant une couleur différente.

EXERCICE 52

1) Déterminer les nombres réels a, b, c pour que la courbe représentative de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{2x - 1} \text{ passe par le point } O \text{ origine du}$$

repère, ait en ce point une tangente de coefficient directeur -2 et possède une asymptote oblique de coefficient directeur 2 .

2) On considère $f(x) = \frac{4x^2 + 2x}{2x - 1}$

a) Etudier les variations de f .

b) Montrer que le point d'intersection des asymptotes est centre de symétrie pour C_f .

c) Déterminer les points d'intersection de C_f avec les axes de coordonnées. Tracer C_f .

EXERCICE 53

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 2x + 2}$

1) Déterminer D_f

2) Déterminer les réels a et b de telle sorte que C_f passe par $A(2; 0)$ et admette au point d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -2x$

EXERCICE 54

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

1) Déterminer D_f puis les réels a, b et c tels

$$\text{que } f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}. \text{ En déduire que } C_f \text{ admet une}$$

asymptote oblique dont on précisera l'équation.

- 2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f puis préciser l'équation de l'autre asymptote à C_f .
- 3) Calculer $f'(x)$, dresser le tableau de variation de f .
- 4) Montrer que C_f admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.
- 5) Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 3.
- 6) Construire C_f puis résoudre l'équation $f(x) = m$.
- 7) Lorsque C_f coupe la droite d'équation $x = m$ en deux points distincts M_1 et M_2 , déterminer les coordonnées de I milieu de $[M_1M_2]$ en fonction de m . Montrer que le point I se déplace sur une droite dont on déterminera une équation. Représenter cette droite.

EXERCICE 55

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

- 1) Etudier les variations de f .
 - 2) Montrer qu'il existe quatre nombres réels a, b, c et d tels $\forall x \neq 1, f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x-1)^2}$
 - 3) En déduire la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à (C_f).
 - 4) Etudier les positions de (C_f) par rapport à (D).
 - 5) Trouver une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
 - 6) Construire la courbe (C_f), les asymptotes et la tangente (T) dans un repère orthogonal.
- Unités :** 2cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.
- 7) Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation :

$$x^3 - mx^2 + 2mx - m = 0.$$

EXERCICE 56

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}$

- 1) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variations. Préciser les équations des asymptotes à C_f .
- 2) Tracer C_f dans un repère orthonormé ($O, \vec{i}, \vec{j}$) unité 1 cm. Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre et le signe des solutions de l'équation : $(3-m)x^2 + (m-1)x + 2(m-1) = 0$.
- 3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]2; +\infty[$.
 - a) Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera le domaine et les variations.
 - b) Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère.

EXERCICE 57

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{|x^2 + x| + 1}{|x| + 1}$

- 1) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en -1 .
- 2) Etudier les variations de f .

- 3) Construire la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal ($O, \vec{i}, \vec{j}$).

EXERCICE 58

Soit g la fonction définie par : $g(x) = x - 1 + \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$.

On note (C_g) la courbe représentative de g dans un repère orthonormé ($O, \vec{i}, \vec{j}$).

- 1) Déterminer D_g puis écrire $g(x)$ sans le symbole valeur absolue.
- 2) Calculer les limites de g aux bornes de D_g .
- 3) a) Etudier la continuité de g sur D_g .
b) Etudier la dérivabilité de g en -1 . Interpréter graphiquement les résultats.
- 4) Dresser le tableau de variation de g .
- 5) Montrer que C_g admet une asymptote oblique puis étudier la position de C_g par rapport à cette asymptote.
- 6) Déterminer les points d'intersection de C_g avec les axes de coordonnées puis tracer C_g dans un repère.

EXERCICE 59: Une famille de paraboles

On considère la famille de fonctions f_m définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = (m-1)x^2 + 2mx - 3m$ où m est un paramètre réel. Soit C_m la courbe représentative de f_m

- 1) Démontrer qu'il existe deux points A et B dont on calculera les coordonnées, communs à toutes les courbes C_m .
 - 2) Etudier suivant les valeurs de m , le sens de variations de f_m . Etablir dans chaque cas le tableau de variations de f_m .
 - 3) Construire sur un même graphique les courbes C_1, C_{-1} et C_2 .
- On considère dans le plan le point $M_0(\alpha, \beta)$. Etudier, suivant les valeurs de α et β , le nombre de courbes C_m passant par M_0 .

EXERCICE 60 : Une famille d'hyperboles

On considère la famille de fonctions f_m définies sur

$\mathbb{R} - \{m\}$ par : $f_m(x) = \frac{(2m-1)x + m}{x-m}$ où est un

paramètre réel non nul. Soit H_m la courbe de f_m

- 1) Etudier les variations de la fonction f_1 et tracer H_1 .
- 2) Démontrer que, quel que soit m , les courbes H_m passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.
- 3) Ecrire une équation de la tangente en A à H_m .
- 4) Il existe un deuxième point P de la courbe H_m où la tangente est parallèle à la tangente en A . Déterminer l'ensemble des points P lorsque m varie.

EXERCICE 61

1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = x\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$

- a) Déterminer D_f et étudier les variations de f .
- b) Déterminer les branches infinies de C_f
- c) Tracer C_f dans un repère orthonormé unité 1 cm.
- 2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = f(|x|)$
Déduire de C_f le tracé de C_g .

EXERCICE 62

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x^2(x-2)}{x-1}}$

- 1) Déterminer D_f .
- 2) a) Déterminer le domaine de dérivabilité de f .
b) Montrer que C_f admet deux demi-tangentes T_1 et T_2 en un point que l'on déterminera.
c) Déterminer les équations de T_1 et T_2
- 3) Calculer $f'(x)$.
- 4) Etudier les branches infinies de f .
- 5) Construire C_f .

EXERCICE 63

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

- 1) Déterminer D_f .
- 2) Démontrer que $\forall x \in D_f, f(x) = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$.
- 3) Etudier la parité de f puis justifier le choix de $I =]0, 1[$ comme intervalle d'études de f .
- 4) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur I .
- 5) Etudier les variations de f sur I .
- 6) Tracer C_f sur I puis sur D_f dans un repère orthonormé (unité 5 cm).

EXERCICE 64

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x^4}}{x}$

- 1) Déterminer D_f puis étudier la continuité et la dérivabilité de f . Faire l'interprétation géométrique.
- 2) Démontrer que f est prolongeable par continuité sur son domaine. Déterminer son prolongement g .
- 3) Etudier la dérivabilité de g .
- 4) Représenter graphiquement g

EXERCICE 65

Soit définie par : $h(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{1+x - \sqrt{x^2+1}}$

- 7) Déterminer D_h et les limites aux bornes de D_h .
- 8) Déterminer les asymptotes de (C_h) . (On étudiera la position de (C_h) par rapport à l'asymptote « horizontale » et l'asymptote « oblique »)
- 9) Etudier les variations de h et dresser le tableau de variation de h .
- 10) Construire (C_h) dans un repère orthonormé.

EXERCICE 66

Soit la fonction f définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - x}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère

orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .

2) a) Montrer que $(D) : y = 2x - \frac{1}{2}$ est une

asymptote oblique à C_f en $+\infty$

b) Préciser la nature l'asymptote en $-\infty$.

c) Etudier la position de C_f par rapport à (D) .

3) a) Etudier la dérivabilité de f en 0^- et en 1^+ . Interpréter géométriquement les résultats.

b) Préciser l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R} \ 2\sqrt{x^2-x} + 2x - 1 = 0$; en déduire le signe $f'(x)$.

d) Etablir le tableau de variation de f .

4) Tracer C_f et (D) .

5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$ où m est un paramètre réel.

EXERCICE 67

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = -1 + \sqrt{1+x^2} \text{ et } g(x) = \frac{x^2}{1+|x|}$$

1) Etudier les variations de la fonction f et préciser les asymptotes éventuelles à C_f .

2) Etudier les variations de la fonction g et préciser les asymptotes éventuelles à C_g .

3) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 1+|x| \leq \sqrt{1+x^2}$; en déduire la position relative des courbes C_f et C_g .

4) Justifier la position de C_f et de C_g par rapport à leur asymptote commune.

5) Tracer dans un même repère C_f et C_g .

EXERCICE 68

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{|x^2-1|}}{x}$$

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

2) Montrer que l'étude de f peut être réduite à l'intervalle $I =]0; +\infty[$.

3) Ecrire f sans le symbole valeur absolue sur I .

4) Etudier la dérivabilité de f sur I .

5) Calculer $f'(x)$ dans les intervalles où f est dérivable puis étudier son signe. (On montrera que

pour tout x de $]0; 1[$, $x^2\sqrt{x^2-1} - 2 < 0$).

6) Calculer les limites de f aux bornes de I et préciser les équations des asymptotes éventuelles à C_f .

7) Dresser le tableau de variation de f .

8) Tracer C_f sur I puis sur son domaine de définition.

EXERCICE 69

Soit f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = a(x^2 - 1) + b(x - 1) + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1) f est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$ (justifier)
- 2) trouver une relation nécessaire et suffisante entre les réels a et b pour que f soit dérivable en $x = 1$. (on exprimera alors b en fonction de a dans l'expression de $f(x)$)

3) On suppose dans toute la suite de l'exercice que f est dérivable en 1.

a) Préciser alors le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$. Etudier suivant les valeurs du réel a le sens de variation de f . (distinguer deux cas : $a \geq 0$ et $a < 0$). Donner dans chaque cas le tableau de variation.

b) Comment faut-il choisir a pour que f s'annule en un point de $[1, +\infty[$.

c) Déterminer, lorsque a varie dans $]-\infty, 0[$ l'ensemble (D) décrit par les points de (C_f) en lesquels la tangente à (C_f) est parallèle à l'axe des abscisses.

d) On choisit $a = -1$, donner le tableau de variation de f correspondant et tracer la courbe (C_f)

dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm). (préciser la demi tangente au point O et tracer la tangente au point d'abscisse 1)

e) i) Pour $a = -1$ toujours, on pose $g(x) = -f(|x|)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Etudier la parité de g . interpréter graphiquement ce résultat.

ii) Pour $x \geq 0$, expliquer comment on obtient (C_g) à partir de (C_f)

iii) Sans nouveaux calculs, construire (C_g) sur le même graphique que (C_f) avec une couleur différent.

EXERCICE 70

On donne $f(x) = \sin 2x - 2 \sin x$.

- 1) Démontrer que f est périodique de période 2π et qu'elle est impaire.
- 2) Etudier f et tracer C_f sur $[0, \pi]$ et sur son domaine.

EXERCICE 71

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \cos^2 x \sin 2x$.

- 1) Montrer que f est périodique de période π et qu'elle est impaire.
- 2) Démontrer que $f'(x) = 2 \cos x \cos 3x$.
- 3) Etudier f et tracer C_f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et sur son domaine

EXERCICE 72

On donne $f(x) = \sin^4 x + 3 \cos^4 x - 1$.

- 1) Etudier la parité et la périodicité de f puis justifier le choix de $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ comme intervalle d'étude de f .
- 2) Démontrer que f est dérivable et que $f'(x) = 4 \cos x \sin x (1 + \cos 2x) (1 - \cos 2x)$.
- 3) Etudier f sur I et tracer C_f .

On tracera la tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 73

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$.

- 1) Déterminer D_f puis justifier le choix de $I =]-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}[$ comme intervalle d'étude de f .
- 2) Montrer que le point $I(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$ est centre de symétrie pour C_f .
- 3) Etudier et représenter graphiquement f .

EXERCICE 74

1) Déterminer le signe de la fonction g définie sur $[0, \pi]$ par $g(x) = 1 - 2 \cos x$.

2) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$.

- a) Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- b) Etudier la parité et la périodicité de f . En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $I = D_f \cap [0, \pi]$.
- c) Déterminer les limites de f sur I .
- d) Calculer la dérivée de f sur I . En déduire les variations de f sur I . Dresser le tableau de variation de f puis construire la courbe C_f sur son domaine.

EXERCICE 75

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos^3 x + \sqrt{3} \sin^3 x$$

- 1) Montrer que f est 2π -périodique ; f est-elle paire ? impaire ? Justifier le choix de $I = [-\pi; \pi]$ pour étudier f .
- 2) Calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = 3 \sin 2x \cos(x - \frac{2\pi}{3}) \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

Résoudre dans I l'équation $f'(x) = 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur I . Dresser le tableau de variation de f

3) Construire la courbe de f .

EXERCICE 76

1) Soit g la fonction définie par :

$g(x) = x \cos x - \sin x$ sur $[0; \pi]$. Etudier g et dresser son tableau de variation. En déduire le signe de $g(x)$.

2) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x

$$\text{définie par : } \begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \in]0; \pi] \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Etudier les variations de f sur $]0; \pi]$.

3) Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3}$$

- a) Etudier les variations de la fonction φ en calculant $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ et $\varphi'''(x)$.
- b) Prouver alors que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
- 4) Construire C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

EXERCICE 77

Soit h la fonction définie par :
 $h(x) = -6 \sin x + 3 \cos 2x - 2 \sin 3x$

1) a) Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie pour C_f

b) Justifier le choix de $K = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ comme

intervalle d'étude de f .

2) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $h'(x) = 12 \cos x (\sin x - 1) (2 \sin x + 1)$.

b) Dresser le tableau de variation de h sur K .

c) Tracer C_h en expliquant toutes les étapes du tracé.

EXERCICE 78

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x}{\cos^3 x}.$$

1) Déterminer D_f puis justifier le choix de

$I = [0; \frac{\pi}{2}]$ comme intervalle d'étude de f .

2) a) Démontrer que $\forall x \in D_f$ $f'(x) = \frac{3 \cos 2x}{\cos^4 x}$.

b) Résoudre dans I l'équation $f'(x) = 0$

c) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses sur I .

3) Construire C_f puis sur son domaine en expliquant le tracé.

EXERCICE 79

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ et

(C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1) Comment construit-on la courbe (C_1) représentative de la fonction qui à $x \mapsto \cos 2x$ à partir de la courbe (C_0) représentative de la fonction cosinus.

2) Construire (C_0), (C_1) et (C).

EXERCICE 80

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x - \sin x$.

1) Etudier la parité de f et exprimer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$.

En déduire qu'on peut étudier f sur $[0; \pi]$ et obtenir toute la courbe C_f à l'aide de transformations à préciser

2) Etudier les variations de f sur $[0; \pi]$.

3) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
 $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$.

En déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

4) Soit D_1 et D_2 les droites d'équations respectives :
 $y = 2x - 1$ et $y = 2x + 1$.

Déterminer les points communs à C_f et D_1 puis à C_f et D_2 en précisant les tangentes à ces points.

5) Etudier la position de C_f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

6) Tracer C_f dans un repère orthonormé (O, u, v) (unité 2 cm).

EXERCICE 81

Soit f la fonction définie sur $]-\pi; \pi[$ par :

$$f(\theta) = \frac{3}{1 + \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta}.$$

Vérifier que
 $\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta = 2 \cos(\theta + \frac{\pi}{3})$. Déterminer le sens de variation de f et en déduire le signe de $f(\theta)$.

COMPLEMENT : ACCROISSEMENTS FINIS.

EXERCICE 82

1) Montrer que, pour tout réel α tel que

$$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ on a } \tan \alpha \geq \alpha$$

2) Montrer que pour tous réels a et b
 $|\cos b - \cos a| \leq |b - a|$

EXERCICE 83

Soit f la fonction définie sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \tan x$.

Montrer que, pour tout x de $[0; \frac{\pi}{4}]$, $1 \leq f'(x) \leq 2$.

En déduire que, $\forall a \in [0; \frac{\pi}{4}]$, $a \leq \tan a \leq 2a$.

EXERCICE 84

La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$

1) Soit $x > 0$. Montrer que, pour tout t de

$$[x, x+1] \text{ on a : } \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2) Déduire de l'inégalité des accroissements

$$\text{finis que : } \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0.$$

3) Retrouver ce résultat par un calcul algébrique.

EXERCICE 85

Soit f la fonction définie de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \cos x.$$

Soit (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (unité 2 cm)

1) Etudier les variations de f .

2) Déterminer une équation de la tangente (D) à la courbe (C) au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

3) Montrer que $\forall x \in [0, \pi]$: $f'(x) \geq -\frac{3}{2}$.

4) Prouver que si

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \text{ alors : } f(x) \geq -\frac{3}{2}(x - \frac{\pi}{2}) + f(\frac{\pi}{2})$$

et que si

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ alors } f(x) \leq -\frac{3}{2}(x - \frac{\pi}{2}) + f(\frac{\pi}{2})$$

En déduire les positions relatives de (C) et de (D).

5) Tracer (C) et (D).

**FUNCTION CONTINUE SUR UN
INTERVALLE, IMAGE D'UN
INTERVALLE PAR UNE FONCTION
CONTINUE, THEOREME DES
VALEURS INTERMEDIAIRES,
BIJECTION ET BIJECTION
RECIPROQUE.**

EXERCICE 86

Soit la fonction f définie par : $f(x) = -x^2 + 4x + 2$.

- 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Déterminer l'image par f des intervalles suivants : $] -\infty ; 1]$; $] 3 ; +\infty [$; $[0, 4]$; $[-1, +\infty[$.
- 3) Démontrer que f réalise une bijection de $I = [2 ; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.

EXERCICE 87

Soit f une fonction numérique dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$
f	3 $\swarrow$ $-\infty$	$-\infty$	-2 $\nwarrow$ 1	

Déterminer en justifiant le nombre de solutions de chacune des équations suivantes :

- 1) $f(x) = 0$
- 2) $f(x) = 1$
- 3) $f(x) = -1$
- 4) $f(x) = 4$

EXERCICE 88

- 1) On donne $f(x) = x^5 - 5x - 5$.
a) Etudier les variations de f .
b) En déduire le nombre de solutions de l'équation $(E) : x^5 - 5x - 5 = 0$.
- 2) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la (ou des) solution(s).

EXERCICE 89

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $I = [0, 1]$ et à valeur dans I . On se propose de montrer que l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution dans I .

- 1) Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - x$.
a) Montrer que g est continue sur I .
b) Etudier le signe de $g(0)$ et de $g(1)$.
c) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans I . Conclure pour l'équation $f(x) = x$.

- 2) On suppose que f est strictement croissante sur I . Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans I .

EXERCICE 90

Soit g la fonction définie par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$

- 1) Etudier les variations de g .
- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .
- 3) Encadrer α à 10^{-1} près.
- 4) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

EXERCICE 91

Soit h la fonction définie par : $h(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$

- 1) Etudier les variations de h .
- 2) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution β .
- 3) Calculer β .
- 4) Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x

EXERCICE 92

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$$

- 1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
- 2) Dédire de 1) que l'équation $(E) : x^2(x-3) = 6(1-x)$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique notée α . Donner un encadrement de α à 0,1 près.

EXERCICE 93

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2) Démontrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est bijective.
- 3) Vérifier que f^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$ par $f^{-1}(x) = x|x|$.

EXERCICE 94

Soit f la fonction définie sur $[0; \pi]$ par :

$f(x) = \cos^3 x - 3 \cos x + 2$ et φ la fonction définie sur $[-1; 1]$ par : $\varphi(x) = x^3 - 3x + 2$.

- 1) a) Déterminer le sens de variation de φ .
b) En déduire le sens de variation de f .
- 2) Déterminer l'image par f de l'intervalle $[0; \pi]$ et représenter graphiquement f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
- 3) Justifier que pour tout nombre λ de l'intervalle $[0, 4]$ l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution.
- 4) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq \frac{27}{8}$.

EXERCICE 95

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1.$$

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f et les limites de f aux bornes de D_f .
- 2) Etudier la dérivabilité de f en -1 . Interpréter graphiquement le résultat.
- 3) Etudier les variations de f et tracer C_f dans un repère orthonormé.
- 4) Montrer que f est une bijection de l'intervalle $I = [-1; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
- 5) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f .
Expliciter f^{-1} . Tracer $C_{f^{-1}}$ sans étudier f^{-1} .
- 6) Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} .
- 7) Calculer $(f^{-1})'(x)$.
a) En utilisant l'expression de $f^{-1}(x)$.
b) En utilisant le théorème sur la dérivée de la fonction réciproque.

EXERCICE 96

Soit f la fonction définie par : $f(x) = |1-x| - \frac{1}{x}$.

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f , calculer les limites de f aux bornes de D_f et étudier les branches infinies.
- 2) Etudier la dérivabilité de f en 1 . Interpréter graphiquement le résultat.
- 3) Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ où f est dérivable. Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation.
- 4) Soit C_f la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, u, v) , A le point d'intersection de C_f et de la droite (D) d'équation $y = 1 - x$.
a) Tracer C_f .
b) Déterminer les coordonnées de A .
En déduire graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 1 - x$.
- 5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$.
a) Démontrer que g est une bijection de $[1; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
b) Démontrer que la bijection réciproque g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$. Calculer $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$.
- 6) Tracer la courbe $C_{g^{-1}}$.
- 7) Expliciter g^{-1} .

EXERCICE 97

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

- 1) Etudier les variations de f .
- 2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$.
- 3) a) Exprimer $\cos 3\alpha$ en fonction de $\cos \alpha$.
b) On pose $x = 2 \cos \alpha$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $2 \cos 3\alpha - 1 = 0$.
c) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

EXERCICE 98

- 1) Soit h la fonction définie sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ par

$$h(x) = 2 \tan x - \pi + 2x$$

- a) Montrer que l'équation
(E) : $\tan x = \frac{\pi}{2} - x$; $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$ équivaut à l'équation $h(x) = 0$.
b) Etudier le sens de variation de h . En déduire l'équation (E) admet une unique solution α .
- 2) a) Montrer que α vérifie : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
b) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

EXERCICE 99

On considère les fonctions g et f définies par :

$$g(x) = \cotan x - 2x \text{ sur }]0; \pi[\text{ et } f(x) = x \cos^2 x \text{ sur } [0; \pi]$$

- 1) Etudier les variations de g . En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}]$.
- 2) Etudier les variations de f .
- 3) Construire C_f ainsi les tangentes à C_f aux points d'abscisses 0 et π .

EXERCICE 100

On donne : $h(x) = \cos 2x + \frac{1}{4 \cos 2x} + 2$.

- 1) Déterminer le domaine de définition D_h de h .
- 2) Montrer qu'on peut réduire l'étude de h à l'intervalle $I = [0; \frac{\pi}{4} \cup \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$.
- 3) Montrer que h est dérivable sur D_h et que :
$$h'(x) = \frac{\cos x \sin x (1 - 2 \cos 2x) (1 + \cos 2x)}{\cos^2 2x}$$

En déduire les variations de h sur I .
- 4) a) Sans résoudre explicitement l'équation $h(x) = 0$, montrer qu'elle admet une unique solution $\alpha \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$. En déduire le signe de h sur I .
b) Résoudre explicitement l'équation $h(x) = 0$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
- 5) Tracer la courbe de h sur $[-\pi; \pi]$.
- 6) Soit g la restriction de h à l'intervalle $]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}]$.
a) Montrer que g admet une bijection réciproque notée g^{-1} .
b) Calculer $(g^{-1})'(0)$ en fonction $h'(\alpha)$.

Monsieur Ousmane Coundoul 557 11 39

EXERCICE 101

On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle x définies par :

$$f(x) = \frac{1}{3} \left(x^2 + x + \frac{1}{x} \right) \text{ et } g(x) = x^3 + x^2 - 1.$$

- 1) Montrer que pour tout $x \neq 0$ les nombres $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
- 2) Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α avec $0 < \alpha < 1$.
- 3) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 4) On désigne par (C) la représentation graphique de la fonction dans un repère orthonormé

$\rightarrow \rightarrow$
(O, i, j) (unité 3 cm), par I le point de (C) d'abscisse -1 et par J celui de (C) d'abscisse 1.

a) Vérifier que la droite (IJ) est la tangente en J à (C) .

b) Déterminer une équation de la tangente (T) en I à (C) .

5) Etudier la position de (C) par rapport à (T) .

6) On désigne par (P) la parabole d'équation

$$y = \frac{1}{3} (x^2 + x).$$

a) Démontrer que (C) et (P) sont asymptotes.

b) Etudier la position de (C) et de (P) .

7) Utiliser les résultats précédents pour tracer la courbe (C) dans le repère. (On prendra $\frac{2}{3}$ comme valeur approchée de α .)

EXERCICE 102

1) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 2}.$$

a) Déterminer l'ensemble de définition D de f .

b) Etudier : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c) Ecrire $f(x)$ sous la forme $g(x)\sqrt{x+2}$; où g est une fonction à expliciter. Etudier alors la dérivabilité de f en -2 puis en 1.

d) Calculer $f'(x)$ pour $x \in D - \{-2, 1\}$.

e) Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variation de f .

2) Montrer que l'équation $x \in [2, 4; 2, 5]$, $f(x) = 3$ admet une solution unique.

3) Le plan est muni d'un repère orthonormal

$\rightarrow \rightarrow$, $\parallel \rightarrow \parallel$
(O, u, v), $\parallel u \parallel = 2\text{cm}$. On désigne par C la courbe

représentative de f dans le plan.

a) Interpréter graphiquement les résultats obtenus en 1b) et en 1c)

b) Tracer C .

4) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx$ suivant le réel m .

EXERCICE 103

Soit f la fonction définie sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sin^2 x$.

1) Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} .

2) Déterminer l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable et démontrer que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

EXERCICE 104

Soit f la fonction définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

1) Démontrer que la fonction f réalise une bijection de $]0; \frac{\pi}{2}[$ vers un intervalle J que l'on précisera.

2) Démontrer que f^{-1} est dérivable sur J .

3) Démontrer que

$$\forall x \in J, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

EXERCICE 105

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + 2 - \frac{2x}{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x - 1 - 3\sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1

3) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

4) Montrer que C_f admet deux asymptotes D_1 et D_2 à préciser. Etudier la position de C_f par rapport à D_1 et D_2 .

5) Calculer $f'(x)$ dans les intervalles où f est dérivable. Etablir le tableau de variation de f

6) Tracer C_f et ses asymptotes dans un repère orthonormal.

7) Soit g la restriction de f dans à $I =]-\infty; 1[$.

a) Montrer que g est bijective de I sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que C_f coupe $D : y = x$ en un point unique A d'abscisse $\alpha \in \left] \frac{1}{3}; \frac{3}{4} \right[$.

c) Soit g^{-1} la réciproque de g . Montrer que g^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(g^{-1})'(2)$.

d) Tracer la courbe $C_{g^{-1}}$ de C_g dans le même repère.

A Monsieur Libasse Ndiaye
Professeur de Mathématiques au Lycée Kennedy

EXERCICE 106

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{(x^2-2x)^2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

On note C sa courbe dans un repère orthonormé.

PARTIE A

- 1) Etudier le signe sur $\mathbb{R}$ du produit :

$$(-3x^2 + 6x - 4)(x^2 - 2x)$$

- 2) On pose : $\varphi(x) = -x\sqrt{1+x^2} - 1$.

a) Etudier les variations de la fonction φ . En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α . Calculer la valeur de α en résolvant directement cette équation.

- b) Préciser le signe de φ suivant les valeurs de x .

PARTIE B

- 1) a) Préciser l'ensemble de définition D de f et calculer les limites de f aux bornes de D . Interpréter graphiquement le résultat.

- b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D .

- 2) a) Calculer $f'(x)$ sur le domaine de dérivabilité de f .

- b) Déduire de A) le signe de $f'(x)$. Dresser le tableau de variation de f .

- c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C au point d'abscisse 1. Etudier la position de T par rapport à C sur l'intervalle $]0, 2[$.

PARTIE C

- 1) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{3-\alpha^4}{3\alpha}$.
- 2) Déterminer la primitive de f sur $]0, 2[$ qui s'annule en 1.
- 3) Construire C et T .

EXERCICE 107

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2 - 4x + 1}$$

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- 2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f .
- 3) Etudier les variations puis dresser le tableau de variation de f .
- 4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in]1, 2[$.
- 5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; 2 - \sqrt{3}]$.
- a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
- b) Dresser le tableau de variation de la bijection réciproque g^{-1} .
- c) Tracer les courbes C_f et $C_{g^{-1}}$ dans un même

repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 108

Soit P le polynôme défini par $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 4$

- 1) a) Etudier la fonction P . En déduire que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution α dans $]1; +\infty[$.

- b) déterminer le signe de $P(x)$ sur $]1; +\infty[$.

- 2) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-2x+3}{\sqrt{x^3-1}}$$

- a) Déterminer D_f puis exprimer $f'(x)$ en fonction de $P(x)$.

- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- c) Dresser le tableau de variation de f .

EXERCICE 109

- A) Soit $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

- 1) Etudier les variations de g .

- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution réelle α appartenant à $]1, 6; 1, 7[$.

- B) Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$

- 1) Etudier les variations de f .

- 2) C_f représente la courbe de f dans un repère

orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité 4 cm).

- a) Déterminer l'équation de la tangente (Δ) au point d'abscisse 0.

- b) Vérifier que : $f(x) = 1 - x + \frac{x^3(x-1)}{1+x^3}$;

En déduire la position de C_f par rapport à (Δ) .

- c) Démontrer que C_f est située au dessus de sa tangente (T) au point d'abscisse 1.

- d) Tracer C_f (T) et (Δ) dans le repère

EXERCICE 110

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{2x^2 + x} & \text{si } x \geq 0 \\ x\sqrt{\frac{x}{x-2}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

Interpréter graphiquement les résultats.

- 2) Dresser le tableau de variation de f .

- 3) Etudier les branches infinies de C_f . Etudier la

position de C_f par rapport aux asymptotes éventuelles.

- 4) Démontrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

- 5) On note f^{-1} la bijection réciproque de f .

- a) Donner les variations de f^{-1} .

- b) Préciser les branches infinies à la courbe de f^{-1} .

- c) f^{-1} est-elle dérivable 0.

- d) Donner l'équation de la tangente à $C_{f^{-1}}$ au

point d'abscisse $1 - \sqrt{3}$.

- e) Expliciter $f^{-1}(x)$.

- 6) Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans un même repère

EXERCICE 111

A) On donne : $f(x) = 2x\sqrt{|1-x^2|}$.

- 1) Déterminer le domaine de f. Ecrire f sans le symbole valeur absolue puis calculer les limites de f aux bornes de son domaine.
- 2) Etudier la dérivabilité de f en 1 et -1 puis interpréter graphiquement les résultats.
- 3) Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable puis établir le tableau de variation de f.

B) On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \in]0; +\infty[\\ g(x) = -x + \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x \in]-\infty; 0] \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2) Etudier la nature de la branche infinie de g en $+\infty$. Démontrer que C_g admet une asymptote oblique en $-\infty$ puis étudier la position de C_g par rapport à cette asymptote.
- 3) Calculer $g'(x)$ sur les intervalles où g est dérivable puis dresser le tableau de variation de g en utilisant les résultats de A).
- 4) Tracer les droites remarquables et C_g dans un

repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm).

- 5) Soit h la restriction de g à l'intervalle $] -\infty; 0]$
 - a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera le domaine de définition.
 - b) Préciser l'ensemble de dérivabilité et les variations de h^{-1} .
 - c) Sans utiliser l'expression explicite de $h^{-1}(x)$, calculer $(h^{-1})'(2)$.
 - d) Expliciter $h^{-1}(x)$.
 - e) Tracer $C_{h^{-1}}$ dans le repère précédent.

EXERCICE 112

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 1 + \sqrt{4x^2 + 4} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x + 1 + \frac{x}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de f en 0.
- 2) a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Montrer que la courbe C de f admet deux asymptotes obliques Δ en $+\infty$ et Δ' en $-\infty$. Donner une équation cartésienne de chacune d'elles.
c) Etudier la position de C par rapport à Δ sur $]0, +\infty[$ et celle de C par rapport à Δ' sur $] -\infty, 0]$.
- 3) a) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
b) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et pour $x < 0$, puis étudier le signe de $f'(x)$ pour $x > 0$ et pour $x < 0$. En déduire le tableau de variation de f.
- 4) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur f($\mathbb{R}$) à préciser.
b) La fonction f^{-1} est-elle dérivable en f(0) ?
c) Calculer $(f^{-1})' [f(\frac{1}{2})]$ et $(f^{-1})' [f(-\frac{1}{2})]$.

- 5) Construire C_f et $C_{f^{-1}}$ dans un même repère.

EXERCICE 113

A) On considère les fonctions h et g définies par :

$$h(x) = \sqrt{|1+x|} - \sqrt{|1-x|}$$

$$\text{et } g(x) = 2x\sqrt{|1-x^2|}$$

- 1) Etudier la parité de h et de g.
- 2) Exprimer h(x) et g(x) sans les symboles valeur absolue.
- 3) Etudier la continuité et la dérivabilité de h en -1 et g en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
- 4) Etudier les variations de h sur $] -\infty; 0]$ et de g sur $]0; +\infty[$.
- 5) Tracer C_g et C_h dans le même repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j})$.

B) Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = h(x) & \text{si } x < -1 \\ f(x) = g(x) & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de f en -1.
- 2) Etudier la dérivabilité de f en -1. Interpréter graphiquement le résultat.
- 3) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition D_f , puis préciser les asymptotes et branches infinies éventuelles de C_f .
- 4) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation f
- 5) Tracer C_f dans un autre repère.

EXERCICE 114

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
- 2) a) Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
b) Montrer que C_f admet deux asymptotes obliques et une asymptote verticale. Préciser la position de C_f par rapport à ses asymptotes obliques.
- 3) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
- 4) a) Calculer $f'(x)$ pour $x > 1$ et pour $x < 1$.
b) Dresser le tableau de variation de f.
c) Construire C_f , ses asymptotes et demi-tangentes au point d'abscisse 1 dans un repère

orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]1; +\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $g^{-1}(2\sqrt{2})$.

c) g^{-1} est-elle dérivable en $2\sqrt{2}$?

d) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

- 6) Construire $C_{g^{-1}}$ dans le même repère.

EXERCICE 115

On donne : $f(x) = x + \sqrt{4x^2 - 1}$

- 1) Etudier la continuité de f.
- 2) a) Etudier la dérivabilité de f. En particulier en $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.
b) Calculer $f'(x)$ sur intervalle où f est dérivable.
- 3) Démontrer les équivalences suivantes :
 $\sqrt{4x^2 - 1} + 4x < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\frac{1}{2}]$ et
 $\sqrt{1 - 4x^2} - 4x > 0 \Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2\sqrt{5}}[$.

En déduire le signe de $f'(x)$.

- 4) a) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine puis dresser le tableau de variation de f.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x].$$

En déduire les asymptotes à C_f puis tracer C_f .

- 5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; -\frac{1}{2}]$. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et les variations.

- 6) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x + h^{-1}(x)]$, en déduire que C_h

et $C_{h^{-1}}$ ont une asymptote commune.

Tracer $C_{h^{-1}}$ avec une autre couleur.

EXERCICE 116

- A) On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2 - x^3}{1 + x^2}$$

- 1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer que la courbe C_f de f admet une asymptote oblique. Préciser son équation cartésienne, puis étudier sa position par rapport à C_f .
- 3) Construire C_f dans un premier repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- B) Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 - 2x}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D de g. Etudier les limites de g aux bornes de D.
- 2) Montrer que la courbe C_g de g admet deux asymptotes. Préciser leurs équations cartésiennes respectives. Etudier la position de C_g relativement à chacune d'elles.
- 3) Etudier la dérivabilité de g sur D. Calculer la dérivée $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g.

- 4) Construire C_g dans un deuxième repère. On placera les demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 2.

- C) On définit la fonction h par :

$$\begin{cases} h(x) = f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ h(x) = g(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de h en 0.
- 2) Etudier la dérivabilité de h en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
- 3) Calculer $h'(x)$ pour $x < 0$ et pour $x > 0$.
- 4) Déduire de ce qui précède le tableau de variation de f.
- 5) Construire la courbe C_h de h, ainsi ses asymptotes et demi-tangentes au point d'abscisse 0 dans un troisième repère.
- D) 1) Montrer que h est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.
2) Montrer que l'équation $h(x) = 1$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α . Donner un encadrement de α à 0, 1 près.
3) a) h^{-1} est-elle dérivable en $h(0)$?
b) Calculer $h(-2)$, puis en déduire $h^{-1}(2\sqrt{2})$.
- 4) Construire dans le troisième repère la courbe $C_{h^{-1}}$ de h^{-1} , ses asymptotes, ainsi que ses demi-tangentes au point d'abscisse.

EXERCICE 117

On considère la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 3} & \text{si } x > 1 \\ f(x) = -2\sqrt{1 - x|x|} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

- 1) a) Déterminer D_f puis écrire f sans valeur absolue.
- b) Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$
- c) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ puis en $x_0 = 0$
- d) Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- 2) Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable. Etudier le signe de $f'(x)$ puis établir le tableau de variation de f.
- 3) a) Montrer que la courbe C de f admet une asymptote oblique Δ en $-\infty$. Etudier la position de C et de Δ .
b) Montrer que C admet une asymptote oblique D en $+\infty$. Etudier la position de C et de D.
- 4) Tracer C, D, Δ et les demi-tangentes.
- 5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; 1]$.
a) Montrer que g est une bijection de I sur J à préciser.
b) g^{-1} est-elle dérivable sur J ? Calculer $(g^{-1})'(-2)$.
c) Tracer la courbe Γ de g^{-1} dans le même repère

EXERCICE 118

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x(x-2)}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Soit C la courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) a) Déterminer D_f puis calculer les limites de f .
b) Etudier la dérivabilité de f aux points d'abscisses $x = 0$ et $x = 1$ après avoir écrit $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.
c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0; 1\}$ puis calculer $f'(x)$.

d) Résoudre $2\sqrt{x-x^2} + 1 - 2x \leq 0$ dans $]0; 1[$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur cet intervalle.

e) Dresser le tableau de variation de f .

- 2) Etudier les branches infinies. On précisera les positions relatives de C et les asymptotes éventuelles.
- 3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [1; +\infty[$

a) Montrer que g réalise une bijection de I sur J à préciser.

b) Soit g^{-1} sa bijection réciproque. Donner les variations de g^{-1} sur J .

c) g^{-1} est-elle dérivable en 2 ? Si oui calculer $(g^{-1})'(2)$.

d) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout x appartenant à J .

4) a) Construire C . On tracera les asymptotes éventuelles ainsi que les demi-tangentes.

b) Construire C g^{-1} dans le même repère.

EXERCICE 119

PARTIE A

$$\begin{cases} f(x) = x - 2\sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \frac{(x+2)^2 - |x+2|}{x-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- 1) Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f(x)$ sans le symbole valeur absolue.
- 2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- 3) Etudier la continuité de f en 0.
- 4) Etudier la dérivabilité de f en $x = 0$, $x = -2$ et $x = 1$. Interpréter graphiquement les résultats.
- 5) Donner la nature des branches infinies en $+\infty$ et en $-\infty$.

6) a) Etudier la position de C_f par rapport à l'asymptote oblique en $-\infty$ sur $] -\infty; -2]$.

b) Etudier la position de C_f par rapport à l'asymptote oblique en $+\infty$ sur $[1; +\infty[$.

PARTIE B

1) Calculer la dérivée de f dans les intervalles où f est dérivable.

2) Etudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f .

3) Soit g la restriction de f à $]1; +\infty[$.

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .

b) Encadrer α par deux entiers consécutifs.

PARTIE C

1) Montrer que g est une bijection sur $]1; +\infty[$.

Soit g^{-1} la bijection réciproque.

2) g^{-1} est-elle dérivable sur J ?

3) Calculer $g(2)$ et $g^{-1}(2 - 2\sqrt{3})$ puis

$(g^{-1})'(2 - 2\sqrt{3})$.

4) Expliciter l'expression $g^{-1}(x)$.

5) Tracer C_f et $C_{g^{-1}}$.

EXERCICE 120

PARTIE A

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$$

1) Etudier les variations de $g(x)$.

2) Montrer que $g(x) = 0$ admet une racine unique α .

3) Déterminer α .

4) Préciser le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + 1 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[\\ f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x - 1 & \text{si } x \in]0, 1[\end{cases}$$

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) Etudier la continuité de f en $x = 0$ et $x = 1$.

3) Etudier la dérivabilité de f en $x = 0$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

4) Donner la nature des branches infinies de f .

5) a) Etudier la position de C_f par rapport à son asymptote en $+\infty$ sur $]1; +\infty[$.

b) Etudier la position de C_f par rapport à son asymptote en $-\infty$ sur $] -\infty, 0]$.

6) Calculer $f'(x)$ dans les intervalles où f est dérivable et préciser le signe de $f'(x)$.

7) Donner le tableau de variation de f .

8) Existe-t-il des points où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?

PARTIE C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $] -\infty, 0]$

1) Montrer que h est bijective de $] -\infty, 0]$ vers un intervalle J que l'on précisera.

2) Sur quel intervalle h^{-1} est-elle dérivable ?

3) Calculer $h(-1)$ et $h^{-1}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$.

4) Donner l'équation de la tangente à $C_{h^{-1}}$ au point

au point d'abscisse $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) Tracer C_f et $C_{h^{-1}}$.

PRIMITIVES

EXERCICE 121

Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble des primitives de f sur un intervalle quelconque contenu dans son domaine de définition. (On ne cherchera pas à préciser cet intervalle).

- 1) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$
- 2) $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$
- 3) $f(x) = \sin x - 2 \cos x$ $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$
- 4) $f(x) = \cos\left(\frac{x - \pi}{4}\right)$ $f(x) = (x - 9)^3$
- 5) $f(x) = \sin x \cos^2 x$ $f(x) = \tan x + \tan^3 x$
- 6) $f(x) = x(x^2 + 1)^2$
- 7) $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$ $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x + 2}{x}\right)^3$
- 8) $f(x) = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}}$ $f(x) = 1 + \frac{1}{\tan^2 x}$
- 9) $f(x) = \sin x \cos x (\sin^2 x - 12)^2$
- 10) $f(x) = (x + 1)(x^2 + 2x + 2) \sqrt{x^2 + 2x + 2}$
- 11) $f(x) = \cos^2 2x + \sin^4 x$
- 12) $f(x) = \frac{1}{(1 + x)^2}$ $f(x) = \frac{x + 1}{(x^2 + 2x)^3}$
- 13) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^4}}$
- 14) $f(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 (x - 1)^2}$
- 15) $f(x) = \left(\frac{x}{x^4 + 1}\right)^3$ $f(x) = \frac{x}{(1 + x^2)^4}$
- 16) $f(x) = \frac{-3}{\sqrt{x} (5\sqrt{x} - 2)^3}$
- 17) $f(x) = \frac{6}{\sqrt{1 + x^2} (x + \sqrt{1 + x^2})^4}$
- 18) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ $f(x) = \frac{-7}{\sin^2 x}$
- 19) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2}$
- 20) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \sin x}}$
- 21) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \cos x}}$

- 22) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$
- 23) $f(x) = \sin 2x \cos 3x$ $f(x) = \sin x \sin 5x$
- 24) $f(x) = \cos 2x \cos x$ $f(x) = \sin^2 3x \cos^3 2x$
- 25) $f(x) = x \cos x^2$
- 26) $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$
- 27) $f(x) = \sin^5 x$ $f(x) = \sin^2 x \cos^3 x$
- 28) $f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$ $f(x) = 2 \sin^5 x \cos^4 x$
- 29) $f(x) = \cos^4 x$ $f(x) = \sin^4 x$
- 30) $f(x) = \cos^4 x \sin^2 x$
- 31) $f(x) = \tan^2 x$
- 32) $f(x) = \frac{\tan x}{\cos^2 x}$ $f(x) = \frac{-3}{1 + \sin 7x}$
- 33) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}$ $f(x) = \frac{2}{1 - \cos 5x}$
- 34) $f(x) = x \cos x + \sin x$
- 35) $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$
- 36) $f(x) = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$
- 37) $f(x) = \frac{\sin 2x + 2x}{\cos^2 x}$
- 38) $f(x) = \sqrt{1 + x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$
- 39) $f(x) = \cos^5 2x \sin^4 3x$
- 40) $f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 4x}$

EXERCICE 122

- 1) On considère les fonctions F et G définies par :

$$F(x) = \frac{1}{1 + x^{12}} \text{ et } G(x) = \frac{-x^{12}}{1 + x^{12}} \quad \text{Prouver}$$

sans calcul de dérivée que F et G sont deux primitives sur $\mathbb{R}$ d'une même fonction.

- 2) On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \text{ et } g(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

EXERCICE 123

Soit f et g les fonctions définies sur $I =]-2 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x + 1) \sqrt{x + 2} \text{ et}$$

$$g(x) = (3x^2 + 7x + 2) \sqrt{x + 2}$$

- 1) Calculer la dérivée g' de g sur I .
- 2) En déduire une primitive de f sur I .

EXERCICE 124

Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive de f sur I après avoir effectué la transformation indiquée.

1) $f(x) = x^2 (x-1)^{2000}$,

Ecrire $x^2 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$; a, b et c à trouver.

2) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$; $I =]1, +\infty[$ Ecrire $f(x)$ sous

la forme : $f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}$.

3) $f(x) = \frac{3x^2 + 12x - 1}{(x+2)^2}$; $I =]-2, +\infty[$.

Ecrire $f(x)$ sous la forme : $f(x) = a + \frac{b}{(x+2)^2}$.

4) $f(x) = \frac{2x^3 + 13x^2 + 24x + 2}{(x+3)^2}$;

$I =]-3, +\infty[$. Ecrire $f(x)$ sous la forme :

$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+3)^2}$

5) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$; $I =]0, 1[$.

Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$.

6) $f(x) = \frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$; $I =]-1, 1[$. Ecrire $f(x)$ sous

la forme : $f(x) = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x+1)^3}$

7) $f(x) = x\sqrt{1-2x}$. Ecrire $f(x)$ sous la forme : $f(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{1-2x}$

8) Exprimer $1 + \cos t$ en fonction de $\cos^2(\frac{t}{2})$.

En déduire une primitive de $f(x) = \frac{1}{1 + \cos 3x}$ sur $] -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}[$.

EXERCICE 125

1) On donne $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{1+x}}$.

Déterminer les réels a et b

$f(x) = a\sqrt{1+x} + \frac{b}{\sqrt{1+x}}$

En déduire une primitive de f sur $] -1; +\infty[$

2) Soit $f(x) = \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$.

Vérifier que : $x^2 + 1 = \frac{1}{2}[(x+1)^2 + (x^2-1)]$.

En déduire une primitive de f sur $]1; +\infty[$

EXERCICE 126

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin x + \sin^3 x$.

1) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et trouver 2 réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) + a f'(x) = b \sin x$.

2) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 127

Soit f la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \sin x$

1) Démontrer que pour tout réel x

$f(x) = 2 \cos x - f''(x)$

2) En déduire la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en π .

EXERCICE 128

Soit $f(x) = \frac{1}{1-\sin x}$ $x \in I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

En remarquant que $x \in I$

$\frac{1}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$, déterminer les primitives de f sur I .

EXERCICE 129

1) On considère la fonction f définie par :

$f(x) = 2x - 1 + \cos x$.

a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $f(0)$. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

2) Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 0. Etudier et représenter graphiquement la fonction F ainsi obtenue.

EXERCICE 130

1) Linéariser $\sin^2 x \cos^2 x$.

2) Soit $g(x) = \cos^2 x \sin^4 x$ et $h(x) = \sin^2 x \cos^4 x$.

a) Déterminer l'ensembles des primitives de chacune des fonctions $f = g + h$ et $k = h - g$.

b) En déduire l'ensemble des primitives de chacune des fonctions g et h .

EXERCICE 131

On se propose de déterminer l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions f et g définies par :

$f(x) = x^2 \cos^2 x$ et $g(x) = x^2 \sin^2 x$

1) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f + g$.

2) Déterminer les réels a et b tels que la fonction k définie par $k(x) = ax \sin 2x + b \cos 2x$ soit une primitive de f et de g .

3) En déduire l'ensemble des primitives des fonctions f et g .

EXERCICE 132

Soit $f(x) = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2} - x)^2}$.

1) Préciser l'ensemble de définition D de f , et justifier l'existence de primitives de f sur D .

2) En transformant l'expression de $f(x)$, déterminer la primitive F de f sur D , telle que : $F(0) = \frac{2}{3}$.