

NOMBRES COMPLEXES

Il suivait son idée, c'était une idée fixe, et il était surpris de ne pas avancer. Il faut continuer à travailler.

ECRITURE ALGEBRIQUE, MODULE, ARGUMENT, ECRITURE TRIGONOMETRIQUE, FORMULE DE MOIVRE, FORMULES D'EULER

EXERCICE 1

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

- 1) $z_1 = (1+i)(1-2i)$ $z_2 = (1-i)^2$
- 2) $z_3 = (1+i)^2$ $z_4 = (1+i)^8$
- 3) $z_5 = (1+i)^{1999}$
- 4) $z_6 = (3-4i)(3+4i) + (1+3i)^2(1-i)$
- 5) $z_7 = (2+5i)^3 - (1-3i)(1+2i)$
- 6) $z_8 = (1+i)(5-8i)^2(1-i) + (i+2)^2(2-i)$
- 7) $z_9 = (2+i\sqrt{3})(1-i)$ $z_{10} = (1-i\sqrt{2})^3$
- 8) $z_{11} = \frac{3-4i}{7+5i}$ $z_{12} = \frac{1+2i}{3-i\sqrt{3}}$
- 9) $z_{13} = \frac{1+i}{2i}$ $z_{14} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$
- 10) $z_{15} = \frac{3+2i}{1-i}(2+i)$ $z_{16} = 2i - \frac{5}{i}$
- 11) $z_{17} = \frac{4-i}{1+3i} + \frac{i}{3-i} - \frac{3-4i}{2+i}$
- 12) $z_{18} = (\sqrt{2}+i)^4 - (2\sqrt{2}+3i)^2$
- 13) $z_{19} = \left(\frac{2-i}{3+i}\right)^3$
- 14) $z_{20} = (1-i\sqrt{2})(1+i\sqrt{3})$
- 15) $z_{15} = (\sqrt{2}+i)^4 - (2\sqrt{2}+3i)^2$

EXERCICE 2

On pose $Z_m = \frac{1+im}{2m+i(m^2-1)}$.

- 1) Montrer que Z_m existe pour tout réel m .
- 2) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de Z_m en fonction de m .

EXERCICE 3

Calculer le module des nombres complexes suivants:

- 1) $z_1 = 1+3i$ $z_2 = 3-4i$
- 2) $z_3 = -1+7i$ $z_4 = 5+3i$
- 3) $z_5 = (1+i)^2$ $z_6 = (-5+3i)^2$
- 4) $z_7 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$
- 5) $z_8 = (\sqrt{3}+i)(5+i\sqrt{11})$
- 6) $z_9 = \frac{5+i}{3+2i}$ $z_{10} = \frac{i-1}{7+i}$

- 7) $z_{11} = \frac{5}{(1-2i)^2}$ $z_{12} = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^3$
- 8) $z_{13} = \cos x + i \sin x$ $z_{14} = 2(\cos x - i \sin x)$

EXERCICE 4

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- 1) $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ $z_2 = -\sqrt{3}+i$
- 2) $z_3 = 2(-1-i)$ $z_4 = 1-i$
- 3) $z_5 = \sin \theta + i \cos \theta$ $z_6 = 1+i \tan \theta$
- 4) $z_7 = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta}$ $z_8 = \frac{1 - \cos \theta + i \sin \theta}{1 + \cos \theta + i \sin \theta}$
- 5) $z_9 = \frac{-\sqrt{2}}{1+i}$ $z_{10} = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$
- 6) $z_{11} = \frac{-1+3i\sqrt{3}}{10-2i\sqrt{3}}$
- 7) $z_{12} = \frac{(1-i\sqrt{3})(\cos x + i \sin x)}{\cos x + \sin x + i(\cos x - \sin x)}$
- 8) $z_{13} = e^{i\theta} + 1$ $z_{14} = e^{i\theta} - 1$

EXERCICE 5

- 1) On pose : $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
Calculer : j^2 , j^3 , $1+j+j^2$; $\frac{1+j}{(1-i)^2} + \frac{1-j}{(1+i)^2}$.
- 2) On considère les nombres complexes
 $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ et $z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}+i}$
Calculer : $z_1 + z_2$; $z_1 z_2$; $z_1^2 + z_2^2$; $z_1^3 + z_2^3$.
- 3) Calculer : $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$ et $\left(\frac{3}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$

EXERCICE 6

Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- 1) Calculer : j^2 , j^3 et $1+j+j^2$.
- 2) Soit (E) l'équation : $z^4 + z^2 + 1 = 0$.
a) Vérifier que j est solution de (E).
b) Dédire de ce qui précède une factorisation dans $\mathbb{R}$ de $P(x) = x^4 + x^2 + 1$

EXERCICE 7

On considère le nombre complexe $v = \frac{ai - 4b}{5 + 3i}$; où a et b sont des nombres réels.

- 1) Déterminer a et b sachant que $|v| = 1$ et

$$\arg(v) = \frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

- 2) Calculer $v^{12} + v^{16}$.

EXERCICE 8

On pose $z = 1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi, \pi[$.

- 1) Déterminer le module r et un argument ϕ de z.

- 2) Calculer z^4 à partie de :

a) $z = 1 + e^{i\theta}$

b) $z = re^{i\phi}$

- 3) Démontrer que :

$$\cos^4 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{8} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{3}{8}$$

EXERCICE 9

Soit θ un nombre réel tel que : $0 \leq \theta \leq \pi$. On considère le nombre complexe : $z = -\sin 2\theta + 2i \cos^2 \theta$

- 1) Déterminer le module et l'argument de z en fonction de θ .

- 2) Déterminer θ pour que z et $1 - z$ aient même module.

EXERCICE 10

On considère les nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} ; z_2 = 1 - i \text{ et } Z = \frac{z_1}{z_2}$$

- 1) Mettre z_1 , z_2 et Z sous forme trigonométrique puis

en déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2$ puis placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 11

Soit $\alpha = \sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ et $z = \alpha^2$

- 1) Calculer $|z|$ et un argument de z puis en déduire le module et un argument de α .

- 2) Ecrire α sous forme trigonométrique puis en déduire les valeurs exactes de : $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 12

On donne $z_1 = \sqrt{3} - i$; $z_2 = -1 + i$ et $z = \frac{z_1^2}{z_2}$.

Ecrire z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique et en déduire les valeurs exactes de :

$$\cos \frac{13\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{13\pi}{12}.$$

EXERCICE 13

- 1) On donne : $C = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$
 $S = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$

- a) Calculer $T = C + iS$

- b) En déduire les expressions simplifiées de C et de S.

- 2) Pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, Calculer :

$$C = \sum_{k=0}^n \frac{\cos kx}{\cos^k x} \text{ et } S = \sum_{k=0}^n \frac{\sin kx}{\cos^k x}$$

EXERCICE 14

- 1) Exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

- 2) Exprimer $\cos 5x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 5x$ en fonction de $\sin x$.

- 3) Linéariser la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \sin^3 x$ $f(x) = \cos^4 x$

b) $f(x) = \sin^4 x \cos^2 x$ $f(x) = \sin^6 x$

c) $f(x) = \sin 3x \cos 4x \cos 5x$

EXERCICE 15

- 1) On considère dans le plan rapporté à un repère

orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ trois points distincts A, B et C d'affixes respectives a, b et c. Démontrer qu'une condition pour que le triangle ABC soit rectangle en A

s'écrit : $\frac{b-a}{c-a} + \frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{a}} = 0$.

- 2) Soit M un point du plan ; soit z son affixe. On désigne par M' et M'' les points ayant pour affixes z^2 et z^3 . Quelles conditions doit vérifier z pour que les trois points M, M' et M'' soient distincts ? Trouver l'ensemble E des points M tels que MM'M'' soit rectangle en M, ou en M', ou en M''. Dessiner E.

EXERCICE 16

Le plan rapporté à un repère orthonormé direct

$(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- 1) Soit A (a), B (b) et C (c) des points du plan. Montrer que ABC est un triangle rectangle en A si et

seulement si : $\frac{c-a}{b-a}$ a une partie réelle nulle.

- 2) Pour tout point M d'affixe z non nulle, on associe les points A, B et C d'affixes respectives $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$ et

$\frac{1}{z^3}$; et on désigne par F l'ensemble des points M du

plan pour lesquels les points A, B et C sont deux à deux distincts et ABC est un triangle rectangle.

- a) Pour quelles valeurs de z A, B et C sont-ils distincts ?

- b) Déterminer puis représenter F.

LES ENSEMBLES DE POINTS

EXERCICE 17

1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' soit réel.

- $z' = z^2 - 2\bar{z} + 1$; $z' = z^2 - 2\bar{z} + 1$
- $z' = (\bar{z} - 3)(iz + 2)$; $z' = (z - 2)(\bar{z} - i)$
- $z' = i \frac{1+z}{1-z}$
- $z' = \frac{2iz - 4 + 2i}{z - 3 + i}$

2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' soit imaginaire pur.

- $z' = (z - i)(2iz + 3)$
- $z' = (z - 1)(\bar{z} - i)$; $Z = (\bar{z} - 2)(z - i)$

3) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

- $|z - 2| = |z + i|$; $|iz + 3| = |z + 4 + i|$
- $\left| \bar{z} + \frac{1}{3}i \right| = 3$; $|1 + iz| = 2$
- $\arg z = \frac{\pi}{2} [2\pi]$
- $\arg \frac{1}{z} = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$; $\arg \bar{z} = \frac{\pi}{2} [2\pi]$
- $\arg(z - i) = \frac{\pi}{2} + \arg(z + 1)$
- $\arg(z - i) = \arg(z + 1)$
- $\arg(-z) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$
- $\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$
- $\arg(z^2 - 4) = \arg(z + 2) [2\pi]$
- $\arg \frac{1}{z + 2} = \frac{\pi}{2} [2\pi]$
- $\arg(\bar{z} + i) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

4) Déterminer analytiquement puis géométriquement l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

- $|z - 1 + 3i| = 3$
- $|2iz - 1| = 4$
- $|2iz + 2 + i| = |3 + 2i - z|$

EXERCICE 18

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

- $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$; $\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$
- $\operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3)$

EXERCICE 19

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2\bar{z} = 0$.
- Vérifie que les points images des complexes solutions non nuls de (E) sont sur un même cercle.

EXERCICE 20

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct

$(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $M(z)$; $z = x + iy$.
On suppose $z \neq 2i$ et on considère les points $A(1)$ et $B(2i)$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$

- $\frac{z-1}{z-2i} = i$, soit E le point image de la solution.
- $\frac{z-1}{z-2i} = -i$, soit D le point image de la solution

2) On pose $Z = \frac{z-i}{z-2i}$.

Déterminer $\operatorname{Re}(Z)$ et $\operatorname{Im}(Z)$ en fonction de x et y .

3) a) Déterminer l'ensemble (H) des points $M(z)$ tels que Z soit réel et vérifier que $D \in H$

b) Déterminer l'ensemble (F) des points $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur et vérifier $E \in (F)$

c) Déterminer l'ensemble (G) des points $M(z)$ tels que $|Z| = 1$

4) Construire (H), (F) et (G).

EXERCICE 21

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

on considère les points : $A\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$, $B(2i)$.

Pour tout $z \neq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ on pose $z' = \frac{z-2i}{2z-1-i}$.

1) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

- Exprimer x' et y' en fonction de x et de y .
 - Déterminer et construire l'ensemble E des points $M(z)$ tels que z' soit réel.
 - Déterminer et construire l'ensemble F des points $M(z)$ tels que z soit imaginaire pur.
- 2) Soit $M(z)$ et $M'(z')$.

a) Montrer que $OM' = \frac{1}{2} \frac{MB}{MA}$.

b) Démontrer que M' appartient au cercle Γ de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$ si et seulement si M appartient à une

droite Δ que l'on précisera. Construire Γ et Δ .

c) Déterminer l'ensemble G des points $M(z)$ tels que $|z'| = 1$. Construire G.

EXERCICE 22 (Bac F 1995 1^{er} GROUPE)

On appelle Z le nombre complexe défini par :

$$Z = z^2 - 2\bar{z} + 1.$$

1) On pose $z = x + iy$ (avec x et y réels). Calculer en fonction de x et de y , la partie réelle X et la partie imaginaire Y du nombre complexe Z.

2) Déterminer puis représenter dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal, l'ensemble des points dont l'affixe z est telle que Z soit un nombre réel.

EXERCICE 23

Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct

$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit $A(5i)$, $B(-i)$, $M(z)$, et $M'(z')$ tel que :

$$z' = \frac{2iz - 5}{z - 2i}, \quad z \neq 2i.$$

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

- 1) - a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y
 - b) Déterminer puis construire l'ensemble Γ des points $M(z)$ tels que z' soit réel.
- 2) - a) Déterminer z tel que $z' = z$.

- b) démontrer que $\frac{z' + i}{z' - 5i} = -\frac{z + i}{z - 5i}$

- 3) - a) Dédire de 2) une relation entre

$$\frac{MB}{MA} \text{ et } \frac{M'B}{M'A} \text{ puis une relation entre}$$

$$(\vec{MA}; \vec{MB}) \text{ et } (\vec{M'A}; \vec{M'B})$$

- b) Montrer que M appartient à la médiatrice (D) de $[AB]$ si et seulement si M' appartient à (D)
 - c) Montrer que M appartient au cercle (C) de diamètre $[AB]$ si et seulement si M' appartient à (C) .

EXERCICE 24

Le plan complexe P est rapporté à un repère

orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $A(-i)$ et $B(2i)$. On désigne par P^* l'ensemble des points de P , distincts de A .

Soit f l'application de P^* dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point $f(M)$ d'affixe Z telle que :

$$Z = i \left(\frac{z - 2i}{z + i} \right)$$

- 1) Soit $M_1(i)$ et $M_2\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)$.
 a) Déterminer $f(M_1)$ et $f(M_2)$
 b) Déterminer le point M de P^* tel que $f(M) = O$.
 c) Déterminer le point M de P^* tel que $f(M) = N$ où $N(2 - i)$.
- 2) Déterminer et construire.
 a) L'ensemble E des points M de P^* dont les images ont pour affixe un nombre imaginaire pur.
 b) L'ensemble des points M de P^* dont les images ont pour affixe un nombre réel.
 c) L'ensemble G des points M de P^* dont les images appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 25

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal

$$(O, \vec{u}, \vec{v}).$$

Soit $K(-2)$. A tout point M de P distinct de K , d'affixe z on associe le point M' d'affixe

$$Z' = \frac{Z - 1}{Z + 2}.$$

- 1) Soit $E(i)$; déterminer et construire E' .

- 2) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels l'affixe de M' est i .
- 3) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels $M' = M$. On trouvera deux points B et C .
 Soit $A(1)$, montrer que ABC est un triangle équilatéral.
- 4) Soit $z = x + iy$, x et y réels ($z \neq -2$).
 Ecrire Z' sous forme algébrique. En déduire.
 a) L'ensemble S des points M tels que M' appartienne à l'axe des abscisses. Construire S .
 b) L'ensemble C des points M tels que M' appartienne à l'axe des ordonnées. Construire C .
- 5) Montrer que M' lorsque M appartient au cercle C' de centre A et de rayon 1, alors M appartient à un cercle que l'on précisera.

EXERCICE 26

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé

$$(O, \vec{u}, \vec{v}). \text{ Unité } 4 \text{ cm.}$$

On note $A(-2i)$.

A tout point $M(z)$ de P distinct de A , on associe le

point M' d'affixe z' tel que : $z' = f(z) = \frac{2iz - 2}{z + 2i}$.

- 1) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$; x, y, x', y' sont des réels.
 Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
- 2) Soit (E) l'ensemble des points $M(z = x + iy)$ tels que z' soit réel.
 a) Déterminer puis construire (E) .
 b) Montrer que pour tout point $M(z = x + iy)$ de (E) et $M'(z')$ on a : $z' = \frac{2x}{y + 2}$.
- c) En déduire que les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AM'}$ sont colinéaires.
- d) Construire le point $M(z)$ tel que $f(z) = 1$.

EXERCICE 27

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé

$$(O, \vec{u}, \vec{v}), \text{ on considère } A(2 - 3i) \text{ et } B(-1 - \frac{1}{2}i).$$

Soit f l'application qui au point $M(z)$ associe le point

$M'(z')$ tel que : $z' = \frac{2iz - 1 + 2i}{2 - 3i - z}$.

- 1) Préciser l'ensemble de définition de f .
- 2) Déterminer l'image C' de $C(1 - i)$.
- 3) Déterminer l'antécédent D_1 de $D(-i)$.
- 4) Montrer que f est bijective de $P - \{A\}$ vers un ensemble à préciser.
- 5) Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$;
 a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
 b) En déduire l'ensemble des points $M(z)$ dans chacun des cas suivants puis les construire.
 E_1 = Ensemble des points $M(z)$ tels que z' soit réel.
 E_2 = Ensemble des points $M(z)$ tels que $z' \in i\mathbb{R}$.
 E_3 = Ensemble des points $M(z)$ tels que $z' \in \mathbb{R}$.
 E_4 = Ensemble des points $M(z)$ tels que $z' \in i\mathbb{R} +$

EXERCICE 28

Soit $f(z) = \frac{-2z + i}{z - i}$ avec $z \neq i$. On pose A, B, M et

M' les points d'affixes respectives $i, \frac{1}{2}i, z$ et $f(z)$.

- 1) Donner une interprétation géométrique de $|f(z)|$ et un $\arg f(z)$.
- 2) Montrer que si M appartient à la médiatrice (Δ) du segment $[AB]$ alors M' appartient à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
- 3) Déterminer l'ensemble des points M (z) tels que :
 - a) $\arg f(z) = 0 \ [2\pi]$
 - b) $\arg f(z) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$
 - c) $\arg f(z) = \pi \ [2\pi]$

EXERCICE 29 (BAC S1 2001)

(SESSION DE REMPLACEMENT 1^{er} GROUPE)

Soit A et B les points d'affixes respectives -1 et 1 . A tout point M d'affixe Z, on associe le point M'

d'affixe Z' tel que : $Z' = \left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^3$.

Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que l'affixe Z' du point M' soit un nombre réel strictement négatif.

- 1) Montrer que M appartient à (E) si, et seulement si : $3(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi \ [2\pi]$.
- 2) Représenter (E).

EXERCICE 30

Le plan est muni d'un repère orthonormé

direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Soit les points A ($2i$), B ($-i$),

C ($5i$), D ($\frac{1}{2}$), M (z), M' (z') et la fonction f définie par

$$f(z) = z' = \frac{4iz + 2}{5i - z}, z \neq 5i$$

- 1) Montrer que si $M \in (Oy)$ alors $M' \in (Oy)$.
- 2) Interpréter géométriquement $|z|$. En déduire si M' est sur le cercle de centre O et rayon 4, M appartient à une droite à préciser.
 - a) Pour $z \neq -i$, montrer que $\frac{z'-2i}{z'+i} = 2 \frac{z-2i}{z+i}$
 - b) En déduire que si M appartient à la médiatrice de $[AB]$ alors M' appartient à un cercle à préciser.
- 3) Soit $z \neq 5i$
 - a) Montrer que $(z' + 4i)(z - 5i) = 18$.
 - b) En déduire l'image du cercle de centre C et de rayon 9 et de la demi-droite des points M tels que : $\overrightarrow{(u, CM)} = \frac{\pi}{4}$

EXERCICE 31

Soit f l'application de $C - \{-i\}$ dans C définie par :

$$f(z) = \frac{iz}{z+i}$$

- 1) Déterminer l'affixe z_0 du point B telle $f(z_0) = 1 + 2i$.
- 2) Soit z un élément de $C - \{-i\}$. On note r le module de $z + i$ et α une mesure de son argument. Ecrire la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et α .
- 3) Soit A le point d'affixe i.
 - a) Déterminer l'ensemble C des points M (z) vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$ et l'ensemble D des points M (z) tels que : $\arg[f(z) - i] = \frac{\pi}{4}$.
 - b) Montrer $B \in C \cap D$ puis construire C et D.

EXERCICE 32

Soit f l'application

$$C - \{1\} \rightarrow C$$

$$z \mapsto z' = \frac{iz - 2}{z - 1}$$

- 1) Déterminer le module et un argument de f(2).
- 2) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n $[f(2)]^n$ est-il réel ?
- 3) Exprimer z en fonction de z'.
- 4) Soit M (z) avec $z \neq 1$ et M' (z'). Montrer que $OM = \frac{AM'}{BM'}$ où A et B sont deux points dont on précisera les affixes.
- 5) Soit (C) l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $\begin{cases} |z| = 1 \\ z \neq 1 \end{cases}$. Montrer que si $M \in (C)$ alors M' appartient à une droite (L) que l'on précisera.

EXERCICE 33 (BAC D 1988 1^{er} GROUPE)

On considère la fonction f de C dans C définie par :

$$f(z) = \frac{z + 3i}{iz - 1}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
- 2) Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On désigne par A, B, M, M', M'' les points d'affixes respectives, $-3i, 1, z, \bar{z}$ et $i\bar{z}$, z étant un élément de D_f .
 - a) Placer les points A, B, M, M' et M'' (on choisira pour ce dessin : le point M(z) sur la droite (AB) avec $\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0, \operatorname{Re}(z) < \operatorname{Im}(z)$).
 - b) Déterminer l'ensemble S_1 des points M tels que $M'' = B$.
 - c) Déterminer l'ensemble S_2 des points M tels que $M'' = M$, le dessiner.
 - d) Donner une interprétation géométrique des arguments de $(z + 3i)$ et de $(i\bar{z} - 1)$. En déduire une interprétation géométrique de l'argument de f(z).
 - e) Déterminer l'ensemble S_3 des points M (z) tels que f(z) soit un imaginaire pur. En déduire l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient orthogonaux et les dessiner.

EXERCICE 34

Dans le plan complexe P rapporté à un repère

orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2cm, on considère les points : $M(z)$; $M_1(\bar{z})$; A (2) et B (1). Soit l'application f : $P - \{A\} \rightarrow P$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ telle que : } z' = \frac{\bar{z} + 4}{\bar{z} - 2}$$

- 1) Déterminer les points invariants par f. (M est invariant par f $\Leftrightarrow f(M) = M$)
- 2) Soit C le point d'affixe $2(1 + i\sqrt{3})$. Montrer que $C' = f(C)$ est milieu de $[OC]$.
- 3) a) Calculer pour tout $z \neq 2$, $(\bar{z} - 2)(z' - 1)$
b) En déduire la valeur de $AM_1 \cdot BM'$ puis une expression de $(\vec{u}; BM')$ en fonction de $(\vec{u}; AM_1)$.
- c) Justifier les relations suivantes :
a) $AM \times BM' = 6$
b) $(\vec{u}; BM') = (\vec{u}; AM_1)$

- d) Construire l'image d'un point D d'affixe $2 + 2e^{\frac{i\pi}{6}}$.

EXERCICE 35

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité 2cm. Soit A $(3 - i)$ et l'application $f : M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \frac{2iz - 4 + 2i}{z - 3 + i}$

- 1) Calculer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $1 + i$.
- 2) Calculer l'affixe du point Q dont l'image par f est le point Q' d'affixe $1 + i$.
- 3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$
a) Calculer x' et y' en fonction de x et y .
b) Déterminer et représenter l'ensemble E des points $M(z)$ tel que z' soit réel.
c) Déterminer et représenter l'ensemble F des points $M(z)$ tel que z' soit imaginaire pur.
d) Déterminer et représenter l'ensemble G des points $M(z)$ tel que $|z'| = 2$
- 4) Soit B $(-1 - 2i)$. Montrer que $|z'| = 2 \frac{MB}{MA}$. En déduire que si M' est sur le cercle C de centre O et de rayon 2 alors M appartient à une droite Δ que l'on précisera.
Comparer (Δ) et G.
- 5) a) Interpréter géométriquement $\arg z'$
b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg z' = \frac{\pi}{2}$; $\arg z' = \pi$.

EQUATIONS DANS C

RACINE N^{ième} D'UN NOMBRE COMPLEXE

EXERCICE 36

- 1) Résoudre dans C les équations suivantes :
a) $z^3 = 2 + 2i$; $z^5 = 64(\sqrt{2} + i\sqrt{6})$
b) $z^8 = 16(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i})$
c) $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$
d) $z^2 = 3 - 4i$; $z^2 = -5 + 12i$
e) $z^2 = -1 - 2i\sqrt{6}$
f) $z^n + 1 = 0$; $z^n = 1 - i\sqrt{3}$
- 2) Calculer $(2 - i)^3$, en déduire les racines cubiques de $2 - 11i$.
- 3) Calculer $(3 + 2i)^3$ puis résoudre $z^3 = -9 + 46i$

EXERCICE 37 (BAC S2 1997)

(1^{er} GROUPE SESSION DE REMPLACEMENT)

On considère l'équation : $z^3 = 18 + 26i$ (1)

- 1) Montrer que $z_0 = 3 + i$ est racine de l'équation (1).
- 2) Montrer que pour toute solution z de (1) le

complexe $Z = \frac{z}{z_0}$ est racine cubique de 1.

- 3) Résoudre $Z^3 = 1$ et en déduire toutes les solutions de (1).

EXERCICE 38 : (BAC S2 1999 2^{ème} GROUPE (SESSION DE REMPLACEMENT).

- 1) Dans l'ensemble des nombres complexes, déterminer les racines de l'équation : $Z^6 = 1$.
On mettra les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
- 2) a) Calculer $(1 - i)^6$
b) En déduire les racines sixièmes du nombre complexe 8i.
- 3) Déduire de la question n°2 les valeurs de

$$\cos \frac{\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12}$$

EXERCICE 39 (BAC D 1990 2^{ème} GROUPE)

- 1) Soit le nombre complexe $u = \frac{a + 1 + (1 - a)i}{\sqrt{2(1 + a^2)}}$,

avec $a \in \mathbb{R}$.

Calculer le module de u. Si α est un argument de u, calculer $\cos \alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin \alpha$ et $\sin 2\alpha$.

- 2) Soit le nombre complexe :

$$Z = 8a^2 - (1 + a^2)^2 + 4a(1 - a^2)i, a \in \mathbb{R}.$$

Calculer $|Z|$, puis montrer que $Z = |Z| u^4$. En déduire les racines quatrième du nombre complexe Z.

EXERCICE 40

On désigne par z_1 le nombre complexe $1 - i$.

- 1) Calculer z_1^3 .
- 2) En déduire les racines cubiques de $-2(1 + i)$.
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + 2 + 2i = 0.$$

EXERCICE 41 (BAC D 1992 1^{er} GROUPE)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal, soit M le point d'affixe z , A celui d'affixe i et B celui

d'affixe $-i$. On pose $Z = \frac{z-i}{z+i}$.

- 1) a) Déterminer l'ensemble D des points M (z) tels que Z soit réel.

- b) Déterminer l'ensemble C des points M (z) tels que Z soit imaginaire pur.

- 2) a) Interpréter géométriquement les modules de $z-i$ et $z+i$.

Montrer que $|Z| = 1$, si et seulement si, z est réel.

- b) Soit n un entier naturel non nul et a un réel de $]0; \frac{\pi}{2}[$. Déduire de la question précédente que

l'équation : (E) : $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 = \cos 4a + i \sin 4a$,

n'admet que des solutions réelles. (On ne demande pas de les calculer).

- c) Résoudre l'équation $Z^2 = \cos 4a + i \sin 4a$. En déduire les solutions de (E).

EXERCICE 42

Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants : $z_1 = -16$; $z_2 = 17$; $z_3 = -2$;

$z_4 = 7 + 24i$; $z_5 = 9 + 40i$; $z_6 = 1 + i$;

$z_7 = 2i$; $z_8 = -2i$; $z_9 = 12i$; $z_{10} = -7i$;

EXERCICE 43

Résoudre de deux façons différentes l'équation

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ puis en déduire les valeurs exactes}$$

de $\cos \frac{17\pi}{8}$ et $\sin \frac{17\pi}{8}$.

EQUATIONS DU SECOND DEGRE

EXERCICE 44

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2 + 2z + 2 = 0$; $z^2 + 3z + 5 = 0$

2) $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$

3) $z^2 - (3 + 4i)z + 7i - 1 = 0$

4) $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$

5) $z^2 - 2iz - i\sqrt{3} = 0$

6) $iz^2 - (-3 + 4i)z - 5 + i = 0$

7) $iz^2 + (1 - 5i)z - 2 + 6i = 0$

8) $(1 + i)z^2 - (5 + i)z + 6 + 4i = 0$

9) $(1 - i)z^2 - 2z - 11 + 3i = 0$

10) $z^2 - (5 - i\sqrt{3})z + 6 - 3i\sqrt{3} = 0$

AUTRES EQUATIONS

EXERCICE 45

Résoudre dans $\mathbb{C}$.

1) $z^2 - 2\bar{z} = 0$; $z^5 - z = 0$

2) $(z^2 - 4z + 5)^2 = (z + 1)^2$

3) $(z + i)^5 = (z - i)^5$; $(z + 1)^5 = (z - 1)^5$

4) $z^4 + z^2 + 1 = 0$; $z^8 + z^4 + 1 = 0$

5) $z^8 + 4z^4 + 16 = 0$

6) $z^4 - 2(1 + ia^2)z^2 + 1 - a^4 = 0$ a réel

7) $(1 + i\sqrt{3})z^4 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i = 0$

8) $27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$

9) $z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0$

10) $z^{2n} - (2\cos \varphi)z^n + 1 = 0$; $\varphi \in \mathbb{R}$

11) $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1$

EXERCICE 46

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $(z^2 - 4z + 5) + i(z + 1) = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0$

En déduire qu'il existe des réels a, b, c et d qu'on déterminera tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(x^2 - 4x + 5)^2 + (x + 1)^2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

EXERCICE 47

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé

$(O, \vec{u}, \vec{v})$

1) Développer le réel $(1 + \sqrt{3})^2$ et en déduire la résolution de : $z^2 + (1 + \sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$

2) On pose : $a = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 - i)$ et

$b = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i)$. Soit A (a) et B (b)

- a) Ecrire a et b sous forme trigonométrique.

- b) Donner la nature du triangle OAB.

EXERCICE 48

Soit a un nombre réel et (E) l'équation dans $\mathbb{C}$

$$\left(\frac{z-i}{z+i} \right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$$

Montrer que z si est solution de (E), on a :

$$\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1. \text{ En déduire que toutes les solutions de}$$

(E) sont réelles puis résoudre (E) pour $a = 1$

EXERCICE 49

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + 3\bar{z} = (2+i\sqrt{3})|z|$.
Représenter les images des solutions de cette équation dans un plan rapporté à un repère orthonormal direct.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $4z^2 + 8\left|z^2\right| - 3 = 0$.

Mettre sous forme trigonométrique la somme de deux solutions quelconques.

EXERCICE 50 (BAC D 1991 2^{ème} GROUPE)

1) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$\alpha z^2 + (-\beta + i\alpha)z - i\beta = 0.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(m + \ln x)z^2 + [m - \ln x + i(m + \ln x)]z + i(m - \ln x) = 0 \text{ où}$$

$$x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } m \in \mathbb{R}^*.$$

EXERCICE 51

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z + \frac{1}{z} = 1 \text{ et } z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$$

3) Soit P le polynôme défini par :

$$P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$$

a) Exprimer $\frac{P(z)}{z^2}$ en fonction de $Z = z + \frac{1}{z}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(z) = 0$.

4) En vous servant de cette méthode, résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1 = 0$

b) $z^4 + 2z^3 - 5z^2 - 2z + 1 = 0$

EXERCICE 52

1) Ecrire sous forme trigonométrique les racines cubiques du nombre complexe $a = 16(1-i)$.

2) Pour θ un nombre réel quelconque, on pose :

$$z_0 = 1 + i + 2\sqrt{2}e^{i\theta} \text{ avec } z_0 = x_0 + iy_0$$

a) Calculer x_0 et y_0 en fonction de θ .

b) Déterminer l'ensemble C des points M du plan de coordonnées (x_0, y_0) quand θ décrit $[0; 2\pi]$.

3) Montrer que les solutions de l'équation :

$$[z - (1+i)]^3 = a \text{ sont les affixes des points de } C.$$

EXERCICE 53

Soit φ un nombre réel tel que $0 \leq \varphi \leq \pi$. On pose :

$$p = e^{i\varphi} \text{ et on considère l'équation :}$$

$$z^2 - 2pz + 1 = 0 \quad (1)$$

a) Soit z_1 et z_2 les solutions de (1). Quel est le lien entre $|z_1|$ et $|z_2|$ et quel est le lien entre $\arg z_1$ et $\arg z_2$?

b) Pour quelles valeurs de φ , z_1 et z_2 sont-elles réelles ?

c) Pour quelles valeurs de φ , z_1 et z_2 sont-elles imaginaires pures ?

EXERCICE 54

1) On pose $u = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$

a) Montrer que $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0$

b) Montrer que $u^4 = \bar{u}$

2) On pose $\alpha = u + u^4$ et $\beta = u^2 + u^3$.

Montrer que $\alpha + \beta = -1$ et $\alpha\beta = -1$

3) En déduire une équation du second degré dont α et β sont les deux solutions puis la résoudre.

4) En déduire $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\sin \frac{2\pi}{5}$.

EXERCICE 55

1) On considère l'équation : $z^2 + 2z + 2 = 0$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation.

On note z_1 et z_2 ses solutions.

b) Pour $n \geq 1$, calculer $z_1^n + z_2^n$.

2) On pose $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$; z différent de 1.

a) Calculer $f(z_1) + f(z_2)$ et $f(z_1)f(z_2)$.

b) Former une équation du second degré admettant pour racines $f(z_1)$ et $f(z_2)$.

EXERCICE 56 (BAC D 1996 1^{er} GROUPE)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(\sin^2 \alpha)z^2 + (\sin 2\alpha)z + 1 + \cos^2 \alpha = 0 ; 0 < \alpha < \pi.$$

On note z' et z'' les solutions avec $\operatorname{Im}(z') > 0$.

2) Vérifier que $z'^2 + z''^2$ est un réel indépendant de α

3) Le plan étant rapporté à un repère orthonormal

direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par M' et M'' les points d'affixes respectives z' et z'' .

a) Déterminer α tel que $\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \\ M'M'' = 2\sqrt{2} \end{cases}$.

b) α étant le réel trouvé au 3a), montrer que M' et M'' appartiennent à un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

EXERCICE 57 (BAC T 2004 1^{er} GROUPE)

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
 $z^2 - (4 + 2i)z + 2 + 4i = 0$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système :

$$(z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \begin{cases} 2z + 3z' = 12 + 3\sqrt{2} \\ z - z' = 1 - \sqrt{2} + 5i \end{cases}$$
- 3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
 $a = 3 + i$; $b = 1 + i$; $c = 3 + 3i$; $d = 2 + \sqrt{2} + 2i$.
 - a) Ecrire $\frac{a-b}{a-c}$ sous la forme trigonométrique.
 - b) En déduire la nature du triangle ABC.
 - c) Montrer que D appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

EXERCICE 58

- 1) Soit $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
 $2(1 - \cos 2\theta)z^2 - 2z \sin 2\theta + 1 = 0$
- 2) Calculer le module et un argument de z_1 et de z_2
- 3) On donne $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ et O l'origine du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer θ pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle isocèle en O.

EXERCICE 59

- θ désigne un nombre réel appartenant à $[0; 2\pi[$.
- a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z
 $z^2 - (2^{\theta+1} \cos \theta)z + 2^{2\theta} = 0$.
- Donner chaque solution sous forme trigonométrique.
- b) Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B dont les affixes sont les solutions de l'équation précédente. Déterminer θ de manière à ce que OAB soit un triangle équilatéral.

EXERCICE 60

- θ est un nombre réel donné.
- 1) Résoudre dans l'équation d'inconnue Z :
 $Z^2 - 2Z \cos \theta + 1 = 0 \quad (E)$
 En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation en z :
 $z^4 - 2z^2 \cos \theta + 1 = 0 \quad (E')$
 On mettra les racines sous forme trigonométrique.
 - 2) Dans le plan complexe, on considère les images M_1, M_2, M_3 et M_4 des quatre solutions de (E') . Pour quelle valeur de θ ($0 < \theta < \pi$) ces quatre points sont-ils les sommets d'un carré ?
 - 3) Décomposer en un produit de deux facteurs du second degré et à coefficients réels le polynôme en x défini par : $f(x) = x^4 - 2x^2 \cos \theta + 1$.

EXERCICE 61 (BAC S 2 2002)

(1^{er} GROUPE SESSION DE REMPLACEMENT)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé

$\rightarrow \rightarrow$
 $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $\alpha = 1 - i$ $\beta = 1 + i$.

A tout point M d'affixe z distinct de O, la fonction φ associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = 2 - \frac{2}{z}$

- 1) Montrer que A et B sont invariants par φ .
- 2) On considère un point M (z) distinct de A et B, d'image M' (z') par φ .

a) Montrer que $\frac{z'-\beta}{z'-\alpha} = \mu \frac{z-\beta}{z-\alpha}$ où $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$.

b) En déduire que $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B}$ et donner la

relation entre $(\vec{MA}, \vec{MB})$ et $(\vec{M'A}, \vec{M'B})$

c) Déduire de la dernière relation du b) que si M appartient au cercle de diamètre [AB], son image par φ appartient à la droite (AB).

EXERCICE 62

Résoudre dans le corps des nombres complexes les équations suivantes : $z^4 - 1 = 0$ (1)

$z^4 + 1 = 0$ (2)

$1 + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + z^{10} + z^{12} + z^{14} = 0$ (3)

(On montrera qu'il suffit de connaître $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$ pour calculer toutes les racines de l'équation (3))

EXERCICE 63

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) : $\frac{z-2}{z-1} = z$.

On donnera le module et un argument de chaque solution.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (2) : $\frac{z-2}{z-1} = i$.

On donnera la solution sous forme algébrique.

3) Soit M, A et B les points d'affixes respectifs : $z, 1$, et 2 . On suppose que M est distinct des points A et B.

a) Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{z-2}{z-1}$.

b) Retrouver géométriquement la solution de l'équation (2).

4) a) Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans $\mathbb{C}$:

$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$, où n désigne un entier naturel non nul

donné, a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ (3) : $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$.

On cherchera les solutions sous forme algébrique.

EXERCICE 64

On désigne par j et $\bar{j}$ les racines cubiques de l'unité

autres que 1. $j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$

1) Vérifier que, si z est un nombre complexe :

$$\varphi(z) = (z - j)(z - \bar{j}) = 1 + z + z^2.$$

2) On désigne par M l'affixe de z dans le plan complexe P . Déterminer et construisez les ensembles suivants :

a) E : Ensemble des points M de P tels que $\varphi(z)$ soit réel.

b) F : Ensemble des points M de P tels que $\varphi(z)$ soit imaginaire pur.

c) Déterminer l'ensemble $E \cap F$. Justifier le résultat obtenu.

EXERCICE 65

1) Résoudre dans C chacune des équations suivantes sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

a) $z^3 + (1 + i)z^2 + (i - 1)z - i = 0$

b) $8z^3 - 12iz^2 - 6z + i = 0$

c) $z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i = 0$

d) $z^3 + (1 - 5i)z^2 - 2(5 + i)z + 8i = 0$

2) Résoudre dans C chacune des équations suivantes sachant qu'elle admet une solution réelle.

a) $z^3 + (3 - 2i)z^2 + (1 - 4i)z - 1 - 2i = 0$

b) $z^3 + (2i - 11)z^2 + (25 - 19i)z - 8(1 - 3i) = 0$

EXERCICE 66

Soit f l'application de C dans lui-même définie par :

$$f(z) = z^4 + 2\sqrt{3}(1 + 2i)z^3 - 4(1 - 6i)z^2 - 8\sqrt{3}(4 - 6i)z - 192$$

Démontrer qu'il existe deux éléments a et b tels que,

$$f(z) = (z^2 + 2\sqrt{3}z + 12)(z^2 + az + b).$$

Résoudre l'équation $f(z) = 0$.

Préciser le module et l'argument de chaque solution.

Calculez le produit de ces quatre racines.

EXERCICE 67 (BAC S2 99 1^{er} GROUPE S R)

Soit $P(z) = z^3 - (7 + 9i)z^2 + (39i - 14)z + 50$.

1) Démontrer que le polynôme P admet une racine unique z_0 de la forme $z_0 = ib$, avec b réel.

2) Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$, sachant que $P(z)$ s'écrit $P(z) = (z - ib)(z^2 + az + \beta)$ où a et β sont deux nombres complexes à déterminer.

EXERCICE 68

Soit $P(z) = iz^3 + (1 - i\sqrt{3})z^2 - (\sqrt{3} + 1)z + 1$

1) Calculer $P(i)$. En déduire l'ensemble des racines de l'équation $P(z) = 0$.

2) On appelle z_1 la racine de P dont la partie réelle est strictement positive. On pose $z' = z_1 - 1$.

a) Mettre z' sous forme trigonométrique.

b) Résoudre dans C $z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

c) En déduire les valeurs de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

EXERCICE 69

1) Soit $P(z) = z^4 + 3z^2 + 6z + 10$.

a) Montrer que :

$P(z) = (z^2 + iz + 1 + 3i)(z^2 + \alpha z + \beta)$ avec α et β nombres complexes à déterminer.

b) On pose :

$P(z) = (z^2 + iz + 1 + 3i)(z^2 - iz + 1 - 3i)$, en déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

2) a) Résoudre dans C l'équation

$z^2 + z\sqrt{3} + 1 = 0$. On désigne par b la solution ayant la partie imaginaire > 0 et c l'autre solution.

b) Soit A le point d'affixe 1, B et C les points d'affixes b et c . Montrer que A , B et C appartiennent au cercle C de centre $O(0, 0)$ et de rayon 1.

c) Quelle est la nature du triangle OAB .

d) Montrer que le quadrilatère $OABC$ est un losange.

EXERCICE 70

On considère le polynôme $P(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$ où z est un nombre complexe.

1) Déterminer deux nombres a et b tels que :

$$P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 20).$$

2) Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$.

3) Placer dans un repère orthonormé direct

$\vec{u}, \vec{v}$

$(O, \vec{u}, \vec{v})$, les images M, N, P et Q des nombres

complexes respectifs, $m = -2 + 4i$; $n = -2 - 4i$;

$p = 2 + 3i$; et $q = 2 - 3i$.

4) a) Déterminer les nombres complexes z vérifiant

$$\frac{(z - p)}{(z - m)} = i. \text{ Placer son image } K.$$

b) En déduire que le triangle MPK est rectangle isocèle en K .

5) a) Déterminer par le calcul l'affixe du point I quatrième point du carré $MKPL$.

b) Déterminer l'abscisse du point R intersection de (KL) et de l'axe des abscisses.

c) Montrer que M, N, P et Q sont sur un même cercle.

EXERCICE 71 : (BAC D 1995 1^{er} GROUPE) (SESSION DE REMPLACEMENT)

On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^3 - (6 - 2i)z^2 + (10 + 4i)z - 16 - 4i \text{ avec } z \in C$$

1) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution z_0 imaginaire pure.

2) Déterminer le polynôme Q tel que, pour tout $z \in C$ $P(z) = (z - z_0)Q(z)$.

3) Résoudre dans C , $P(z) = 0$. On notera z_0, z_1 et z_2 les solutions ; $|z_1| < |z_2|$.

4) Placer les points A, B, C d'affixes respectives z_0, z_1, z_2 dans le plan complexe de repère orthonormal

$\vec{u}, \vec{v}$

$(O, \vec{u}, \vec{v})$; puis calculer l'affixe du barycentre G des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, 1 et 1.

EXERCICE 72

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^3 + 9iz^2 + (12i - 22)z - 12i - 36 = 0$$

1) Montrer que (E) admet une racine réelle et une racine imaginaire pure notées respectivement par z_1 et z_2 . En déduire l'autre racine z_3 .

2) Dans le plan complexe muni d'un repère

orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives (-2) , $(-3i)$ et $(2 - 6i)$.

1) Donner l'écriture algébrique puis l'écriture

trigonométrique de $\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$.

2) Que peut-on en déduire pour les points A, B et C

3) On pose : $Z = \frac{1 - i(3 - \sqrt{3}) - z_2}{z_3 - 1 + 5i}$

a) Montrer que le complexe $Z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$

b) Ecrire Z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

c) En déduire les valeurs exactes de

$$\cos \frac{7\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{7\pi}{12}$$

d) Déterminer Z^6 puis résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^3 = Z^6$

4) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^5 = \frac{1}{3} z_2$

b) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 0$$

5) On pose $Z' = \frac{2z + \frac{1}{3}z_2}{iz + z_1}$

a) Interpréter géométriquement $|Z'|$ et $\arg Z'$

b) Déterminer puis construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

b-1) $|Z'| = 2$ b-2) $\arg Z' = \frac{\pi}{2} (2\pi)$

b-3) $\arg Z' = 0$ 2π

EXERCICE 73

1) Soit P le polynôme défini par :

$$P(z) = z^3 + (3 - 5i)z^2 - (11 + 12i)z - 9 + 15i$$

Montrer que P admet une racine imaginaire pure puis résoudre $P(z) = 0$

2) On donne A $(3i)$; B $(1 + i)$ et C $(-4 + i)$ dans

un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

a) Construire le triangle ABC puis montrer qu'il est rectangle.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme. Placer le point D

c) Montrer que les points A, B, C et D sont sur un cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

3) a) On pose $a = 1 + i$. Sans transformer a^3 ,

résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = a^3$

b) Donner les écritures trigonométriques et algébriques des solutions trouvées en a) en déduire le

sinus et le cosinus de $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}$.

4) On pose $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$

a) Donner la valeur de b^{2002}

b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n

tels que b^n soit réel.

5) a) calculer le module et l'argument de

$$a = -\sqrt{3} + i \text{ et } b = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

b) donner les écritures trigonométriques et

algébriques de $W = ab$ et $t = \frac{a}{b}$, en déduire le sinus et

le cosinus de $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}$.

EXERCICE 74 (BAC D 1995 1^{er} GROUPE)

On considère le polynôme P, de la variable complexe z, définie par : $P(z) = z^3 + iz^2 - 3z + 5i$.

1) Calculer $P(i)$, puis déterminer toutes les racines de P(z). On notera z_1 la racine dont la partie réelle est négative, et z_2 l'autre racine.

2) a) Ecrire sous forme trigonométrique $\frac{z_1 - i}{z_2 - i}$.

b) Dans le plan complexe de repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on désigne par A, B, C les images respectives de i, z_1 , z_2 . Déduire de la question précédente, la nature du triangle ABC.

EXERCICE 75

Partie A :

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^2 + 2(1 - \cos u)z + 2(1 - \cos u) = 0$$

(où u est un réel de l'intervalle $[0 ; 2\pi[$)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, cette équation.

On notera z_1 et z_2 les solutions.

2) Déterminer $|z_1|$ et $|z_2|$ et montrer que :

$$\arg z_1 = \frac{u}{2} + \frac{\pi}{2} (2\pi) ; \arg z_2 = -\frac{u}{2} - \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

Partie B :

Soit z_0 , z_1 et z_2 les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$(E) : z^3 - 10iz^2 - 4(3 - 4i)z + 40(4 + 3i) = 0$$

1) Sachant que z_0 est une solution imaginaire pure, trouver z_1 et z_2 tels que $\operatorname{Re}(z_1) > 0$.

2) On désigne par M_0 , M_1 et M_2 les images respectives dans le plan complexe des nombres $z_0 = 10i$, $z_1 = 4 - 2i$ et $z_2 = -4 + 2i$

Déterminer l'affixe de l'isobarycentre du triangle.

SIMILITUDES DIRECTES : APPLICATIONS $Z' = aZ + b$

EXERCICE 76

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal

$$(\vec{O}, \vec{u}, \vec{v}).$$

- Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre A $(1 - i)$ de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$
- Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre O, de rapport 4 et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
- Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe qui laisse invariant le point A $(1 - i)$ et qui transforme le point B $(3 + i)$ au point C $(1 + i)$
- Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe qui transforme A $(1 - i\sqrt{2})$ en B $(1 - i\sqrt{3})$ et C $(1 + \sqrt{6})$ en D $(-\sqrt{3} + i)$.

EXERCICE 77

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal

$(\vec{O}, \vec{u}, \vec{v})$. Dans chacun des cas suivants, déterminer

la nature et les éléments caractéristiques de $f, g, f^{-1}, g^{-1}, \text{gof}$ et fog .

- $f : z' = z - 2i$; $g : z' = z + i$
- $f : z' = z - 1 + i$; $g : z' = z + 1 - i$
- $f : z' = z + 2i$; $g : z' = 2z + i$
- $f : z' = 1 - 4i + z$; $g : z' = -z + 2i$
- $f : z' = z - 1 - i$; $g : z' = -z + 2i$
- $f : z' = z - 1$; $g : z' = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z + i$
- $f : z' = z - i$; $g : z' = (1 + i)z + 1 - i$
- $f : z' = z - 3i$; $g : z' = (1 - i)z$
- $f : z' = 2z + i$; $g : z' = 4z + 3 - 3i$
- $f : z' = -2z + 1$; $g : z' = 5z$
- $f : z' = 3z + i$; $g : z' = \frac{1}{3}z - 4i$
- $f : z' = 2z + 1 - i$; $g : z' = 3z + 2 - 2i$
- $f : z' = 6z + 3$; $g : z' = \frac{1}{6}z - \frac{1}{2}$
- $f : z' = 2z + i$; $g : z' = iz - 1 - i$
- $f : z' = 3z + 2i$; $g : z' = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}z + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$
- $f : z' = 2z + i$; $g : z' = (1 + i)z + 1 - i$
- $f : z' = 2z + 1 - i$; $g : z' = (1 - i)z - 1 - i$
- $f : z' = \frac{1}{2}z - 1 + i$;
 $g : z' = (1 - i\sqrt{3})z - 2\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$

$$19) f : z' = \frac{1}{2}z + 1 + i ;$$

$$g : z' = (1 - i\sqrt{3})z - 2\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$$

$$20) f : z' = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}z ; g : z' = iz + 1 + i$$

$$21) f : z' = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}z ; g : z' = iz$$

$$22) f : z' = \frac{\sqrt{3} + i}{2}z + 2 - \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

$$g : z' = -iz + 1$$

$$23) f : z' = -iz ; g : z' = iz + 2$$

$$24) f : z' = -iz + 1 ; g : z' = iz - i$$

$$25) f : z' = iz ; g : z' = (1 - i)z$$

$$26) f : z' = -iz + 1 + i ; g : z' = (1 - i\sqrt{3})z$$

$$27) f : z' = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}z + 1 - i ; g : z' = (1 + i)z + i$$

$$28) f : z' = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}z + 2 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$g : z' = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})i$$

$$29) z' = iz + 1 ; g : z' = -2iz - \frac{1 - 3i}{2}$$

$$30) z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

$$g : z' = (1 - i)z + 1 + i$$

$$31) f : z' = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})z ; g : z' = (\sqrt{3} - i)z$$

$$32) f : z' = (1 + i)z + 1 - i ; g : z' = (\sqrt{3} - i)z$$

$$33) f : z' = (1 + i\sqrt{3})z + 3 - 3i ;$$

$$g : z' = (1 + i\sqrt{3})z - 1 - 2i$$

$$34) f : z' = (1 - i)z ; g : z' = (1 + i)z + i$$

$$35) f : z' = (1 - i)z ; g : z' = (1 + i)z$$

$$36) f : z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3}$$

$$f : z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}$$

$$37) f : z' = (\sqrt{6} - i\sqrt{2})z ;$$

$$g : z' = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{8}z + \frac{-8i + i\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}$$

$$38) f : z' = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{8}z ; g : z' = (\sqrt{6} - i\sqrt{2})z$$

$$39) f : z' = (1 - i\sqrt{3})z + 1 + i\sqrt{3} ;$$

$$g : z' = \frac{1}{2}iz + 1 - i$$

$$40) f : z' = -4iz + 1 - 4i ; g : z' = \frac{1}{4}iz + 1 - 2i$$

EXERCICE 78

On considère la similitude directe S de centre $A(1, 1)$ de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

- 1) Soit $M(z)$ et $M'(z')$ son image par S . Exprimer z' en fonction de z .
- 2) On considère la transformation R du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = iz + 2$. Caractériser R .
- 3) Déterminer RoS.

EXERCICE 79

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^2 + (\sqrt{3} - 3i)z - 8 = 0$
- 2) Soit P le polynôme défini par :
 $P(z) = z^3 + (\sqrt{3} - 2i)z^2 + (-5 + i\sqrt{3})z - 8i$
 Calculer $P(-i)$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(z) = 0$
- 3) a) Placer dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O les points A, B et C d'affixes respectives $-i, \sqrt{3} + i$ et $-2\sqrt{3} + 2i$. Déterminer le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients $4, 2$ et 1 .
 b) Déterminer le centre, le rapport et un angle de la similitude directe S telle que $S(A) = B$ et $S(B) = C$.

EXERCICE 80

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit ϕ l'application de P dans P qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{4}\right)z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de ϕ .
- 2) Soit I le point d'affixe 2 .
 a) Déterminer l'affixe de $\phi(I)$.
 b) Démontrer que pour tout point M d'image M' par ϕ , IMM' est un triangle rectangle en M' .
- 3) Soit J un point du plan tel que $\phi(J) = O$.
 a) Déterminer l'affixe du point J .
 b) Déterminer l'image par ϕ de la droite (IJ) .
 c) Déterminer l'image par ϕ du cercle de diamètre $[IJ]$.
- 4) Soit la similitude directe ayant pour écriture complexe $z' = az + b$. Déterminer les nombres complexes a et b pour que $SoS = \phi$.

EXERCICE 81

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$.
 On considère les points $B(\sqrt{2})$ et $D(i)$.
 $ABCD$ est un rectangle tel que : $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$.
 Soit S la similitude directe qui au point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ telle que $z' = az + b$ avec $a \neq 0$.

- 1) Déterminer les nombres complexes a et b sachant que : $S(D) = C$ et $S(C) = B$.
- 2) Soit T la similitude directe qui au point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que :

$$z' = -i \frac{\sqrt{2}}{2} z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i.$$

- Déterminer les éléments caractéristiques de T .
- 3) Montrer que T transforme B en I milieu de $[AB]$.
 - 4) Montrer que (BD) est perpendiculaire à (CI) .
 - 5) Montrer que le centre de T est le point d'intersection de (BD) et (CI) .

EXERCICE 82

Le plan complexe P est muni d'un repère orthogonal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 1 cm .

- 1) Pour tout complexe z , on pose : $P(z) = z^4 - 1$.
 a) Factoriser $P(z)$ et en déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
 b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{z}{2 + 3i}\right)^4 = 1$
- 2) a) Placer dans le plan P les points A, B, C et D d'affixes respectives $Z_A = 2 + 3i$, $Z_B = -3 + 2i$, $Z_C = -2 - 3i$ et $Z_D = 3 - 2i$.

Calculer les affines des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$.

- b) Calculer le module et un argument du nombre complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B}$.
- c) Déduire des questions précédentes la nature du quadrilatère $ABCD$.

- 3) Démontrer que l'ensemble (C) des points M d'affixes z tels que :

$$\left\| 3\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} \right\| = \left\| \vec{MB} - 2\vec{MC} + \vec{MD} \right\| \text{ est un}$$

cercle de rayon OA et de centre G dont on précisera l'affixe. Tracer le cercle.

EXERCICE 83

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère deux applications T_1 et T_2 du plan P dans le plan P dont les écritures complexes sont : $T_1 : Z_1 = (\sqrt{3} + i)z$ et $T_2 : Z_2 = (1 - i\sqrt{3})z + 3$.

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T_1 et T_2 .
- 2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $T_2 \circ T_1$.
- 3) Démontrer qu'il existe un point K et un seul tel que l'on ait : $T_1(K) = T_2(K)$. On désigne par L l'image de K par T_1 . Calculer les affixes des points K et L .
- 4) Démontrer que le point L est invariant par chacune des applications $T_2 \circ T_1^{-1}$ et $T_1 \circ T_2^{-1}$. Quelle est la nature de chacune de ces applications. Préciser leurs éléments caractéristiques.

EXERCICE 84 (BAC D 1993 2^{ème} GROUPE)

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :
 $z^2 + (2 - \sqrt{3} - i)z + (\sqrt{3} - 1)(-1 + i) = 0$.
- 2) Soient A, B, C les points du plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'affixes respectives : $-i$; $-1 + i$; $\sqrt{3} - 1$. Montrer qu'il existe une similitude plane directe que l'on caractérisera, qui transforme O en B et A en C.

EXERCICE 85 (BAC D 1994 1^{er} GROUPE)

- On considère le nombre complexe $c = 1 - i$.
- 1) Calculer c^2 et c^5 . Dans un plan muni d'un repère orthonormé, marquer les points qui ont pour affixes c , c^2 et c^5 .
 - 2) A tout point M, d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' , avec $z' = cz + c^5$. On définit ainsi une transformation T du plan. Déterminer l'affixe du point S, invariant par T. Préciser la nature de la transformation T et ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 86 (BAC T 2005 1^{er} GROUPE)

- Soit θ un nombre réel vérifiant $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.
- On considère les nombres complexes :
 $a = 1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta$; $b = 1 + \cos 2\theta - i \sin 2\theta$.
- 1) Déterminer en fonction de θ , le module et un argument de chacun des nombres complexes a et b .
 - 2) On appelle S_θ la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = az + b$. Indiquer la nature de la transformation S_θ et préciser ses éléments caractéristiques dans les cas $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$.

EXERCICE 87

- On suppose que le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- 1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :
 $z^6 = -8i$; $z^3 = -216$
 b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré :
 $z^2 - 3z + 3 + i = 0$.
 - 2) On désigne par A et B les points d'affixes respectives $1 + i$ et $2 - i$ et G le barycentre des points pondérés (A, 2) ; (B, -1).
 a) Déterminer l'affixe du point G.
 b) Donner l'équation complexe de l'homothétie h de centre G et de rapport 2.
 c) Soit f l'application telle que $f = r \circ h$, où r est la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
 - Donner l'écriture complexe de r.
 - Etablir que l'écriture complexe de f est $z' = 2iz + 3$
 - Quelle l'image par f du cercle de diamètre [OG].
 d) Soit g la similitude qui transforme A en B et O en G. Donner son centre et son rapport.

EXERCICE 88

Dans le plan P étant muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f de P dans P qui à tout point M (x, y) associe le point M' (x', y')

$$\text{tel que : } \begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y \end{cases}$$

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

- 1) a) Exprimer z' en fonction de z .
 b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.
- 2) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on considère l'application g_λ de P dans P définie par son écriture complexe :
 $Z = (1 - \lambda^2)z + \lambda$.
 a) Donner l'écriture complexe de l'application $g_\lambda \circ f$
 b) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $g_\lambda \circ f$ soit une translation. Déterminer pour chaque valeur de λ le vecteur de la translation.

EXERCICE 89

Soit $\alpha \in [0, \pi]$ et soit z un complexe. On pose
 $P(z) = z^3 - (1 - 2 \sin \alpha)z^2 + (1 - 2 \sin \alpha)z - 1$.

- 1) a) Calculer P(1).
 b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $P(z) = 0$.
 $z_3 = -\sin \alpha - i \cos \alpha$.
 Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes.
- 3) a) Déterminer le module et un argument de $z_2 - z_1$ et $z_3 - z_1$.
 b) En déduire le module et un argument de $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.
- 4) Soit T la similitude directe de centre I d'affixe z_1 , qui transforme A d'affixe z_2 en B d'affixe z_3 .
 Donner l'expression de z' affixe de M' image de M d'affixe z par T.
 Déterminer α pour que T soit une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- 5) Soit $\alpha = \frac{\pi}{4}$
 a) Déterminer l'entier naturel n tel que z_2^n soit un réel.
 b) Donner la valeur de z_2^{1998}
 c) Déterminer $\text{ToT}(A)$.

Monsieur Ousmane Coundoul 557 11 39

EXERCICE 90

- Soit l'équation (E) : $z^4 + 7 + 24i = 0$
 - Vérifier que $z_0 = 2 - i$ est solution de E
 - Déterminer les racines quatrièmes de l'unité dans C en déduire l'ensemble des solutions de (E).
- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\rightarrow \rightarrow$ direct (O, e_1, e_2) . Soit $A(1 + 2i)$, $B(-2 + i)$, $C(-1 - 2i)$ et $\Omega(2 - i)$.
 - Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S_1 de centre Ω telle que $S_1(A) = B$.
 - Soit S_2 la transformation du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \frac{1+i}{2}z + \frac{1-3i}{2}$. Caractériser $S_2 \circ S_1$
- Soit r la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
 - Donner l'axe de $D = r(O)$
 - Montrer que les points O, A, D et B appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.
 - Déterminer l'image du cercle (C) par r
- Soit T_2 l'application du plan dans lui-même qui à $M(z)$ associe $M_2(z_2)$ tel $z_2 = \alpha^2 z + \beta$ où α et β sont des nombres complexes. Déterminer α et β tels que $S_2 \circ T_2$ soit :
 - Une translation de vecteur $\vec{u}(1)$
 - Une rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 91

Soit P le polynôme défini par :

$$P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

- Montrer que si z est solution de l'équation $p(z) = 0$, alors $\bar{z}$ et $\frac{1}{z}$ sont aussi solutions de cette équation.
- On pose $z_1 = 1 + i$.
 - Vérifier que z_1 est solution de l'équation $p(z) = 0$.
 - En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\rightarrow \rightarrow$ (O, u, v) , on note A_1 et A_2 les images respectives des nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i$.
 - Mettre sous forme trigonométrique z_1, z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$. En déduire qu'il existe une rotation R de centre O qui transforme A_1 en A_2 .
 - Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on désigne par A_n , l'image A_{n-1} par la rotation R . Déterminer sous forme trigonométrique les affixes des points A_3 et A_4 . Combien y a-t-il de points A_n distincts ?

EXERCICE 92

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé

$\rightarrow \rightarrow$

(O, u, v) . On désigne par T_1 l'application de P dans P qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ définie par : $z' = (1 - i)z + 3 - 2i$.

Soit a un nombre complexe non nul et b un nombre complexe quelconque. On désigne par T_2 l'application de P dans P qui à tout point N d'affixe z associe le point N' d'affixe z' telle $z' = az + b$.

Déterminer les nombres complexes a et b tels que $T_1 \circ T_2$ soit :

- L'homothétie de centre O et de rapport 2.
- La translation de vecteur $\vec{t}$ d'affixe $2 - 2i$.
- La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

EXERCICE 93

1) Soit P le polynôme de la variable complexe z définie par :

$$P(z) = z^3 + (1 - 4i)z^2 - (7 + 4i)z - 3 + 4i$$

- Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure.
- Résoudre dans C l'équation précédente. On note z_1 et z_2 les deux autres solutions avec $\operatorname{Re}(z_1) > 0$.
- Calculer : z_1^4 et z_2^4 . Résoudre dans C l'équation $z^4 = z_1^4$.
- Dans le plan complexe rapporté à un repère

orthonormal $\rightarrow \rightarrow$ (O, u, v) , on considère les points

$A(1 + 2i)$, $B(-2 + i)$ et $C(-1 - 2i)$.

- Donner l'écriture complexe de la similitude directe qui transforme A en B et O en C .
- On considère l'application R du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = e^{i\frac{\pi}{4}}z + (2 - i)(1 - e^{i\frac{\pi}{4}})$$

Donner la nature de R et ses éléments caractéristiques.

- Soit R' la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Donner l'écriture complexe de $R \circ S \circ R'$.

Préciser sa nature et ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 94 (BAC S1 2001 2^e GROUPE)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct

$\rightarrow \rightarrow$

(O, u, v) , on considère la transformation F qui au point d'affixe z associe le point M' d'affixe Z défini par : $Z = (1 + i)z - i$.

- Quelle est la nature de la transformation F ? Déterminer ses éléments caractéristiques.
- Soit Ω le point invariant de F ; quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?

EXERCICE 95

1) Soit T l'application du plan P dans lui-même qui au point M (x, y) associe le point M' (x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + \sqrt{3} \end{cases} \text{ On pose } z = x + i y \text{ et } z' = x' + i y'.$$

- a) Exprimer z' en fonction de z.
b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application T.
2) Soit S l'application de P dans P qui au point M (z) associe le point M₁(z₁) tel que :

$$z_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z. \text{ Reconnaitre s.}$$

- 3) Soit la transformation SoT telle que SoT(M) = M₂. Soit z₂ = x₂ + i y₂ l'affixe de M₂.
a) Exprimer z₂ en fonction de z puis x₂ et y₂ en fonction de x et de y.

Déterminer SoT(C) où C a pour affixe $-1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

- b) Soit (D) la droite d'équation $x + y\sqrt{3} + 2 = 0$.

Montrer que C appartient à D. Préciser (D) ∩ (D') où (D') est l'image de (D) par SoT.

EXERCICE 96

Le plan complexe P est rapporté à un repère

orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). On note A(2). Soit φ l'application de P vers P qui à tout point M d'affixe z associe M' = φ(M) d'affixe z' avec :

$$z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

- 1) a) Déterminer l'affixe de l'image φ(A) du point A.
b) Déterminer l'image Q' du point Q($\frac{2i\sqrt{3}}{3}$).
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.
3) Soit M un point distant de A et M' l'image de M par φ. Démontrer que AMM' est un triangle rectangle en M'.

EXERCICE 97 : (BAC S2 1998 1^{er} GROUPE)
(SESSION DE REMPLACEMENT)

Dans l'ensemble C des nombres complexes, on considère l'équation (E), d'inconnue z telle que :
(E) $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$.

- 1) Montrer que cette équation possède une solution réelle notée z₁. Déterminer l'autre solution z₂ de (E).
2) Dans le plan complexe muni d'un repère

orthonormé (O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$) on note M₁ le point d'affixe z₁ et M₂ le point d'affixe z₂.

Déterminer l'affixe du point C de l'axe (O, $\vec{e}_1$) équidistant de M₁ et de M₂.

- 3) Soit la rotation R₁ de centre C telle R₁(M₂) = M₁

a) Déterminer une mesure de l'angle de la rotation R₁.

b) Déterminer l'affixe du point O' image de O par R₁.

- 4) Soit la rotation R₂ de centre O et d'angle orienté $\hat{\theta}$ tel que $\text{mes } \hat{\theta} = \frac{\pi}{2} \text{ rd}$.

a) Quelle est la nature de la composée R₂oR₁? Justifier votre réponse.

b) Soit B d'affixe 3i. Déterminer l'image du cercle circonscrit au triangle BOC par R₂oR₁. Justifier votre réponse.

EXERCICE 98 (BAC S2 1999 1^{er} GROUPE)
(SESSION DE REMPLACEMENT)

On considère le plan complexe P muni d'un repère

orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).

1) Résoudre dans C l'équation: $-z^3 + 6z - 20i = 0$ (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure a.

2) Notons b et c les autres solutions de (E), b ayant la partie réelle positive et soient A, B, C les points de P d'affixes respectives a, b, c. Déterminer le module et

un argument de $\frac{b-a}{c-a}$.

En déduire la nature du triangle ABC.

- 3) Soit r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ rad ; et f l'application qui à tout point M de P

d'affixe $z \neq i - \sqrt{3}$ associe le point M' d'affixe z'

$$\text{définie par } z' = \frac{z - 2i}{z + \sqrt{3} - i}$$

a) Donner l'écriture complexe de r puis l'affixe du point A' = r(A).

b) Déterminer l'ensemble des points M de P dont les image par f ont pour affixe un réel négatif. On notera E cet ensemble.

c) Déterminer l'ensemble F des points M dont les images par f appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 99

On donne A(8) ; B(8i) ;

On appelle : D l'image de A par r = r(O, $-\frac{\pi}{3}$), O(0)

C l'image de B par r' = r(O, $\frac{2\pi}{3}$).

1) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon. Calculer z_C et z_D. Tracer (Γ) et placer A, B, C et D. Quelle est la nature du triangle OCD.

2) a) Soit AD (a) et BC (b), montrer que b = a√3. En déduire que ABCD est un trapèze.

b) Montrer que AB = CD.

c) Montrer que (AC) ⊥ (BD). Calculer AC et BD.

EXERCICE 100

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(1 + 2i)z - 4(1 - i) = 0$
- 2) On pose $a = 2(1 + i)$.
Ecrire a sous forme exponentielle puis donner l'écriture algébrique et exponentielle de $t = 4 + a\sqrt{2}$;
En déduire $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\cos \frac{\pi}{8}$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = a\sqrt{2}$
- 4) Soit f l'application du plan P dans lui-même qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que : $z' = 2iz + 1 + i$.
 - a) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $|z'| = 4$
 - b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $\arg z' = \pi [2\pi]$
 - c) Déterminer l'abscisse ω du point Ω tel que $f(\Omega) = \Omega$
 - d) Exprimer $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$; en déduire que $\Omega M' = 2 \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
 - e) Construire A' image de $A(i)$ par f .
 - f) Soit $(D) : y = x + 1$. En utilisant $z' = 2iz + 1 + i$ exprimer x et y en fonction de x' et y' où $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Donner l'équation de D' image de D par f .

EXERCICE 101

- 1) Soit $ABCD$ un carré de centre O , on suppose que ce carré est direct, on désigne par Ω le quart de tour direct de centre A . T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, h l'homothétie de centre C et de rapport $\sqrt{3}$.
 - a) Prouver que $r = ToR$ est une rotation dont on précisera l'angle.
 - b) Déterminer les images de A et de B par r . En déduire le centre de r .
- 2) On se propose d'étudier la transformation $f = R \circ h$.
 - a) Montrer que f est une similitude dont on précisera l'angle et le rapport.
 - b) Soit I le centre de f . Déterminer l'image de C par f . Prouver que l'angle $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et que $ID = \sqrt{3} IC$.
 - c) Déterminer et construire l'ensemble I des points M du plan tel que : $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{2}$.

Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CI})$. Placer I sur la figure.

- d) Prouver que l'ensemble des points M du plan tel que $MD^2 - 3MC^2 = 0$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 102 (BAC D 1990 1^{er} GROUPE)

- Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui au nombre complexe z associe le nombre complexe Z définie par :
- $$Z = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i).$$
- 1) Montrer que le nombre $w = 1 + i$ est invariant par f
 - 2) Montrer que $Z - w = (1 + i\sqrt{3})(z - w)$.
 - 3) Soit m, M, W les représentants dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des nombres complexes z, Z et w .
 - a) Calculer le module et l'argument du nombre complexe $\frac{Z - w}{z - w}$.
 - b) Montrer que M est l'image de m dans la composée d'une rotation dont précisera le centre et l'angle, et d'une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.
 - c) Faire une figure représentant W, m, M .
 - d) Montrer géométriquement que le triangle WmM est un triangle rectangle.
 - 4) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre $\left(\frac{2 - w}{2 - w}\right)^n$, où n est un entier naturel, en fonction de n .

EXERCICE 103 (BAC S2 2004 1^{er} GROUPE) (SESSION DE REMPLACEMENT)

- 1) a) Montrer que : $\left(\frac{-1 + i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = 1$, on donnera les solutions sous formes trigonométrique et sous forme algébrique.
c) Déduire des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^3 = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$ (E). On remarquera que (E) est équivalente à :

$$\left(\frac{z}{\frac{-1 + i}{\sqrt{2}}}\right)^3 = 1.$$
- 2) a) Ecrire $\frac{-1 + i}{\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique.
b) En déduire les arguments des solutions de (E).
- 3) Déduire des questions 1) c) et 2) b) les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- 4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère la transformation F qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \sqrt{2}(-1 + i)z + (1 + \sqrt{2})i + \sqrt{2}.$$
 - a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de F .
 - b) Construire l'image B du point A d'affixe -1 .

NOMBRES COMPLEXES ET SUITES

EXERCICE 104

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité 1 cm, on considère (E) :

$$2(-1+i)z^3 + 12z^2 - 12(1+i)z + 8(i-1) = 0$$

1) Résoudre (E) sachant qu'elle admet une racine réelle.

2) Mettre les solutions sous forme trigonométrique.

3) On considère la similitude plane directe S de centre $\Omega(2)$ et qui transforme le point d'affixe $A(1+i)$ en O.

Pour tout point $m(z)$ on note par $M(Z)$ son image par S

a) Exprimer Z en fonction de z. En déduire une mesure de l'angle de S ainsi que son rapport.

b) Exprimer z en fonction Z.

En déduire que z est solution de (E) si et seulement si on a $Z^3 = 8$ (E').

c) Résoudre (E') puis retrouver les solutions de (E).

4) On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie par : $z_0 = 2i$ et $z_{n+1} = (1+i)z_n - 2i$, $n \in \mathbb{N}$ ainsi que les points $M_n(z_n)$. On pose $Z_n = z_n - 2$.

a) Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 ainsi que la ligne brisée $M_0 M_1 M_2 M_3 M_4$.

b) Montrer que (Z_n) est une suite géométrique.

En déduire Z_n puis z_n en fonction de n.

Pour quelles valeurs de n, z_n est-il un réel ?

c) Montrer que $M_n M_{n+1} = (\sqrt{2})^{3+n}$.

En déduire l'expression de $L_n = \sum_{k=0}^n M_k M_{k+1}$ en

fonction de n. Déterminer n pour que la longueur de la ligne brisée $M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_n M_{n+1}$ dépasse les 100 km.

EXERCICE 105

Soit f l'application de C, ensemble des nombres complexes, dans lui-même, définie par :

$$f(z) = z^3 + (1-5i)z^2 - 2(5+i)z + 8i.$$

1) Calculer $f(2i)$. En déduire que f(z) peut s'exprimer comme produit d'un polynôme de degré un par un polynôme de degré deux de la variable z.

2) Résoudre dans C l'équation $f(z) = 0$. (1) Calculer le module et un argument des solutions.

3) On désigne par z_1, z_2, z_3 , les racines de l'équation

(1), z_2 étant la seule racine d'argument $\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Etablir que (z_1, z_2, z_3) et (z_3, z_2, z_1) sont des suites géométriques dont déterminera la raison.

EXERCICE 106

On veut déterminer trois nombres complexes z_1, z_2 et z_3 tels que leurs modules forment une suite géométrique de raison 2 et leurs arguments une suite arithmétique de raison $\frac{2\pi}{3}$.

Déterminer z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique

sachant que $z_1 \times z_2 \times z_3 = 4 + 4i\sqrt{3}$ et

$$\arg z_1 \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

EXERCICE 107

Soit (S_n) la suite définie par :

$$S_n = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}, n \geq 1.$$

1) On pose $z_n = e^{i\frac{\pi}{n}}$. Calculer $Z = \sum_{k=0}^n z_n^k$ en

fonction de z et de n. En déduire $\operatorname{Re}(Z)$ et $\operatorname{Im}(Z)$

2) Démontrer que : $S_n = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2n})}$ et déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

EXERCICE 108

Soit le nombre complexe :

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} (1+i)$$

1) a) Calculer $|a-1|$.

b) Calculer un argument du complexe $\frac{a-1}{a}$.

2) On pose $z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* ; z_n = a^n$.

Dans le plan complexe, à l'unité choisie 4 cm, on désigne par M_n le point d'affixe z_n .

a) Placer les points M_0, M_1, M_2 .

b) Démontrer que pour tout n

$$\left(\vec{OM}_n, \vec{OM}_{n+1} \right) = \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad (1)$$

$$\left(\vec{M_{n+1}O}, \vec{M_{n+1}M_n} \right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad (2)$$

c) Utiliser (1) et (2) pour construire géométriquement les points M_3, M_4, M_5 .

EXERCICE 109

Soit f la fonction polynôme de C définie par :

$$f(z) = z^2 - [1+i(\sin\theta + \tan\theta)]z + \sin\theta(i - \tan\theta).$$

$$\theta \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$$

1) a) Montrer que f admet une solution imaginaire pure notée a puis calculer l'autre racine notée b.

a) Ecrire a et b sous forme trigonométrique.

2) Le plan (P) étant rapporté à un repère orthonormé on considère la transformation T de (P) dans (P) associée à l'application g de C dans C définie par :

$$g(z) = \frac{1}{1+i\tan\theta} z + i\sin\theta$$

a) Donner les éléments caractéristiques de T.

On note Ω le point invariant de T.

b) Soit M_0 un point de (P) autre que Ω . On pose $M_1 = T(M_0)$, $M_2 = T(M_1)$ et $M_n = T(M_{n-1})$. Démontrer que la suite ΩM_n est géométrique. Converge-t-elle ? Que peut-on en conclure pour la suite (M_n) ?

EXERCICE 110

On considère les suites (S_n) et (T_n) telles que (S_n) est géométrique de raison q , de premier terme $S_0 = 3$ et $S_5 = 96$. (T_n) est arithmétique de raison r , de premier

$$\text{terme } T_0 = \frac{\pi}{6} \text{ et } \sum_{k=0}^5 T_k = 6\pi$$

- 1) Calculer q et r .
- 2) Soit (Z_n) la suite des nombres complexes définie par : $Z_n = S_n e^{iT_n}$. Exprimer Z_n en fonction de n .
- 3) Montrer que (Z_n) est une suite géométrique de raison le nombre complexe a que l'on déterminera.
- 4) a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation qui au point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que $z' = az + i\sqrt{3}$
b) On pose $S^n = S \circ S \circ S \circ \dots \circ S \circ S$ (n fois). Pour quelles valeurs de n S^n est-elle une homothétie ?

EXERCICE 111

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + i)$$

- 1) Soit M_n l'image de z_n dans le plan complexe. Placer M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4 dans le plan.
- 2) On associe à (z_n) les deux suites numériques réelles (x_n) et (y_n) telles que :
 $\forall n \in \mathbb{N} : z_n = x_n + i y_n$
a) Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n et y_{n+1} en fonction de y_n .
b) En déduire x_n en fonction de n .
c) On pose $U_n = 1 - y_n$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique ; en déduire U_n puis y_n en fonction de n .
d) Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes. Déterminer leur limite ?
- 3) Que peut-on dire de la suite (z_n) ?
- 4) Comment sont disposés les points $M_0 ; M_1 ; M_2 ; \dots ; M_n$

EXERCICE 112

Soit (U_n) et (V_n) deux suites définies par :

$$U_0 = 0 ; V_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$U_n = U_{n-1} - V_{n-1} \text{ et } V_n = U_{n-1} + V_{n-1}$$

On pose : $z_n = U_n + i V_n$

- 1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = (1+i) z_{n-1}$. Que peut-on en déduire pour la suite (z_n) . Exprimer z_n en fonction de z_0 et de n .
b) Ecrire z_n sous la forme trigonométrique puis en déduire U_n et V_n en fonction de n .

c) Pour quelles valeurs de n , z_n est :

- Réel ?
- Imaginaire pur ?

2) on pose $S = z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_n$

$$R = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n \text{ et}$$

$$T = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

Calculer S puis T et R en fonction de n .

EXERCICE 113

Soit la suite (Z_n) définie par :
$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \frac{1}{3} Z_n + \frac{2}{3} i \end{cases}$$

- 1) On pose $U_n = Z_n - i \forall n \in \mathbb{N}$.
a) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .
b) En déduire U_n en fonction de n .
- 2) On pose : $X_n = \operatorname{Re}(U_n)$ et $Y_n = \operatorname{Im}(U_n)$.
a) Exprimer X_n et Y_n en fonction de n .
b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n$.
- 3) a) On note : $A_n(U_n)$ et $B_n(Z_n)$.
b) Calculer $|U_n|$ et $\arg(U_n)$ puis montrer que les points A_n sont alignés.
c) Montrer que les points B_n sont alignés.

EXERCICE 114

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 4cm). On considère les suites numériques (U_n) et (V_n) définies par :

$$U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } V_n = \frac{n\pi}{3}$$

On désigne par M_n le point du plan d'affixe z_n

défini par : $z_n = U_n e^{i V_n}$.

- 1) a) Préciser la nature des suites (U_n) et (V_n) .
b) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n z_n est-il réel ?
- 2) a) Représenter dans le plan complexe les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 .
b) Démontrer que le triangle $OM_n M_{n+1}$ est rectangle en M_{n+1} .
- 3) Soit (a_n) la suite définie par :
 $a_n = |z_{n+1} - z_n|$. Montrer que (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Préciser sa limite.

A Monsieur Libasse Ndiaye
Professeur de Mathématiques au Lycée Kennedy