

VECTEURS DE L'ESPACE

I. Caractérisation vectorielle d'un plan

1) Notion de vecteur dans l'espace

Définition : Un vecteur de l'espace est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

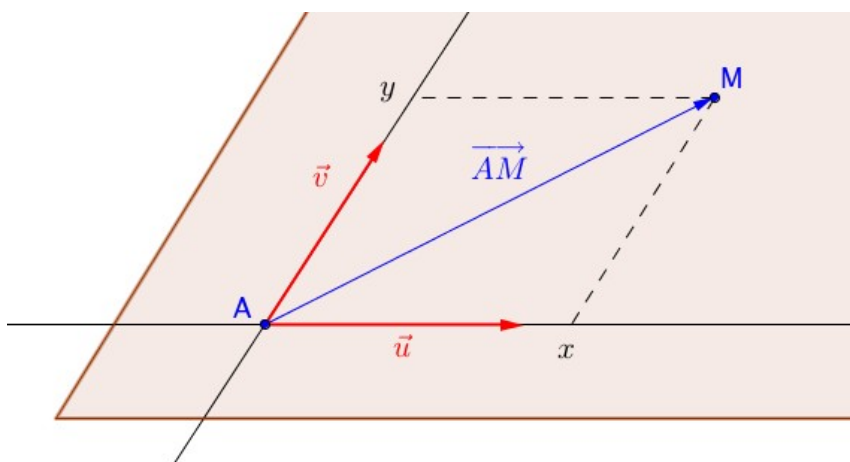
Remarque :

Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : Relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité, ... restent valides.

2) Plan de l'espace

Propriété : Soit un point A et deux vecteurs de l'espace u et v non colinéaires.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = xu + yv$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est le plan passant par A et dirigé par u et v .



Remarque :

Dans ces conditions, le triplet $(A; u, v)$ est un repère du plan.

Démonstration :

- Soit deux points B et C tel que $u = \overrightarrow{AB}$ et $v = \overrightarrow{AC}$.

u et v ne sont pas colinéaires donc $(A; u, v)$ est un repère du plan (ABC). Dans ce repère, tout point M de coordonnées $(x; y)$ est tel que $\overrightarrow{AM} = xu + yv$.

- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = xu + yv$.

Soit N le point du plan (ABC) de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(A; u, v)$. Alors
 $\vec{AN} = xu + yv$ et donc $\vec{AN} = \vec{AM}$. M et N sont confondus donc M appartient à (ABC) .

Remarque :

Un plan est donc totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Propriété : Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Démonstration :

Soit deux plans P et P' de repères respectifs $(A; u, v)$ et $(B; u, v)$.

- Si P et P' sont confondus, la démonstration est triviale.
- Dans la suite P et P' ne sont pas confondus.

Supposons que P et P' possèdent un point M en commun.

Alors dans P , on a : $\vec{AM} = xu + yv$ où $(x; y)$ sont les coordonnées de M dans P .

Et dans P' , on a : $\vec{BM} = x'u + y'v$ où $(x'; y')$ sont les coordonnées de M dans P' .

Donc $\vec{AB} = (x - x')u + (y - y')v$ donc B appartient à P .

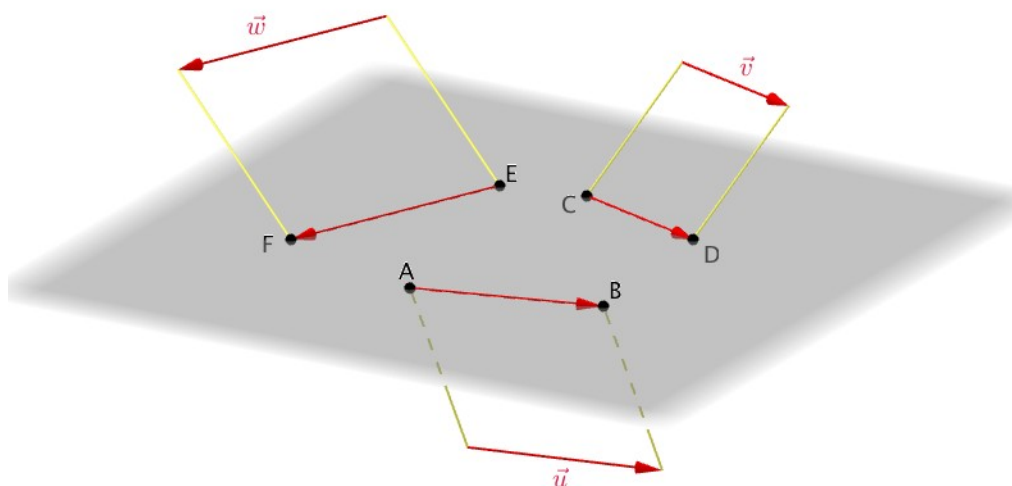
Donc le repère $(B; u, v)$ est un repère de P et donc P et P' sont confondus ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.

P et P' n'ont aucun point en commun et sont donc parallèles.

II. Vecteurs coplanaires et repère de l'espace

1) Vecteurs coplanaires

Définition : Trois vecteurs sont coplanaires s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.



Propriété : Soit i , j et k trois vecteurs non coplanaires.

Pour tout vecteur u , il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que $u = xi + yj + zk$.

Démonstration :

- Existence : Soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de u .

Soit P le plan de repère $(A; i; j)$.

Si B appartient à P alors $\overrightarrow{AB}$ se décompose suivant les vecteurs i et j .

Supposons que B n'appartient pas à P .

Soit d la droite passant par B de vecteur directeur k .

Comme k n'est pas colinéaire avec i et j , la droite d coupe le plan P en un point C .

On peut écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{AC}$ appartient au plan P donc il existe un couple $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{AC} = xi + yj$.

$\overrightarrow{BC}$ est colinéaire avec k donc il existe un réel z tel que $\overrightarrow{BC} = zk$.

Il existe donc un triplet $(x; y; z)$ tel que $\overrightarrow{AB} = u = xi + yj + zk$.

- Unicité : On suppose que l'on ait les deux écritures distinctes :

$$u = xi + yj + zk = x'i + y'j + z'k$$

$$\text{Alors } (x - x')i + (y - y')j + (z - z')k = 0.$$

Supposons que l'une au moins des trois différences n'est pas nulle, par exemple $z - z' \neq 0$.

Donc $k = \frac{x' - x}{z - z'}i + \frac{y' - y}{z - z'}j$ et dans ce cas, les vecteurs i , j et k seraient coplanaires.

Ce qui est exclu.

Les trois différences $x - x'$, $y - y'$ et $z - z'$ sont nulles.

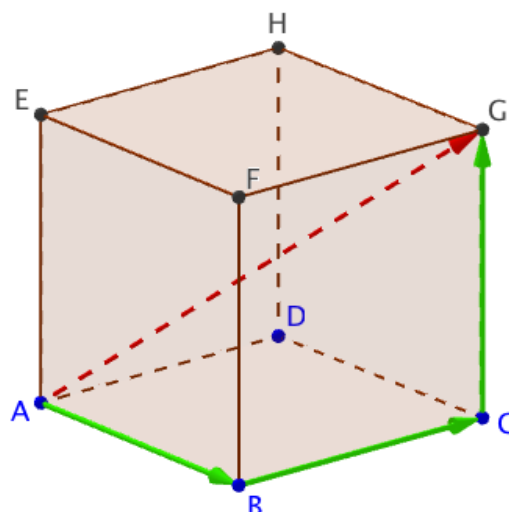
Exemple :

ABCDEFGH est un cube.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont non coplanaires.

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ se décompose en :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}.$$



2) Repère de l'espace

Définition : Soit i , j et k trois vecteurs non coplanaires. O est un point de l'espace. On appelle repère de l'espace le quadruplet $(O; i, j, k)$.

Remarques :

- O est appelé l'origine du repère.

- La décomposition $\vec{OM} = xi + yj + zk$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du point M .

- De même, la décomposition $u = xi + yj + zk$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du vecteur u .

Méthode : Démontrer l'alignement par décomposition de vecteurs

ABCDEFGH est un cube.

Soit I le milieu de $[AH]$ et J le point de $[FI]$ tel que

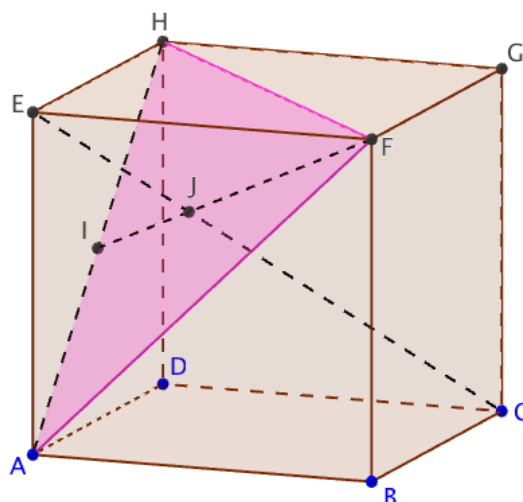
$$\vec{FJ} = \frac{2}{3} \vec{FI}.$$

Démontrer que les points E , J et C sont alignés.

Pour prouver cet alignement, on va démontrer que les vecteurs $\vec{EJ}$ et $\vec{EC}$ sont colinéaires.

Les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$ sont non coplanaires donc il est possible de décomposer les vecteurs $\vec{EJ}$ et $\vec{EC}$ en fonction de ces trois vecteurs.

$$\begin{aligned} \vec{EJ} &= \vec{EF} + \vec{FJ} \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3} \vec{FI} \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3} \left(\vec{FE} + \vec{EA} + \frac{1}{2} \vec{AH} \right) \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3} \left(\vec{FE} + \vec{EA} + \frac{1}{2} \vec{AE} + \frac{1}{2} \vec{EH} \right) \end{aligned}$$



$$\vec{AB} + \frac{2}{3} \left(\vec{FE} + \frac{1}{2} \vec{EA} + \frac{1}{2} \vec{EH} \right)$$

$$= \vec{AB} + \frac{2}{3} \vec{FE} + \frac{1}{3} \vec{EA} + \frac{1}{3} \vec{EH}$$

$$= \vec{AB} - \frac{2}{3} \vec{AB} - \frac{1}{3} \vec{AE} + \frac{1}{3} \vec{AD}$$

$$= \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AD} - \frac{1}{3} \vec{AE}$$

$$\text{donc } \vec{EJ} = \frac{1}{3} \vec{EC}.$$

Les vecteurs $\vec{EJ}$ et $\vec{EC}$ sont colinéaires et donc les points E, J et C sont alignés.

et

$$\vec{EC} = \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BC} \\ = \vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AE}$$

III. Représentation paramétrique d'une droite

Propriété : L'espace est muni d'un repère $(O; i, j, k)$.

Soit une droite d passant par un point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

On a : $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$

Remarque :

Ce système s'appelle une représentation paramétrique de la droite d .

Démonstration :

$M \in d \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\vec{AM} = t\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Méthode : Utiliser la représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère $(O; i, j, k)$.

Soit les points $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O; i, j)$.

- On commence par déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) :

Un vecteur directeur de (AB) est $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1-2 \\ -3-3 \\ 2-(-1) \end{pmatrix}$, soit $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de (AB) est :
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 6t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O; i, j)$.

Alors $z = 0$ car M appartient au plan de repère $(O; i, j)$.

Donc $-1 + 3t = 0$ soit $t = \frac{1}{3}$.

Et donc
$$\begin{cases} x = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\ y = 3 - 6 \times \frac{1}{3} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Le point M a donc pour coordonnées $\left(\frac{5}{3}; 1; 0\right)$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales