

## SUITES DE MATRICES ET MARCHES ALEATOIRES

### I. Suites de matrices colonnes

#### 1) Exemples :

a) La suite  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $U_n = \begin{pmatrix} n^2 \\ 3n+1 \end{pmatrix}$  est une suite de matrices colonnes dont les coefficients sont les suites numériques  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = n^2$  et  $v_n = 3n + 1$ .

b) Soit deux suites numériques couplées  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies pour tout entier naturel

$$n \text{ par : } u_0 = 2, v_0 = 4 \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3v_n + 1 \\ v_{n+1} = -u_n + 5v_n - 4 \end{cases}$$

On pose pour tout entier naturel  $n$  :  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

On pose encore :  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

On a alors  $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  et pour tout entier naturel  $n$ , la relation matricielle de récurrence :

$$U_{n+1} = AU_n + B.$$

En effet :

$$AU_n + B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n - 3v_n + 1 \\ -u_n + 5v_n - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

c) Soit une suite numérique  $(u_n)$  définie par une relation de récurrence d'ordre 2 :

$$u_0 = 2, u_1 = -1 \text{ et } u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n.$$

On pose pour tout entier naturel  $n$  :  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

On pose encore :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

On a alors  $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et pour tout entier naturel  $n$ , la relation matricielle de

réurrence :  $U_{n+1} = AU_n$ .

En effet,  $AU_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 3u_n + 2u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = U_{n+1}$

## 2) Terme général d'une suite de matrices

**Propriété :** Soit une suite de matrices colonnes  $(U_n)$  de taille  $p$  telle que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $U_{n+1} = AU_n$  où  $A$  est une matrice carrée de taille  $p$ .  
Alors, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $U_n = A^n U_0$ .

Démonstration :

On démontre cette propriété par récurrence.

- **Initialisation :**  $U_0 = A^0 U_0$  car  $A^0 = I_p$

- **Hérédité :**

- Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier  $k$  tel que la propriété soit vraie :  $U_k = A^k U_0$

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang  $k + 1$  :  $U_{k+1} = A^{k+1} U_0$

$$U_{k+1} = AU_k = A(A^k U_0) = (AA^k) U_0 = A^{k+1} U_0$$

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour  $n = 0$  et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ , soit :  $U_n = A^n U_0$ .

Méthode : Calculer des termes d'une suite à l'aide de matrices

Soit deux suites numériques couplées  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$

par :  $u_0 = 1, v_0 = -1$  et 
$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + 2v_n \end{cases}$$

Calculer  $u_6$  et  $v_6$ .

On pose pour tout entier naturel  $n$  :  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

On pose encore :  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

On a alors  $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et pour tout entier naturel  $n$ , la relation matricielle de récurrence :  $U_{n+1} = AU_n$ .

On alors  $U_n = A^n U_0$  et donc en particulier  $U_6 = A^6 U_0$ .

Soit en s'aidant de la calculatrice :

$$U_6 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^6 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2731 & -1365 \\ -2730 & 1366 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4096 \\ -4096 \end{pmatrix}$$

On en déduit que  $u_6 = 4096$  et  $v_6 = -4096$ .

## II. Convergence de suites de matrices colonnes

Définitions : On dit qu'une suite de matrices colonnes  $(U_n)$  de taille  $p$  est convergente si les  $p$  suites dont les termes sont les  $p$  coefficients de  $(U_n)$  sont convergentes.

La limite de cette suite est la matrice colonne dont les coefficients sont les  $p$  limites obtenues.

Dans tous les autres cas, on dit que la suite est divergente.

Exemples :

a) La suite  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $U_n = \begin{pmatrix} n^2 \\ 3n+1 \end{pmatrix}$  est divergente car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n+1 = +\infty.$$

b) La suite  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par  $U_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{n^2+2}{n^2+1} \end{pmatrix}$  est

convergente et sa limite est la matrice colonne  $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Propriété :  $(U_n)$  est une suite de matrices colonnes de taille  $p$  définie par la relation matricielle de récurrence  $U_{n+1} = AU_n + B$  où  $A$  est une matrice carrée de taille  $p$  et  $B$  est une matrice colonne à  $p$  lignes.

Si la suite  $(U_n)$  est convergente alors sa limite  $U$  est une matrice colonne vérifiant l'égalité  $U = AU + B$ .

Démonstration :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = U \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} AU_n + B = AU + B.$$

Par unicité des limites, on a  $U = AU + B$ .

### Méthode : Recherche d'une suite constante vérifiant une relation de récurrence

Soit une suite  $(U_n)$  de matrices colonnes définies pour tout entier naturel  $n$  par

$$U_{n+1} = AU_n + B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rechercher, si elle existe, la suite  $(U_n)$  constante.

Réolvons l'équation matricielle  $U = AU + B$ .

Soit  $U - AU = B$  soit encore  $(I_2 - A)U = B$

Et donc  $U = (I_2 - A)^{-1} B$ .

$$I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0,5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -0,5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{A l'aide la calculatrice, on obtient : } (I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -0,5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{9} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Et donc : } U = (I_2 - A)^{-1} B = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{9} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-13}{9} \\ \frac{-10}{9} \end{pmatrix}.$$

$$\text{La suite } (U_n) \text{ constante cherchée est donc } U_n = \begin{pmatrix} \frac{-13}{9} \\ \frac{-10}{9} \end{pmatrix}.$$

### III. Graphes et marches aléatoires

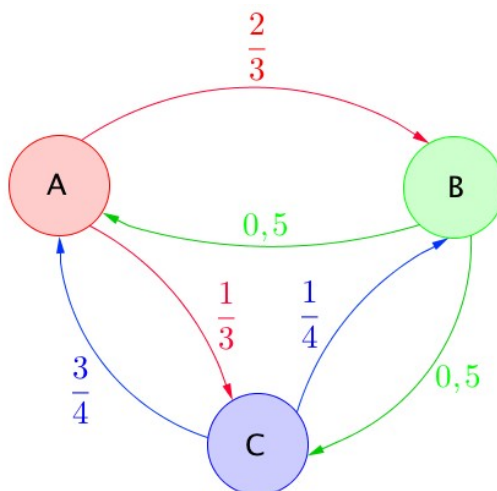
#### 1) Graphe

Dans une équipe de football, on étudie les passes que se font trois attaquants  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

Les probabilités qu'un attaquant passe le ballon à un autre sont représentées sur le schéma suivant.

Par exemple, la probabilité que l'attaquant  $A$  passe le ballon à l'attaquant  $B$  est égale à  $\frac{2}{3}$ .

Un tel schéma est appelé un **graphe**.  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont appelés les **sommets du graphe**.



## 2) Marche aléatoire

On considère la variable aléatoire  $X_n$  prenant les valeurs  $A$ ,  $B$  ou  $C$  à l'étape  $n$ .

$A$ ,  $B$  ou  $C$  s'appelle les **états** de  $X_n$ .

Par exemple,  $X_3 = B$  signifie que l'attaquant  $B$  possède le ballon après la 3<sup>e</sup> passe.

La suite de variables aléatoires  $(X_n)$  est appelée **marche aléatoire** sur l'ensemble des issues  $\{A, B, C\}$ .

Dans une marche aléatoire, l'état du processus à l'étape  $n + 1$  ne dépend que de celui à l'état  $n$ , mais non de ses états antérieurs. Ainsi, la probabilité que l'attaquant  $C$  possède le ballon ne dépend que de la position précédente du ballon (en  $A$  ou en  $B$ ) mais non de ses positions antérieures.

## 3) Probabilité de transition

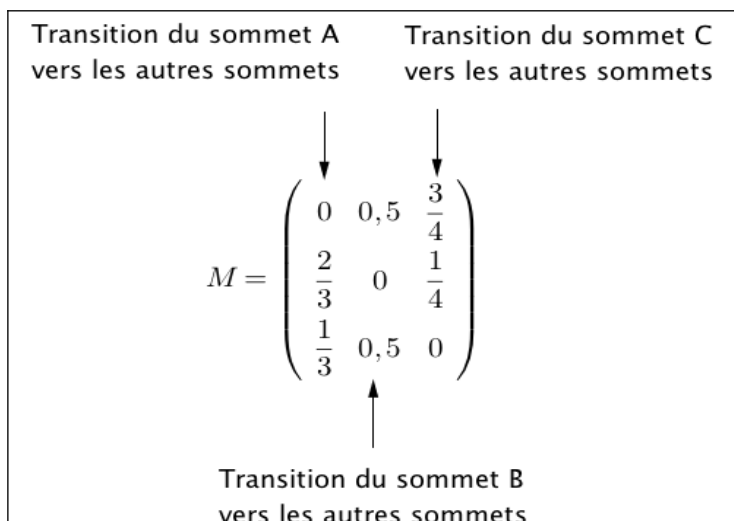
On considère la loi de probabilité de  $X_n$ , appelée **probabilité de transition**, qui donne la probabilité qu'un attaquant possède le ballon à l'étape  $n$  ( $n$ -ième passe).

On note par exemple  $P_{X_n=A}(X_{n+1}=C)$  la probabilité que le ballon se trouve chez l'attaquant  $C$  après la  $n+1$ -ième passe sachant que c'est l'attaquant  $A$  qui envoie le ballon. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle.

## 4) Matrice de transition

**Définition :** La matrice de transition d'une marche aléatoire est la matrice carrée dont le coefficient situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$  est la probabilité de transition du sommet  $j$  vers le sommet  $i$ .

Dans l'exemple, la matrice de transition est :



On trouve par exemple à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne la probabilité que le ballon arrive chez l'attaquant A sachant qu'il se trouvait chez l'attaquant B.

#### Remarques :

- Le coefficient  $a_{11}$  de la matrice  $M$  est nul car la probabilité que l'attaquant A garde le ballon est nulle. Il en est de même pour les coefficients  $a_{22}$  et  $a_{33}$ .
- La somme des coefficients d'une même colonne d'une matrice de transition est égale à 1.

**Définition :** La matrice colonne des états de la marche aléatoire après  $n$  étapes est la matrice colonne dont les coefficients sont les probabilités d'arrivée en chaque sommet après  $n$  étapes.

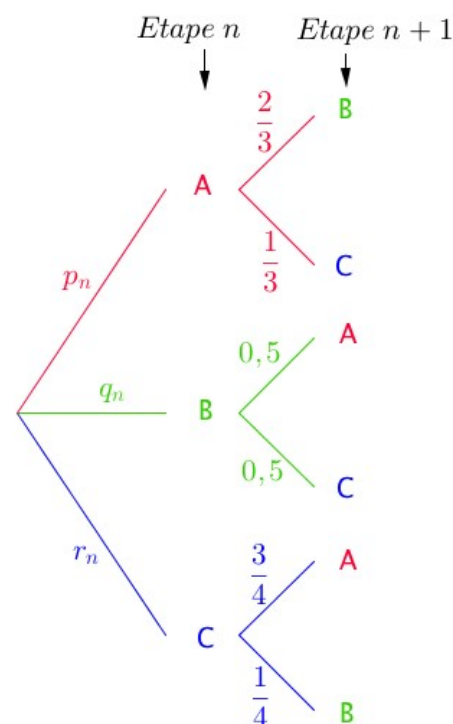
#### Exemple :

Dans l'exemple des passeurs au football, la matrice colonne des états après la 3<sup>e</sup> étape donnerait les probabilités que le ballon se trouve chez l'attaquant A, chez l'attaquant B et chez l'attaquant C après 3 passes.

L'arbre de probabilité ci-contre permet de résumer les probabilités de transition de l'étape  $n$  à l'étape  $n+1$ .

A l'aide de la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{cases} p_{n+1} = 0,5q_n + \frac{3}{4}r_n \\ q_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{4}r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + 0,5q_n \end{cases}$$



On note  $P_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$  la matrice colonne des états de la marche aléatoire après  $n$

étapes. On a alors :  $P_{n+1} = MP_n$ .

**Propriété :** On considère une marche aléatoire de matrice de transition  $M$  et dont la matrice colonne des états à l'étape  $n$  est  $P_n$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $P_{n+1} = MP_n$  et  $P_n = M^n P_0$ .

Exemple :

Dans l'exemple précédent, on suppose l'attaquant A possède le ballon à l'étape 0.

La matrice colonne des états après la 3<sup>e</sup> étape est égale à :  $P_3 = M^3 P_0$ .

On a  $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  car le ballon part de A.

Avec la calculatrice, on obtient :  $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0,5 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{48} & \frac{17}{32} \\ \frac{17}{36} & \frac{7}{24} & \frac{17}{96} \\ \frac{17}{72} & \frac{17}{48} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$

Donc  $P_3 = M^3 P_0 = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{48} & \frac{17}{32} \\ \frac{17}{36} & \frac{7}{24} & \frac{17}{96} \\ \frac{17}{72} & \frac{17}{48} & \frac{7}{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} \\ \frac{17}{36} \\ \frac{17}{72} \end{pmatrix}$ .

Ainsi par exemple, la probabilité que l'attaquant C possède le ballon après la 3<sup>e</sup> passe est égale à  $\frac{17}{72} \approx 0,24$ .

## IV. Etude asymptotique d'une marche aléatoire

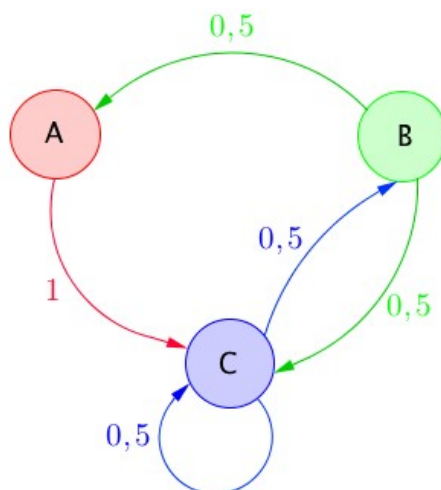
### 1) Marche aléatoire convergente

**Définition :** On dit qu'une marche aléatoire de matrice de transition  $M$  est convergente si la suite des matrices colonnes  $(P_n)$  des états de la marche aléatoire converge.

**Définition :** Si la suite  $(P_n)$  des états d'une marche aléatoire convergente vérifie  $P_{n+1} = MP_n$  alors la limite  $P$  de cette suite définit un état stable solution de l'équation  $P = MP$ .

**Méthode :** Etudier le comportement asymptotique d'une marche aléatoire à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel

On considère la marche aléatoire sur le graphe ci-dessous où l'on part de A :



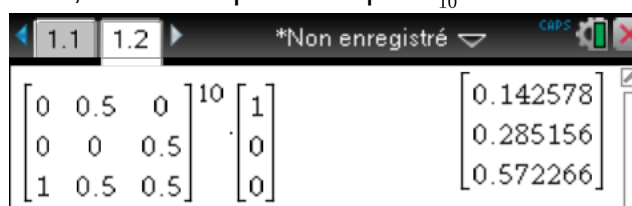
A l'aide de la calculatrice, déterminer l'état stable de cette marche aléatoire. On admet que la marche aléatoire est convergente.

La matrice de transition est  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $P_{n+1} = MP_n$  où  $(P_n)$  est la suite des matrices colonnes des états de la marche aléatoire.

On a donc :  $P_n = M^n P_0$  avec  $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  car on part de A.

A l'aide de la calculatrice, calculons par exemple  $P_{10}$  :



On peut effectuer les calculs pour des puissances de  $M$  de plus en plus grande. On

constate que l'état stable semble être la matrice colonne  $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$ .

L'état stable  $P$  vérifie l'équation  $P = MP$ , en effet :

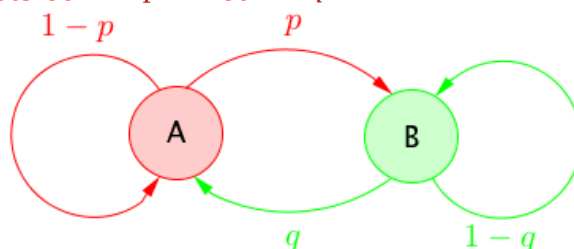
Remarque :

Cette méthode ne prouve pas que la marche aléatoire est convergente.

En supposant qu'elle l'est, elle permet seulement de déterminer l'état stable.

## 2) Cas d'un graphe à deux sommets

Propriété : On considère une marche aléatoire de matrice de transition  $M$  sur un graphe à deux sommets où  $0 < p < 1$  et  $0 < q < 1$  :



Alors on a  $M = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$  et la suite des matrices colonnes  $(P_n)$  des états de la marche aléatoire converge vers un état stable  $P$  tel que  $P = MP$ .  
 $P$  ne dépend pas de l'état initial  $P_0$ .

Démonstration :

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $P_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$  avec  $p_n + q_n = 1$ .

Comme  $P_{n+1} = MP_n$ , on a :

$$p_{n+1} = (1-p)p_n + q \times q_n = (1-p)p_n + q(1-p_n) = (1-p-q)p_n + q.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = p_n - \frac{q}{p+q}$  et on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{q}{p+q} \\
&= (1-p-q)p_n + q - \frac{q}{p+q} \\
&= (1-p-q)p_n - \frac{q(1-p-q)}{p+q} \\
&= (1-p-q) \left( p_n - \frac{q}{p+q} \right) \\
&= (1-p-q)u_n
\end{aligned}$$

$(u_n)$  est donc une suite géométrique de raison  $1-p-q$ .

Comme  $0 < p+q < 2$ , on a  $|1-p-q| < 1$  et donc  $(u_n)$  converge vers 0.

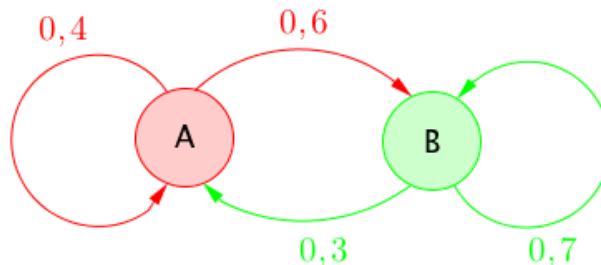
D'où  $(p_n)$  converge vers  $\frac{q}{p+q}$ .

Comme  $q_n = 1 - p_n$ ,  $(q_n)$  converge vers  $\frac{p}{p+q}$ .

Les limites de  $(u_n)$  et  $(q_n)$  ne dépendent donc pas de l'état initial.

**Méthode :** Etudier le comportement asymptotique d'une marche aléatoire sur un graphe à deux sommets

On considère la marche aléatoire sur le graphe ci-dessous :



Etudier la convergence de la marche aléatoire.

La matrice de transition est  $M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,6 & 0,7 \end{pmatrix}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $P_{n+1} = MP_n$  où  $(P_n)$  est la suite des matrices colonnes des états de la marche aléatoire.

L'état stable  $P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$  vérifie l'équation  $P = MP$ , soit  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,6 & 0,7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ .

Ainsi, on a le système  $\begin{cases} p = 0,4p + 0,3q \\ q = 0,6p + 0,7q \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,6p = 0,3q \\ 0,3q = 0,6p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow q = 2p$$

Comme  $p + q = 1$ , on a  $1 - p = 2p$  et donc  $p = \frac{1}{3}$  et  $q = \frac{2}{3}$ .

L'état stable du graphe est donc  $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ .

Cela signifie que quelque soit l'état initial (départ de  $A$  ou de  $B$ ), les probabilités d'être en  $A$  et en  $B$  tendent respectivement vers  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{2}{3}$ .



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)