

NOMBRES COMPLEXES (Partie 2)

Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O; u; v)$.

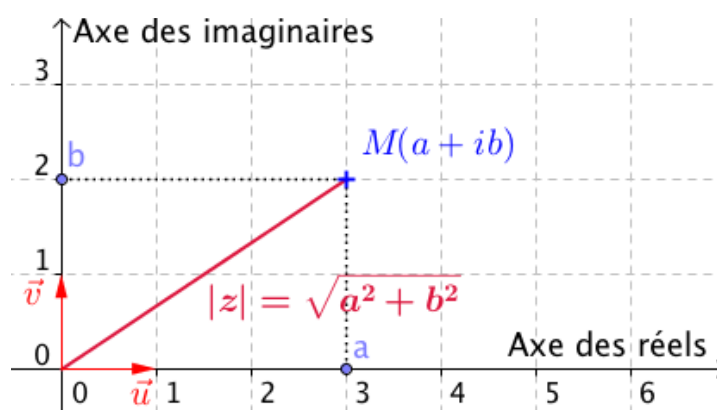
I. Argument, module et forme trigonométrique

1) Module

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$.

On appelle module de z , le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$.

M est un point d'affixe z .
Alors le module de z est égal à la distance OM.



Propriétés : Soit z et z' deux nombres complexes.

a) $|z|^2 = z\bar{z}$

b) $|\bar{z}| = |z|$

c) $|-z| = |z|$

Démonstrations :

a) $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

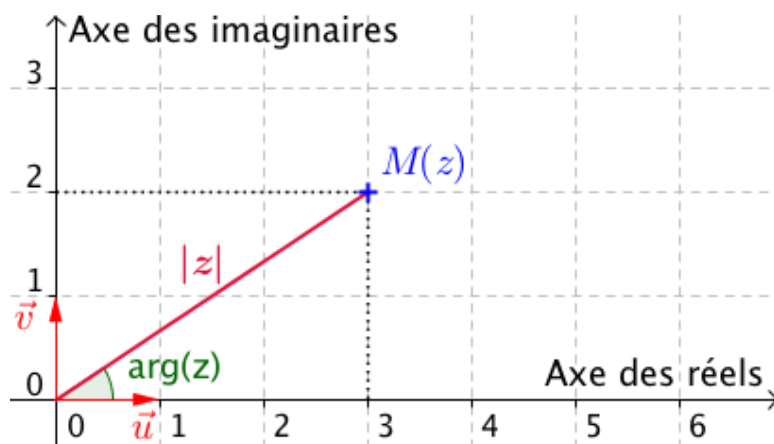
b) $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

c) $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

2) Argument

Définition : Soit un point M d'affixe z non nulle.

On appelle argument de z , notée $\arg(z)$ une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u}; \vec{OM})$.



Remarques :

- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme $\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On notera $\arg(z)$ modulo 2π ou $\arg(z) [2\pi]$

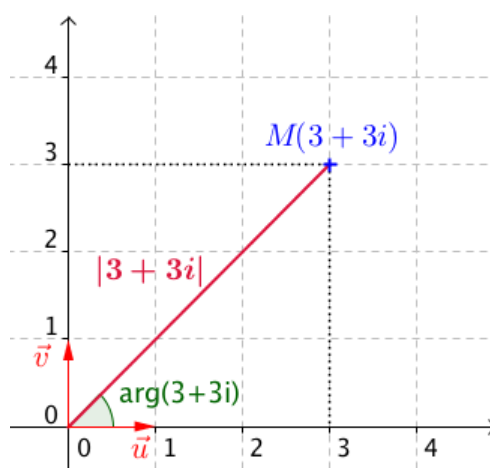
- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $(u; \overrightarrow{OM})$ n'est pas défini.

Exemple :

Soit $z = 3 + 3i$.

Alors $|z| = |3 + 3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Et $\arg(z) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$.



Propriétés : Soit z un nombre complexe non nul.

a) z est un nombre réel $\Leftrightarrow \arg(z) = 0 [\pi]$,

b) z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} [\pi]$.

c) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

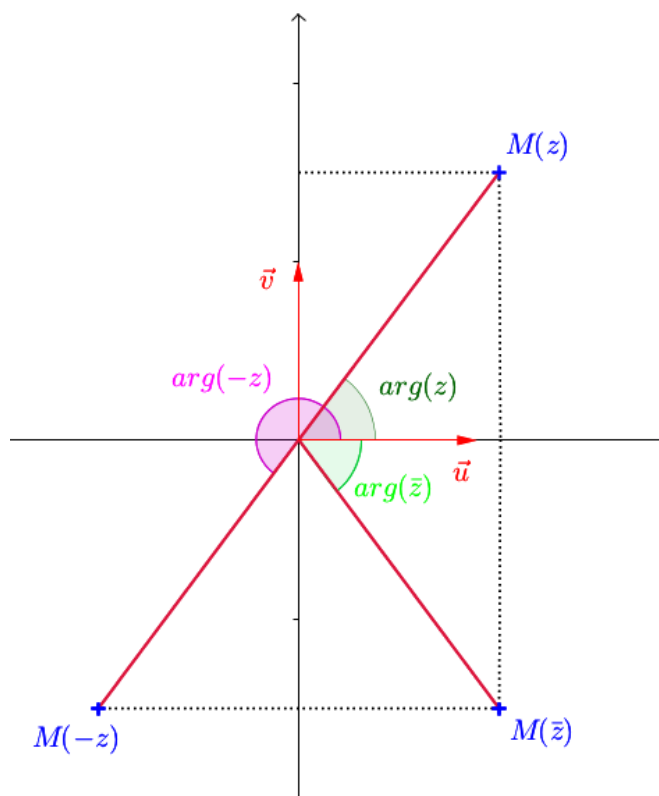
d) $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$

Démonstrations :

a) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des réels.

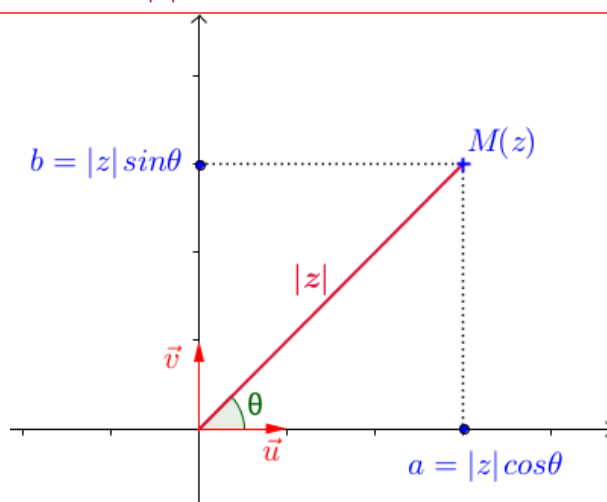
b) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des imaginaires.

c) d) Ses résultats se déduisent par symétrie.



3) Forme trigonométrique

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On pose : $\theta = \arg(z)$
 On a alors : $a = |z| \cos \theta$ et $b = |z| \sin \theta$.



Définition : On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul l'écriture $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\theta = \arg(z)$.

Méthode : Ecrire un nombre complexe sous sa forme trigonométrique

Ecrire le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ sous sa forme trigonométrique.

- On commence par calculer le module de z :

$$|z| = \sqrt{3+1} = 2$$

- En calculant $\frac{z}{|z|}$, on peut identifier plus facilement la partie réelle de z et sa partie imaginaire :

$$\frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

On cherche donc un argument θ de z tel que :

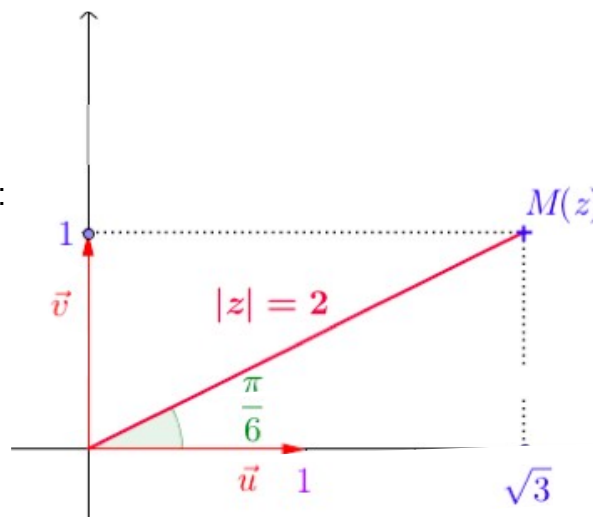
$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{1}{2}.$$

Comme $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, on a :

$$\frac{z}{|z|} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

Donc :

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \text{ avec } \arg(z) = \frac{\pi}{6} [2\pi].$$



Avec une calculatrice ou un logiciel, il est possible de vérifier les résultats obtenus :

$ \sqrt{3} + i $	2
$\text{angle}(\sqrt{3} + i)$	$\frac{\pi}{6}$

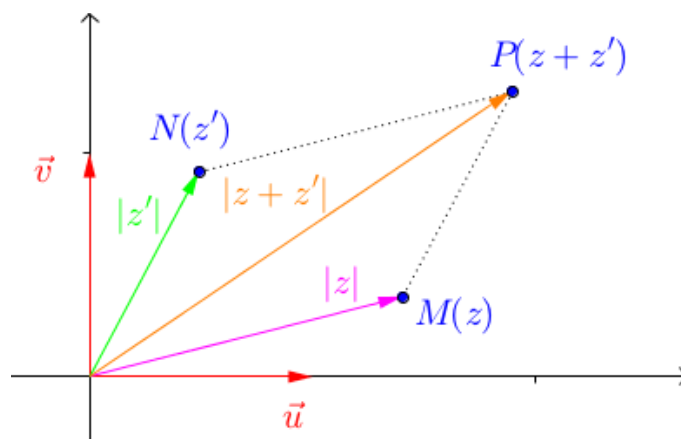
4) Propriétés

Inégalité triangulaire : Soit z et z' deux nombres complexes.

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Démonstration :

Il s'agit d'une traduction de l'inégalité sur les distances.



Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et n entier naturel non nul.

Produit	$ zz' = z z' $	$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
Puissance	$ z^n = z ^n$	$\arg(z^n) = n\arg(z)$
Inverse	$\left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }, z \neq 0$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z), z \neq 0$
Quotient	$\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }, z' \neq 0$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z'), z' \neq 0$

Démonstration pour le produit :

On pose $\theta = \arg(z)$ et $\theta' = \arg(z')$.

$$\begin{aligned}
 zz' &= |z|(\cos \theta + i \sin \theta)|z'|(\cos \theta' + i \sin \theta') \\
 &= |z||z'|[(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')] \\
 &= |z||z'|[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]
 \end{aligned}$$

Donc le module de zz' est $|z||z'|$ et un argument de zz' est $\theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')$.

II. Forme exponentielle

1) Définition

Posons $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$.

En prenant $|z| = |z'| = 1$, on a démontré précédemment que :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta').$$

Soit : $f(\theta)f(\theta') = f(\theta + \theta')$.

On retrouve ainsi la même équation fonctionnelle que celle établie pour les exponentielles : $e^\theta e^{\theta'} = e^{\theta+\theta'}$.

Définition : Pour tout réel θ , on a : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Remarque :

$e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ .

Propriété : $e^{i\pi} = -1$

Démonstration :

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \times 0 = -1$$



Cette relation a été établie en 1748 par le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783). Elle possède la particularité de relier les grandes branches des mathématiques : l'analyse (avec le nombre e), l'algèbre (avec le nombre i) et la géométrie (avec le nombre π).

Exemples :

$$e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \times 0 = 1$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i \times 1 = i$$

Définition : Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous sa forme exponentielle $z = re^{i\theta}$.

Méthode : Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et réciproquement

1) Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

a) $z_1 = -2i$ b) $z_2 = -5$

2) Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

a) $z_3 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ b) $z_4 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

1) a) - $|z_1| = |-2i| = 2$

$$-\frac{z_1}{|z_1|} = \frac{-2i}{2} = -i$$

On cherche donc un argument θ de z_1 tel que $\sin \theta = -1$.

Comme $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, l'argument $-\frac{\pi}{2}$ convient.

$$\frac{z_1}{|z_1|} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \text{ donc } z_1 = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

$$b) - |z_2| = |-5| = 5$$

$$- \frac{z_2}{|z_2|} = \frac{-5}{5} = -1$$

On cherche donc un argument θ de z_2 tel que $\cos \theta = -1$.

Comme $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$, l'argument π convient.

$$\frac{z_2}{|z_2|} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) \text{ donc } z_2 = 5(\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = 5e^{i\pi}.$$

$$2) a) z_3 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$b) z_4 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}.$$

2) Propriétés

Propriétés : Pour tous réels θ et θ' , pour tout entier naturel n non nul,

$$a) e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad b) (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad c) \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad d) \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \quad e) \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

Remarque :

La formule b) s'appelle formule de Moivre.

3) Applications à la géométrie

Propriété : A, B, C et D sont quatre points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D . On a :

$$a) \overset{\text{UUU}}{(u; AB)} = \arg(z_B - z_A)$$

$$b) AB = |z_B - z_A|$$

$$c) \overset{\text{OOO}}{(AB; CD)} = \arg \left(\frac{\overset{\text{OOO}}{z_D - z_C}}{\overset{\text{OOO}}{z_B - z_A}} \right)$$

Démonstrations :

a) On considère un point E tel que $\overset{\text{UUU}}{OE} = \overset{\text{UUU}}{AB}$.

Alors E a pour affixe $z_B - z_A$.

Donc $\overset{\text{UUU}}{(u; OE)} = \arg(z_B - z_A)$ et donc $\overset{\text{UUU}}{(u; AB)} = \arg(z_B - z_A)$

$$b) |z_B - z_A| = |z_E| = OE$$

Comme $\overset{\text{UUU}}{OE} = \overset{\text{UUU}}{AB}$, $OE = AB$ donc $|z_B - z_A| = AB$

$$\begin{aligned}
 c) \quad (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB}; u) + (u; \overrightarrow{CD}) \\
 &= (u; \overrightarrow{CD}) - (u; \overrightarrow{AB}) \\
 &= \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) \\
 &= \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)
 \end{aligned}$$

Méthode : Utiliser les nombres complexes en géométrie

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = -2 - i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = -1 + 2i$.

- 1) Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.
- 2) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

$$\begin{aligned}
 1) \quad AB &= |z_B - z_A| = |1 - 2i - (-2 - i)| = |3 - i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \\
 AC &= |z_C - z_A| = |-1 + 2i - (-2 - i)| = |1 + 3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}. \\
 \text{Donc } AB &= AC.
 \end{aligned}$$

$$2) \quad (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{1 + 3i}{3 - i} \\
 &= \frac{(1 + 3i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} \\
 &= \frac{3 + i + 9i - 3}{9 + 1}
 \end{aligned}$$

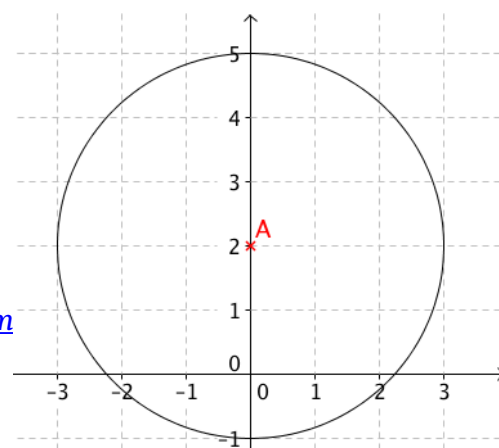
$$= \frac{10i}{10} = i$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]. \text{ On en déduit que l'angle } \widehat{BAC} \text{ est droit.}$$

Méthode : Déterminer un ensemble de points

Soit M un point d'affixe z. Dans chaque cas, déterminer et représenter :

- 1) L'ensemble des points M tels que $|z - 2i| = 3$.
 - 2) L'ensemble des points M tels que $|iz - 3| = 1$.
 - 3) L'ensemble des points M tels que $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$.
 - 4) L'ensemble des points M tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{4} (\pi)$.
- 1) Soit A le point d'affixe 2i alors $|z - 2i| = 3$ est équivalent



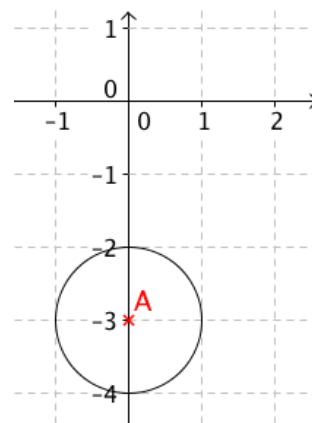
à $AM = 3$.

L'ensemble des points M est le cercle de centre A(2i) et de rayon 3.

$$2) |iz - 3| = |i(z + 3i)| = |i||z + 3i| = |z + 3i|$$

Soit A le point d'affixe -3i alors $|z + 3i| = 1$ est équivalent à $AM = 1$.

L'ensemble des points M est le cercle de centre A(-3i) et de rayon 1.



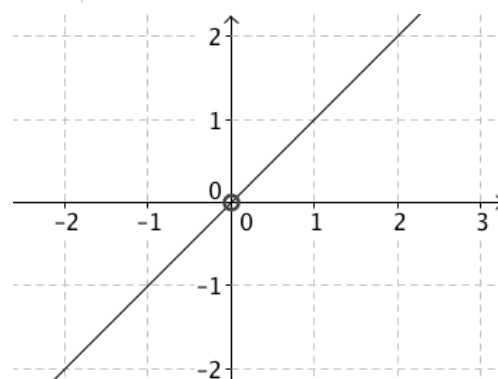
$$3) |\bar{z} - 3 + i| = |\overline{z - 3 - i}| = |z - 3 - i| = |z - 5|$$

Soit A le point d'affixe 3+i et B le point d'affixe 5 alors $|z - 3 - i| = |z - 5|$ est équivalent à $AM = BM$.

L'ensemble des points M est la médiatrice du segment [AB].



4) L'ensemble des points M est la bissectrice de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées privée de l'origine.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales