

SUITES (Partie 2)

I. Comportement à l'infini d'une suite géométrique

1) Rappel

Définition : Une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n , on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé raison de la suite.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = -3u_n$ et $u_0 = 5$ est une suite géométrique de raison -3 et de premier terme 5 .

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .
Pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Exemple : Pour la suite précédente, on a pour tout n : $u_n = 5 \times (-3)^n$

2) Limites

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	<i>pas de limite</i>	0	1	$+\infty$

Démonstration dans le cas $q > 1$ (exigible BAC) :

Prérequis : Pour tout entier naturel n , on a : $(1+a)^n \geq 1+na$ (inégalité de Bernoulli), démontrée dans le chapitre « SUITES (Partie 1) Paragraphe I. ».

On suppose que $q > 1$, alors on peut poser $q = a + 1$ avec $a > 0$.

$$q^n = (1+a)^n \geq 1+na.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+na) = +\infty$ car $a > 0$.

Donc d'après le théorème de comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Exemple : La suite de terme général -5×4^n a pour limite $-\infty$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$.

3) Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Méthode : Utiliser la limite d'une suite géométrique

Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n}{3} \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n - 3^n) \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

a) $(-2)^n$ est une suite géométrique de raison -2 et $-2 \leq -1$.

Donc $(-2)^n$ ne possède pas de limite.

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n}{3}$ n'existe pas.

$$\text{b) } 2^n - 3^n = 3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 \right).$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et $-1 < \frac{2}{3} < 1$.

$$\text{Donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 \right) = -1.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ car 3^n est une suite géométrique de raison 3 et $3 > 1$.

Donc par limite d'un produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 \right) = -\infty$

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n - 3^n) = -\infty$.

c) On reconnaît les n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1 .

$$\text{Donc } 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right).$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ comme limite d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2$.

Méthode : Etudier une suite arithmético-géométrique

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3% par an. Chaque année suivante, il dépose 300€ de plus. On note (u_n) la somme épargnée à l'année n .

On a alors : $u_{n+1} = 1,03u_n + 300$ et $u_0 = 5000$

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 10000$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.
- 3) Exprimer v_n en fonction de n .
- 4) En déduire u_n en fonction de n .
- 5) Etudier les variations de (u_n) .

$$1) u_1 = 1,03u_0 + 300 = 5450$$

$$u_2 = 1,03u_1 + 300 = 5913,5$$

2)

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 10000$$

$$= 1,03u_n + 300 + 10000$$

$$= 1,03u_n + 10300$$

$$= 1,03(u_n + 10000)$$

$$= 1,03v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme

$$v_0 = u_0 + 10000 = 5000 + 10000 = 15000.$$

3) Pour tout n , $v_n = 15000 \times 1,03^n$.

4) Pour tout n , $u_n = 15000 \times 1,03^n - 10000$.

On a alors : $u_{10} = 15000 \times 1,03^{10} - 10000 \approx 10158,75$

5) Pour tout n ,

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= 15000 \times 1,03^{n+1} - 10000 - (15000 \times 1,03^n - 10000) \\
 &= 15000 \times (1,03^{n+1} - 1,03^n) \\
 &= 15000 \times 1,03^n \times (1,03 - 1) \\
 &= 450 \times 1,03^n > 0
 \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

II. Limites et comparaison

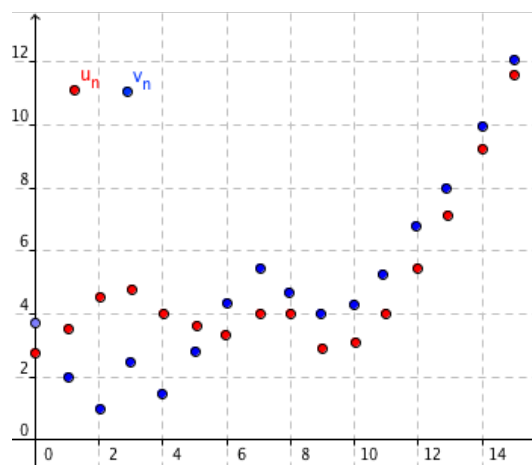
1) Théorèmes de comparaison

Théorème 1 :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Par abus de langage, on pourrait dire que la suite (u_n) pousse la suite (v_n) vers $+\infty$ à partir d'un certain rang.



Démonstration (exigible BAC) :

Soit un nombre réel a .

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, donc l'intervalle $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_1 .

On a donc pour tout $n \geq n_1$, $a < u_n$.

- A partir d'un certain rang, que l'on note n_2 , on a $u_n \leq v_n$.

- Ainsi pour tout $n \geq \max(n_1; n_2)$, on a $a < u_n \leq v_n$.

On en déduit que l'intervalle $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir du rang $\max(n_1; n_2)$.

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Théorème 2 :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Méthode : Déterminer une limite par comparaison

Déterminer la limite suivante $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + (-1)^n)$

$$(-1)^n \geq -1 \text{ donc } n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1.$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 1) = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + (-1)^n) = +\infty.$$

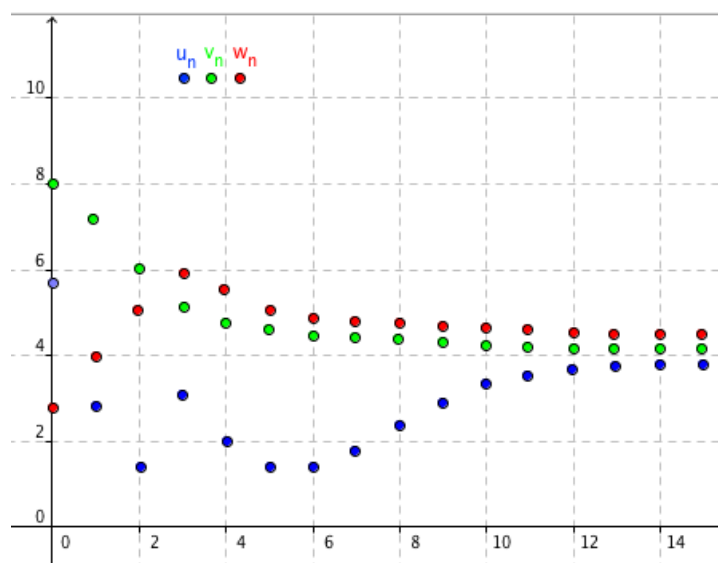
2) Théorème d'encadrement**Théorème des gendarmes :**

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$.

Par abus de langage, on pourrait dire que les suites (u_n) et (w_n) (les gendarmes) se resserrent autour de la suite (v_n) à partir d'un certain rang pour la faire converger vers la même limite.

Ce théorème est également appelé le théorème du sandwich.



Démonstration :

Soit un intervalle ouvert I contenant L .

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_1 .

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_2 .

- A partir d'un certain rang, que l'on note n_3 , on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.

- Ainsi pour tout $n \geq \max(n_1; n_2; n_3)$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (v_n) .

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$.

Méthode : Déterminer une limite par encadrement

Déterminer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin n}{n} \right)$

On a : $-1 \leq \sin n \leq 1$ donc $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin n}{n} \right) = 1$

III. Suites majorées, minorées, bornées1) Définitions :

Définitions : - La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.

- La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.

- La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :

- Les suites de terme général $\cos n$ ou $(-1)^n$ sont bornées.

- La suite de terme général n^2 est minorée par 0.

Méthode : Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

- **Initialisation :**

$$u_0 = 2 < 3$$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité :**

- Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $u_k \leq 3$.

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k+1$: $u_{k+1} \leq 3$.

On a : $u_k \leq 3$ donc $\frac{1}{3}u_k \leq \frac{3}{3} = 1$ et donc $\frac{1}{3}u_k + 2 \leq 1 + 2 = 3$.

On a donc : $u_{k+1} \leq 3$

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n , soit : $u_n \leq 3$.

2) Convergence des suites monotones

Propriété : Soit (u_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ alors la suite (u_n) est majorée par L .

Démonstration :

Démontrons par l'absurde en supposant le contraire, soit : « Il existe un entier p , tel que $u_p > L$. »

- L'intervalle ouvert $]L - 1; u_p[$ contient L .

Or, par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$. Donc l'intervalle $]L - 1; u_p[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang (1).

- Comme (u_n) est croissante : $u_n \geq u_p$ pour $n > p$.

Donc si $n > p$, alors $u_n \notin]L - 1; u_p[$ (2).

(1) et (2) sont contradictoires, on en déduit qu'il n'existe pas $p \in \mathbb{N}$, tel que $u_p > L$.

Et donc la suite (u_n) est majorée par L .

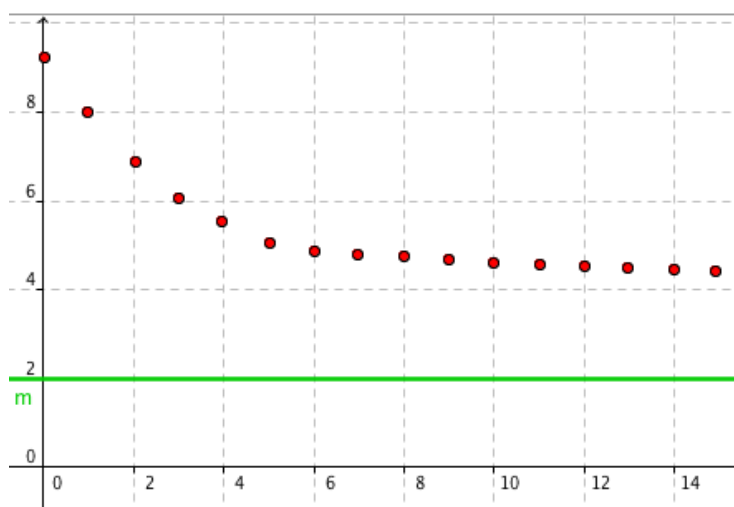
Théorème de convergence monotone :

- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

- Admis -

Remarque :

Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite. Dans l'exemple ci-dessous, la suite décroissante est minorée par 2. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 2 mais n'est pas nécessairement égale à 2.



Méthode : Utiliser le théorème de convergence monotone

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

- On a démontré dans le paragraphe I. que la suite (u_n) est croissante.
On a démontré dans la méthode précédente que la suite (u_n) est majorée par 3.
D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

- On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

Or $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \frac{1}{3}L + 2$ par produit et somme de limites.

Une limite étant unique, on en déduit que $L = \frac{1}{3}L + 2$, soit $L = 3$.

La suite (u_n) converge donc vers 3.

Corollaire :

- Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration :

1) Soit un réel a .

Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier p tel que $u_p > a$.

La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n > p$, on a $u_n \geq u_p$.

Donc pour tout $n > p$, on a $u_n > a$.

Et donc à partir d'un certain rang p , tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]a; +\infty[$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2) Démonstration analogue.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales