

# Recueil d'exercices de Mathématiques

## Terminale S2

### 273 EXERCICES

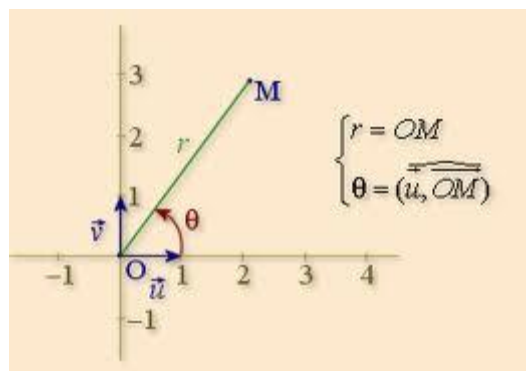
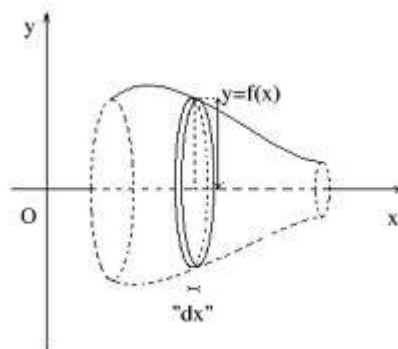
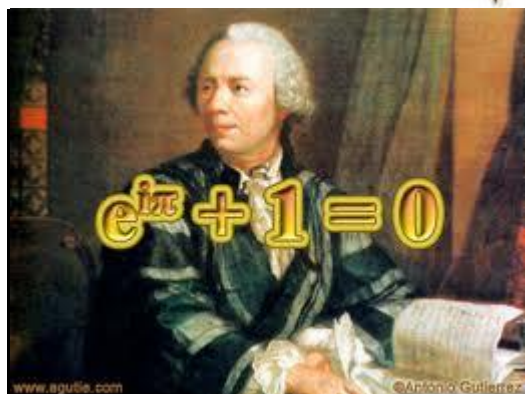
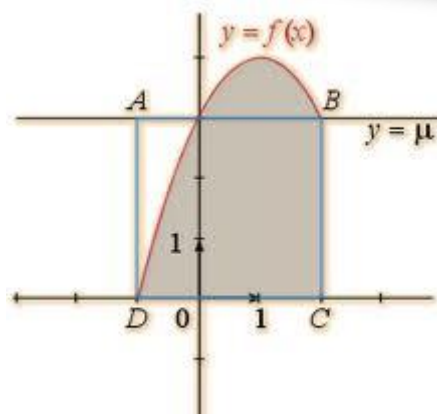
2013/2014

LYCEE DE BAMBEY

Ibrahima FALL

e-mail : ibf24@hotmail.fr

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx = \frac{1}{2} \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right)$$



# Sommaire

|                                           |     |
|-------------------------------------------|-----|
| CONSEILS GENERAUX .....                   | 2   |
| LIMITES – CONTINUITE – DERIVABILITE ..... | 3   |
| PRIMITIVES.....                           | 24  |
| FONCTIONS LOGARITHME NEPERIEN .....       | 28  |
| FONCTION EXPONENTIELLE.....               | 34  |
| CALCUL INTEGRAL .....                     | 48  |
| EQUATIONS DIFFERENTIELLES .....           | 53  |
| SUITES NUMERIQUES .....                   | 58  |
| NOMBRES COMPLEXES.....                    | 65  |
| DENOMBREMENT .....                        | 83  |
| PROBABILITES.....                         | 88  |
| STATISTIQUE A DEUX VARIABLES .....        | 101 |
| ANNEX .....                               | 108 |
| Opérations sur les limites.....           | 109 |
| Tableau de dérivée : .....                | 111 |
| Operations sur les dérivées :.....        | 111 |
| Primitives de fonctions usuelles :.....   | 112 |

## EUCLIDE

*D'Alexandrie*

*(330 avant JC – 275 avant JC)*



**« Si vous touchez aux maths, vous ne devez être ni pressés, ni cupides, fussiez-vous roi ou reine. »**

## CONSEILS GENERAUX

Tout travail scientifique nécessite une ou des méthodes d'approche des exercices s'appuyant sur les conseils et les remarques du professeur. C'est pourquoi vous devriez travailler de manière régulière et avec rigueur toute l'année scolaire. Cette discipline dans la tâche vous facilitera une bonne maîtrise du programme de *Terminale S*.

Constituant le noyau de votre travail, les **Cours** et les **Démonstrations afférentes** sont indispensables et doivent être *appris* et *mémorisés*, ce qui vous facilitera, d'emblée, le traitement des différents exercices.

Si vous avez du mal à vous retrouver dans votre cours, vous devez vous astreindre à faire des **fiches** dans lesquelles vous ferez figurer :

- *Les définitions* : c'est le vocabulaire de base qui vous permet de comprendre les questions et les consignes des exercices ;
- *Les théorèmes et les formules* soulignant particulièrement *les hypothèses* : celles-ci vous indiquent si vous pouvez ou non utiliser un théorème. La vérification des hypothèses est évaluée dans la *rigueur* et la *précision* de la rédaction ;
- Il vous faut dégager l'articulation ou *le schéma de démonstration*.

### *UNE RESOLUTION EN PLUSIEURS ETAPES*

La résolution d'un exercice ne se fait pas à l'aveuglette, mais en plusieurs phases :

- D'abord, *lire attentivement tout l'énoncé*. Celui-ci peut contenir de résultats intermédiaires susceptibles de vous indiquer l'esprit dans lequel l'exercice a été écrit et, donc, de vous guider vers la méthode la plus judicieuse à employer ;
- Ensuite, *souligner les hypothèses de l'exercice*. C'est à partir de celles-ci que vous pourrez bâtir une démonstration à l'aide de théorèmes les vérifiant ;
- Puis, résolvez, avec les explications appropriées sans discours inutile, les questions que *vous savez faire* et, dans un premier temps, admettez *les autres afin d'avancer* dans votre exercice ;
- Par ailleurs, si vous n'avez pas traité une question, *ne vous obstinez pas* : vous risquez de perdre votre sang-froid et de commettre ensuite des erreurs dans les questions simples. *Laissez un espace et continuez* ;
- Enfin, *encadrez vos réponses*.

## LIMITES – CONTINUITE – DERIVABILITE

### ✎ Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

$$1^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 3x^2 + x + 1)$$

$$3^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 3}$$

$$5^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

$$7^{\circ}) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^3 + 5x + 1}{x + 3}$$

$$9^{\circ}) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x - \sqrt{x^2 - 4}$$

$$11^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - x - 2}$$

$$13^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3} + \sqrt{x - 3}}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$15^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - \sin x} - 2}{x}$$

$$17^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$19^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{2\pi x - 1}{3x - 2}\right)$$

$$21^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$$

$$23^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$$

$$25^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 5x}$$

$$27^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

$$29^{\circ}) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\cos(2x)}$$

$$2^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 + x + 1)$$

$$4^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{(1-x)^2}$$

$$6^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2}$$

$$8^{\circ}) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$10^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{3x - 1}$$

$$12^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{2x+3}}$$

$$14^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0} x \left( \sqrt{4 + \frac{1}{x}} - 2 \right)$$

$$16^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{2x + 1}$$

$$18^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}$$

$$20^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

$$22^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2 + x}$$

$$24^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$$

$$26^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$28^{\circ}) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$30^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1 - \cos 3x}}$$

**Exercice 2 :**

Etudier l'existence d'un prolongement par continuité pour les fonctions suivantes, en  $x_0$  :

$$1^\circ) f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{3x^2}, x_0 = 0$$

$$2^\circ) f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{2x-1}, x_0 = \frac{1}{2}.$$

$$3^\circ) f(x) = \frac{1+3x}{x^2+x}, x_0 = 0.$$

$$4^\circ) f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x}, x_0 = 0$$

**Exercice 3 :**

Etudier, dans chaque cas, la continuité de  $f$  en  $x_0$  :

$$1^\circ) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}; & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

$$2^\circ) f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|}; & x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}, x_0 = 0$$

$$3^\circ) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}, & x \in ]1; +\infty[ \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}, & x \in ]-\infty; 1[, \\ f(1) = 2 \end{cases}, x_0 = 1$$

**Exercice 4 :**

Soit la fonction  $\varphi$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x} + \cos x}{\sqrt{x^2+1}}$

1. Montrer que, pour tout  $x > 1$ ,  $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2+1}} \leq \varphi(x) \leq \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2+1}}$
2. En deduire la limite de  $\varphi$  en  $+\infty$

**Exercice 5 :**

Soit la fonction  $f$  définie par : 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\sin 2x}{x} & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de  $f$  en 0.

**Exercice 6 :**

Soit la fonction  $f : x \mapsto 3x + 2 \sin x$

1. a- Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x + 2$

b- En déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{f(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{5} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a- Montrer que  $f$  est continue en 0

b- Montrer que pour tout  $x \in \left] \frac{2}{3}, +\infty \right[$  :  $\frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x+2}$

c- En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ . Interpréter le résultat

**Exercice 7 :**

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^3-7x^2+x+5}$  si  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$   $f(1) = a$

1. Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$

2. Déterminer le réel  $a$  pour que  $f$  soit continue en 1.

**Exercice 8 :**

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x - \sqrt{x - \sqrt{x}} - 1}{(x-1)^2}$

1. Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$

2. Peut-on parler de limite en 0 pour  $f$ . Justifier.

3. Déterminer le domaine de continuité  $D_c$  de  $f$

**Exercice 9 :**

On considère la fonction  $f$  définie par

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - |x|} - ax, \text{ si } x \in ]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[ \\ f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x} \quad \text{si } x \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[ \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de  $f$  en 0
2. Etudier suivant  $a$  la continuité de  $f$  en 1 et  $-1$
3. Existe-t-il des valeurs de  $a$  pour lesquelles  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 10 :**

Soit la fonction  $f$  définie par 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{m\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1} \quad \text{si } |x| \neq 1 \\ f(x) = 2x^3 + px + 1 \quad \text{si } |x| = 1 \end{cases}$$

Déterminer  $m$  et  $p$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 11 :**

Calculer 
$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16\sqrt{x} - \sqrt{x} - 3\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}}{16(x-4)^2}$$

**Exercice 12 :**

On admet l'existence d'une limite réelle en 0 pour :  $f(x) = \frac{\sin(x) - 1}{x^3}$

1. En transformant convenablement  $f(2x)$ , trouver la valeur de cette limite.

2. Utiliser le résultat précédent pour déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x^3}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) - \frac{x^2}{2}}{x^4}$

**Exercice 13 :**

Démontrer que l'équation :  $x^3 + x - 3 = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in ]1; 2[$

En déduire une valeur approchée par défaut de cette  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.

**Exercice 14 :**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f_a(x) = \frac{ax^2 - x + 1}{x - 1}$

1. Etudier suivant les valeurs de  $a$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f_a(x)$ . Interpréter les résultats obtenus.
2. Etudier suivant les valeurs de  $a$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_a(x)}{x}$ .
3. Dans le cas où  $a$  est non nul,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_a(x) - x]$ . Interpréter le résultat obtenu.

**Exercice 15 :**

Démontrer que l'équation  $x^4 + x^3 - x + 1 = 0$  n'a pas de solution sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 16 :**

On considère la fonction  $f$  définie par 
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - x + 1} + ax & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 + x - 2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On désigne par  $(\xi)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $R = (O; \vec{i}, \vec{j})$

**Partie A**

- Vérifier que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
- Déterminer la valeur  $a$  pour que  $f$  soit continue en 1.

**Dans la suite de cet exercice, on prend  $a = \frac{2}{3}$**

- Déterminer le domaine de continuité de  $f$ .

**Partie B**

- Montrer que pour tout  $f(x) = x \left( \frac{2}{3} - \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)$
- Justifier que : pour tout  $x < 0$  :  $\sqrt{x^2 - x + 1} - x \neq 0$
  - Montrer que : pour tout  $x < 0$  :  $f(x) + \frac{x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} - \frac{1}{2}$
  - Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( f(x) + \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \right)$ . Interpréter le résultat.

**Partie C**

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
- Montrer qu'il existe trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que : pour tout  $x > 1$  :  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$
- Expliquer pourquoi la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à  $(\xi)$  au voisinage de  $+\infty$
- Étudier la position de  $(\xi)$  par rapport  $\Delta$

**Exercice 17 :**

Donnez l'équation de la tangente au graphe de la fonction  $f$ , en  $a=7$ , pour

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + \frac{3}{4}x - 6. \text{ (vous explicitez toutes les étapes du raisonnement.)}$$

**Exercice 18 :**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0;5]$  par:  $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{35}{3}x^3 - 25x^2 + 24x$

et le polynôme  $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12)$ .

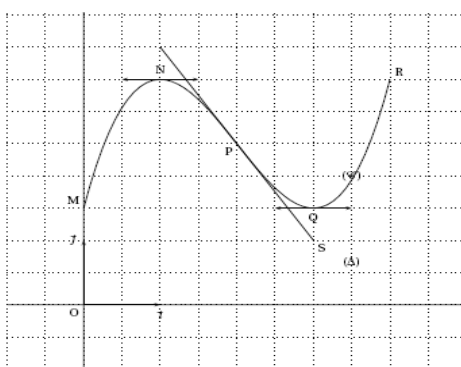
- Calculez  $f'$  la dérivée de  $f$  sur  $[0;5]$ .
- Résoudre  $P(x) = 0$ .
- Développez  $P(x)$  et en déduire que  $P$  et  $f'$  ont même signe pour tout  $x$ .
- Etudiez le signe de  $f'$  et les variations de  $f$ .

**Exercice 19 :**

Soit  $f$  la fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $[0 ; 4]$  dont la représentation graphique, dans un repère orthonormal  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ , est la courbe  $C$  ci-contre. Les points  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  et  $R$  appartiennent à  $C$ .

Les coordonnées de  $M$  sont  $(0 ; \frac{3}{2})$ , celles de  $N$  sont  $(1 ; \frac{7}{2})$ , celles de  $P$  sont  $(2 ; \frac{5}{2})$ , celles de  $Q$  sont  $(3 ; \frac{3}{2})$  et celles de  $R$  sont  $(4 ; \frac{7}{2})$ .

La courbe  $C$  admet en chacun des points  $N$  et  $Q$  une tangente parallèle à l'axe des abscisses. La droite  $(\Delta)$  est la tangente à la courbe  $C$  au point  $P$  ; elle passe par le point  $S$  de coordonnées  $(3 ; 1)$ .



- Donner  $f'(1)$ ,  $f'(2)$  et  $f'(3)$ .
  - Déterminer une équation de la droite  $(\Delta)$ .
- Déterminer à l'aide du graphique le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 3$  sur l'intervalle  $[0 ; 4]$ .
  - Tracer la droite d'équation  $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$  dans le repère précédent puis, à l'aide du graphique, résoudre l'inéquation  $f(x) < \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ .

3) La fonction  $f$  est la dérivée d'une fonction  $F$  définie sur  $[0 ; 4]$ . En justifiant la réponse, donner le sens de variation de  $F$ .

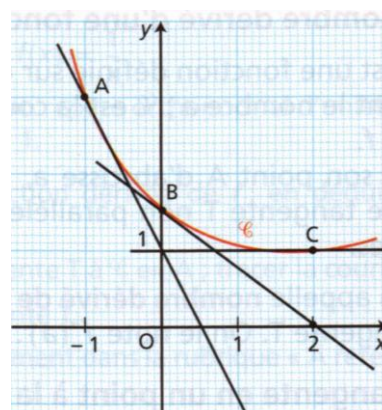
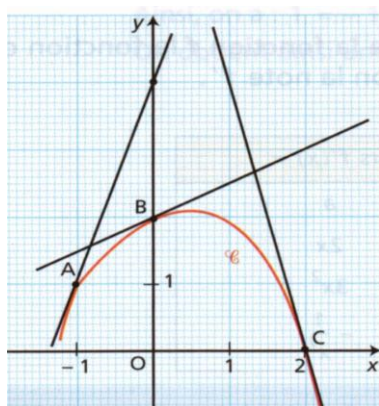
4) Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; 4]$  par  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ .

a) Donner le tableau de variation de  $f$ .

b) En déduire le tableau de variation de  $g$ .

### Exercice 20 :

Dans chacune des figures suivantes, la courbe  $C$  est la courbe représentative d'une fonction  $f$ . Sachant que les droites tracées sont les tangentes à  $C$  aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$ , déterminer par lecture graphique les nombres dérivés  $f'(-1)$ ,  $f'(0)$ ,  $f'(2)$ .

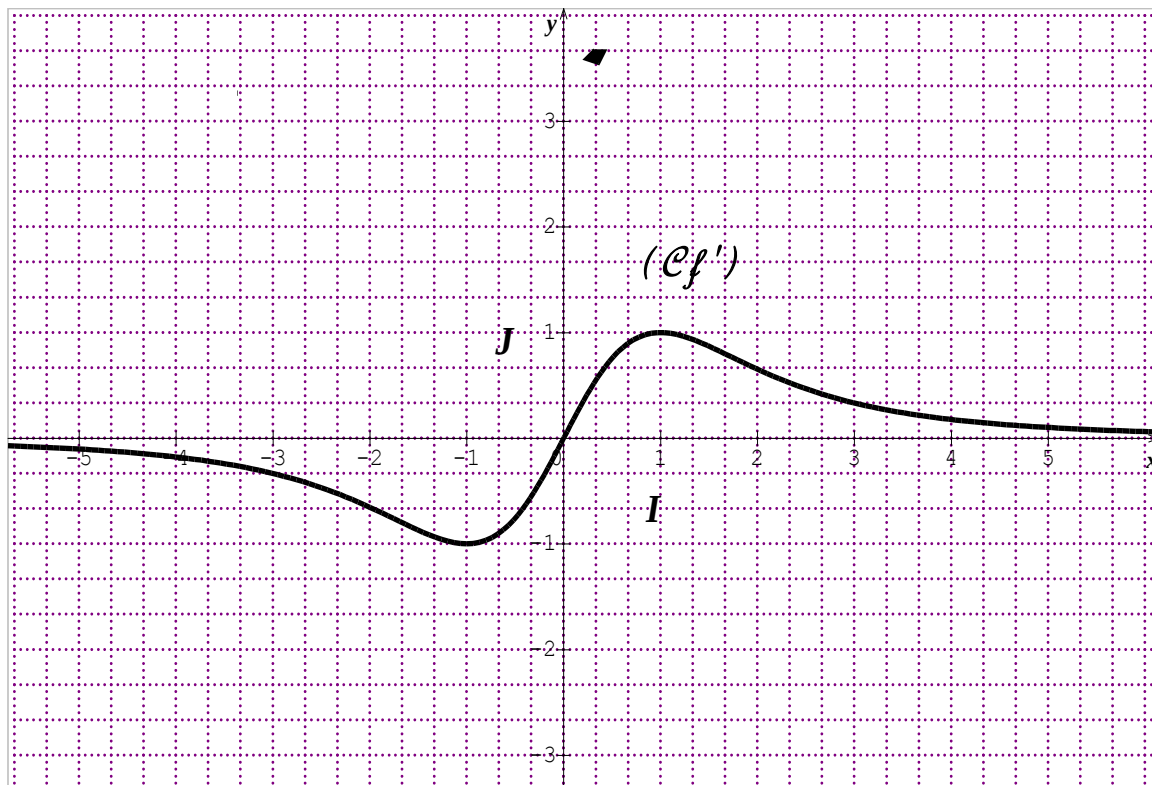


### Le Saviez – Vous ?

En Allemagne, ce que nous connaissons sous le nom de « Théorème de Thalès » est appelé « Théorème de Pythagore ». Et ce même théorème de Pythagore est plus connu sous le nom de « Théorème du Triangle Rectangle » dans beaucoup de pays Anglo Saxon qui reconnaissent la paternité de ce théorème aux Égyptiens Noirs, Pharaons et contremaîtres des Pharaons dans les champs de Papyrus au bord du Nil

**Exercice 21 :**

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . La courbe représentative de  $f'$  est donnée ci-après :



a- Donner le signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

b- Déduisez-en que  $f$  admet un extremum en  $x = 0$ .

c- Dresser le tableau de variation de  $f$ .

a- Montrer que la fonction  $f'$  est bornée.

b- On sait que  $f(0) = 0$ . Montrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $|f(x)| \leq |x|$ .

On sait de plus que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on a :  $f'(x) = \frac{ax+b}{(x^2+3)^2}$

A partir de données extraites de la figure, déterminer  $a$  et  $b$ .

Par un calcul de primitives, déterminer la fonction  $f$ .

**Le saviez-vous ?**

Bien que non encore mathématisées, les notions de vitesse et accélération apparaissent dans les travaux de Galilée : « Nous disons qu'un mouvement est également ou uniformément accéléré quand, partant du repos, il acquiert en des temps égaux des moments égaux de vitesse » (Discours concernant deux sciences nouvelles ; 1638).

**Exercice 22 :**

a) Dans la figure ci-contre on a représenté une fonction  $f$  dans un repère orthonormé. Donner la réponse exacte.

☐  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\infty$

☐  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\infty$

☐  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = +\infty$

☐  $f$  réalise une bijection de  $[0, 4]$  sur  $[-2, 4]$

☐  $f$  est dérivable en 2.

☐ l'équation  $f(x) = 1$  admet deux solutions dans l'intervalle  $[0, 4]$

b) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^{2012} - x$

On désigne par  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé alors :

☐  $C_f$  admet un point d'inflexion

☐  $C_f$  admet deux points d'inflexion

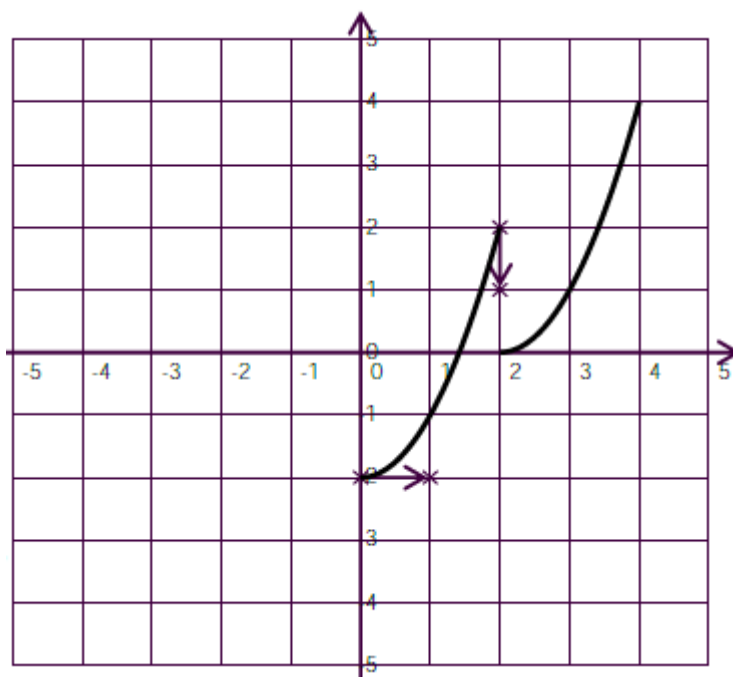
☐  $C_f$  n'admet pas de point d'inflexion

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  tels que  $|f'(t)| \leq 1$  pour tout réel  $t$  et  $f(0) = 0$

☐  $|f(t)| \leq t$

☐  $|f(t)| \leq |t|$

☐  $f(t) \leq t$



**Le saviez-vous ?**

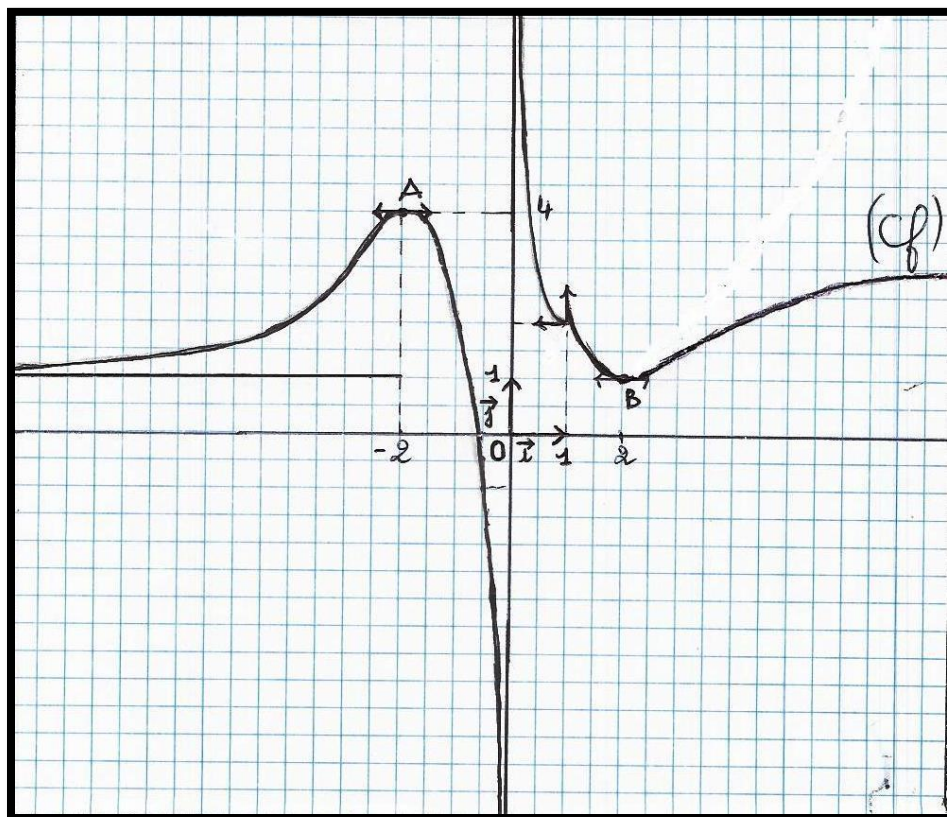
**Newton** et **Leibniz** sont les deux fondateurs du calcul différentiel et intégral (calcul infinitésimal).

Ce sont eux qui ont mis en évidence la réciprocity de deux problèmes :

- celui des tangentes, c'est-à-dire la dérivation ;
- celui des aires c'est-à-dire l'intégration.

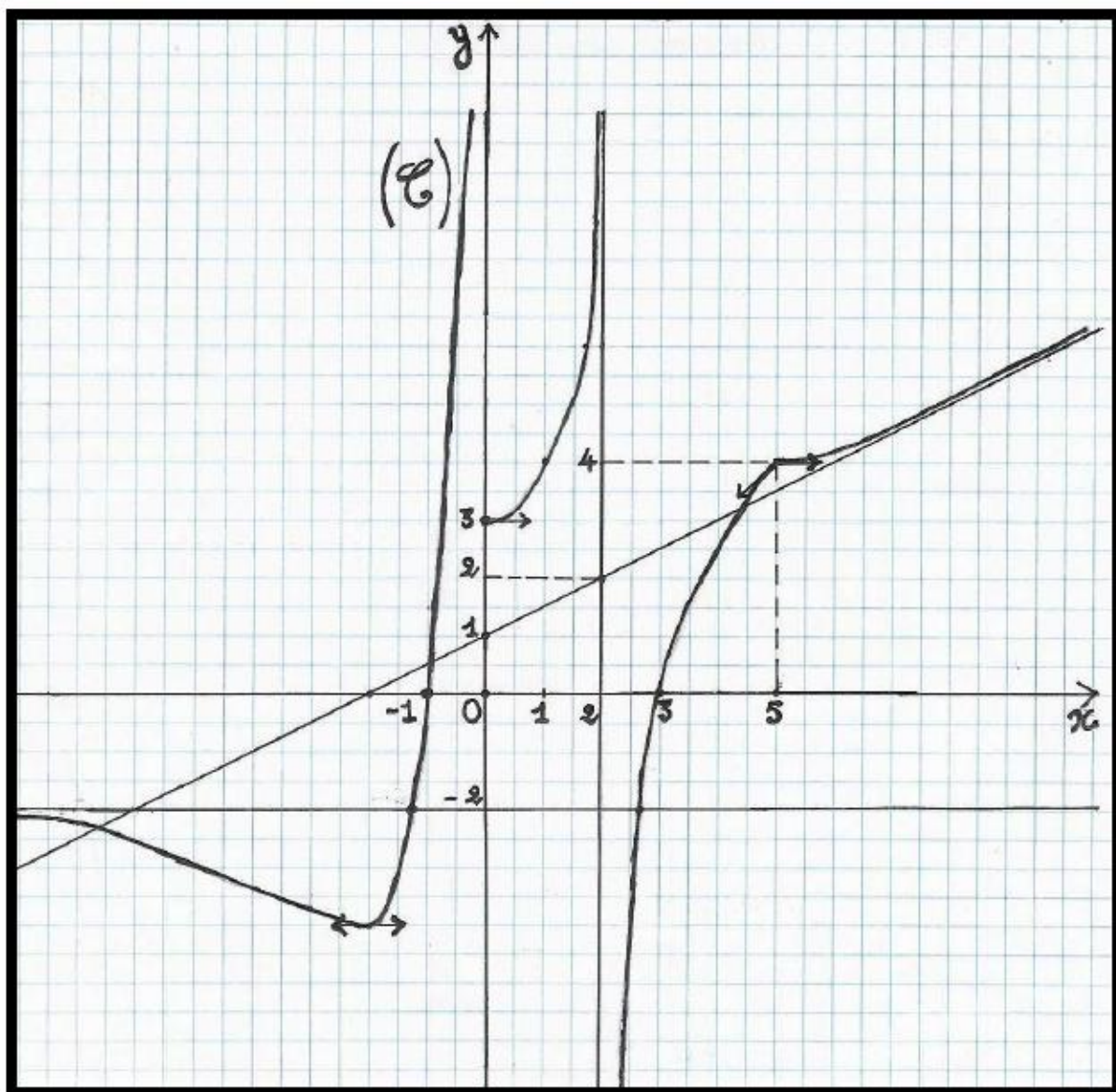
**Exercice 23 :**

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction  $f$  de la variable  $x$  dont on ne connaît pas l'expression.



1. On donne  $f(-1)=1$  et  $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ 
  - a) Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
  - b) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition.
2.  $f$  est-elle continue en 1 ? Justifier.
3.
  - a) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de  $f$ .
  - b) Etudier les variations de  $f$  puis tracer son tableau de variation.
  - c) Préciser les extrema de  $f$  ainsi que leur nature.
4.
  - a) Montrer que la courbe  $(C_f)$  coupe l'axe des abscisses en seul et unique point  $A$  d'abscisse  $\alpha$  et que  $\alpha \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$ .
  - b) En déduire les positions relatives entre  $(C_f)$  et l'axe des abscisses.
5. Donner la limite lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  de  $\frac{f(x)}{x}$ , puis conclure.

**Exercice 24 :**



La courbe (C) ci-dessus est celle d'une fonction  $f$  dans un repère orthonormal.

$f$  est définie en 0 et on a  $f(0) = 0$

1°) Préciser l'ensemble de définition de  $f$ .

2°) Donner les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f$

3°) La courbe admet-elle une asymptote oblique? Si oui, donner son équation.

4°) Préciser les équations des autres asymptotes.

5°) Le fonction est-elle dérivable en 5 ? Justifier la réponse.

6°) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

7°) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \ln(f(x))$ .

**Exercice 25 :**

Le tableau de variations ci-dessous est celui d'une fonction  $f$

| X       | $-\infty$ | -3 | -1        | 1  | $+\infty$ |
|---------|-----------|----|-----------|----|-----------|
| $f'(x)$ |           | 0  |           | 0  |           |
| f       | $-\infty$ | -6 | $+\infty$ | -3 | $+\infty$ |

1/ Préciser l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .

2/ Déterminer les limites aux bornes de  $D_f$ .

3/ Combien de fois la courbe (C) de  $f$  coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

4/ La courbe coupe-t-elle l'axe des ordonnées? Justifier la réponse.

5/ On suppose que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

a) En utilisant des données du tableau démontrer que :  $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} + \frac{2}{x+1}$

b) Montrer que le point  $I(-1; -4)$  est centre de symétrie de (C).

**Exercice 26 :**

Le tableau de variations ci-dessous est celui d'une fonction  $f$  continue sur son ensemble de définition avec  $f'_g(1) = 0$  et  $f'_d(1) = -1$

| X       | $-\infty$ | -3 | -1        | 1 | 3 | $+\infty$ |
|---------|-----------|----|-----------|---|---|-----------|
| $f'(x)$ | -         | 0  | +         | + | 0 | +         |
| f       | -1        | -3 | $+\infty$ | 4 | 2 | $+\infty$ |

La courbe (C) de  $f$  coupe l'axe des abscisses en  $A(-2;0)$  et  $B\left(-\frac{1}{2};0\right)$  l'axe des ordonnées au point  $C(0;2)$

La droite (D) d'équation  $y = x - 3$  est asymptote oblique en  $+\infty$  et est en dessous de (C) sur  $[0, +\infty[$

1/ a) Donner l'ensemble de définition de  $f$ .

- b) Donner l'ensemble de dérivabilité de  $f$ .  
 2/ Donner en justifiant toutes les asymptotes de la courbe.  
 3/ Donner l'équation de chacune des demi tangentes à la courbe au point d'abscisse 1.  
 4/ Tracer (D) et donner une allure générale de la courbe dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique : 1cm). On mettra en évidence toutes les informations contenues dans le tableau de variations.  
 5) a) La restriction  $g$  de  $f$  à l'intervalle  $[3, +\infty[$  est-elle bijective ? Justifier la réponse.  
 b)  $g^{-1}$  est-elle dérivable en 2 ? Justifier la réponse ?  
 6) En utilisant la représentation graphique, déterminer l'ensemble des valeurs de  $m$  pour lesquelles l'équation  $f(x) = m$  admet exactement quatre solutions distinctes réelles.

### Exercice 27 :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \cos^2 x - \cos x$ .

On note  $(C)$  sa courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- Montrer que  $f$  est périodique de période  $2\pi$ .
- Etudier la parité de  $f$ . En déduire le choix de l'intervalle  $[0; \pi]$  comme ensemble d'étude de  $f$ .
- Montrer que  $f'(x) = \sin x(-2\cos x + 1)$ .
- Etudier le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $[0; \pi]$ .
- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0; \pi]$ .
- Tracer la courbe  $(C)$ .

### Exercice 28 :

Soit la fonction  $f$  définie par : 
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x + 2}, & \text{si } x < -1 \\ \frac{x^2 - 3}{x}, & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

- Déterminer  $D_f$
- Etudier la continuité de  $f$  en  $-1$  et en  $2$ .
- Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $-1$  et en  $2$ .

### Exercice 29 :

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

- Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à la courbe  $(C)$  de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$
- Calculer  $f'(x)$ , en déduire les variations de  $f$ .
- Dresser le tableau de variation de  $f$ .

**Exercice 30 :**

Soit  $f(x) = x^3 - 3x - 1$ .

1. Etudier les variations de  $f$ .
2. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet trois solutions (on pourra utiliser les intervalles  $[-2; -1]$ ,  $[-1; 1]$  et  $[1; 2]$ ).

**Exercice 31 :**

On se propose de résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $x^3 + 4x + 3 < 0$ .

Soit la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = x^3 + 4x + 3$ .

1. Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in [-1; 0]$ .
3. Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.
4. Donner la solution de l'inéquation.

**Exercice 32 :**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{\cos(2x)}}$ .

1. Vérifier que  $f$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$ .
2. Démontrer que pour tout nombre réel  $x$  de cet intervalle, on a :  $f''(x) + f(x) = 3f^5(x)$ .

**Exercice 33 :**

Soit  $f$  la fonction  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$  vers  $[1; +\infty[$  définie par :  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

1. Démontrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ .
2. Déterminer l'ensemble sur lequel  $f^{-1}$  est dérivable et démontrer que sa dérivée est la fonction :  $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ .

**Exercice 34 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \cos 4x + 2 \sin 2x$$

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative.

1. Justifier le choix de l'intervalle  $I = [0, \pi]$  comme intervalle d'étude de  $f$ .
2. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4 \cos 2x (1 - 2 \sin 2x)$

3. Etudier les variations de  $f$  sur  $I$ . On dressera le tableau de variation sur  $[0, \pi]$ .
4. Démontrer que  $(C_f)$  admet pour **axe de symétrie** la droite  $(D)$  d'équation :  $x = \frac{\pi}{4}$
5. Construire la courbe représentative de la restriction de  $f$  à  $[-\pi, \pi]$  dans un plan muni d'un repère orthogonal.

### Exercice 35 :

I)

1. Démontrez que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{1}{2 - \sin x}$  est bornée
2. Déduisez-en les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \sin x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{2 - \sin x}$$

II)

Soit  $h$  la fonction définie par :

$$h: \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow ]-1, 1[$$

$$x \mapsto -\sin x$$

1. Démontrer que  $h$  admet une fonction réciproque  $h^{-1}$ .
2. Déterminer l'intervalle sur lequel  $h^{-1}$  est dérivable.
3. Calculer  $(h^{-1})'$ .

### Exercice 36 :

Soit  $f$  la fonction de  $]-\pi; \pi[$  vers  $[1; +\infty[$  définie par :

1. Démontrer que  $f^{-1}$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ .
2. Démontrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur son ensemble de définition et déterminer sa dérivée.

### Exercice 37 :

On considère la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{2(1-x)}$ , et on note  $(C_f)$  sa courbe

représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 2cm.

1. Déterminer  $D_f$  et les limites aux bornes  $D_f$  de  $f$ .
2. Trouver les branches infinies de  $f$  puis étudier leurs positions par rapport à  $(C_f)$ .
3. Montrer que le point  $A\left(1; \frac{5}{2}\right)$  est centre de symétrie pour  $(C_f)$ .
4. Calculer la dérivée de  $f$  en déduire les variations de  $f$ .
5. Tracer  $C_f$ .

6. Montrer que l'équation  $f(x) = -x^2$  admet une solution unique  $\alpha$  appartenant à  $[1; 2]$ , puis donner un encadrement d'amplitude 0,1 de  $\alpha$ .

**Exercice 38 :**

1. Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \begin{cases} -2x + \sqrt{1-x}, & \text{si } x < 1 \\ 2x^3 - 3x^2 - 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ 
  - a) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - b) Montrer que l'équation :  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ .
  - c) Donner une valeur approchée par excès de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.
2. Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[1; +\infty[$ .
  - a) Montrer que  $g$  admet une bijection réciproque  $g^{-1}$  dont on précisera le domaine de définition.
  - b)  $g^{-1}$  est-elle dérivable en 3 ?
  - c) Etablir le tableau de variation de  $g^{-1}$ .
  - d) Construire dans le même repère les courbes représentatives des fonctions  $g$  et  $g^{-1}$ .

**Exercice 39 :**

Soit  $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

1. Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .
2. Étudier la dérivabilité de  $f$  sur  $D_f$ .
3. Montrer que  $f$  est une bijection de  $[0, 1[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
4. Expliciter  $f^{-1}(x)$  pour  $x \in J$ .

**Exercice 40 :**

Soit  $f : x \mapsto 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1. Étudier la dérivabilité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
3. Expliciter  $f^{-1}(x)$  pour  $x \in J$ .
4. Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et calculer  $(f^{-1})'(1)$ .

**Exercice 41 :**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[1, +\infty[$  par :  $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

1. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et calculer  $f'(x)$ .

2. Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite de 1 et interpréter le résultat obtenu.
3. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
4. Montrer que  $f$  est une bijection de  $[1, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
5. Montrer que pour tout  $x$  de  $J$  :  $f^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{2x}$
6. On désigne par  $\zeta$  et  $\zeta'$  les courbes respectives de  $f$  et  $f^{-1}$  dans un même repère orthonormé. Montrer que la droite  $D : y = 2x$  est asymptote oblique à  $\zeta$
7. Tracer  $\zeta$  et  $\zeta'$ .
8. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  par  $g(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ 
  - a) Montrer que pour tout  $x$  de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $g(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$
  - b) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  sur un intervalle  $K$  que l'on précisera.
  - c) Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $K$  et pour tout  $x$  de  $K$  :  $(g^{-1})^{-1}(x) = \frac{2}{1+x^2}$

#### Exercice 42 :

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$  et  $C_f$  sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Ecrire  $f$  sans les symboles de la valeur absolue.
3. Etudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
4. Etudier les branches infinies.
5. Etudier la continuité de  $f$  en 0 et 1.
6. Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0 et 1. En déduire une interprétation géométrique pour  $C_f$
7. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de  $f$  et calculer  $f'(x)$ .
8. Etudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variation.

#### Exercice 43 :

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x^2-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

**(Unité graphique 4 cm)**

1. Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de la fonction  $f$ 
  - a) Etudier les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$
  - b) Préciser la nature de chaque branche infinie éventuelle.

- c) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $0$ . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
  - d) Etudier les variations de  $f$  puis dresser le tableau de variation.
  - e) Tracer soigneusement  $(C)$ .
  2. On appelle  $h$  la restriction de  $f$  sur  $I = ]-\infty; 0]$ 
    - a) Montrer que  $h$  est une bijection de  $I$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera.
- On note  $h^{-1}$  la bijection réciproque de  $h$ .
- b) Montrer que  $h^{-1}$  est dérivable en  $0$  et  $(h^{-1})'(0) = h'(0)$ .
  - c) Déterminer  $(h^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right)$
  - d) Expliciter  $h^{-1}(x)$
  - e) Tracer  $C_{h^{-1}}$  de  $h^{-1}$  dans le repère précédent.

#### Exercice 44 :

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 - \frac{2x}{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 1 \\ x\sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de la fonction  $f$
  - 2) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $1$ , puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.
  - 3) Etudier les variations de  $f$  puis dresser le tableau de variation.
  - 4) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation :  $y = -x + 2$  est asymptote oblique à la courbe  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$ .
  - 5) Etudier la position relative de  $(C_f)$  par rapport à  $(D)$  sur  $]-\infty; 1]$ .
  - 6) Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $I = ]-\infty; 1]$  et  $(C_g)$  sa courbe représentative.
    - a) Montrer que  $(C_g)$  coupe la droite  $(\Delta)$  d'équation :  $y = x$ , au point  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ g(x_0) \end{pmatrix}$  avec  $x_0 \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right\}$ .
    - b) Montrer que  $g$  est une bijection de  $I$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera.
- On note  $g^{-1}$  sa bijection réciproque.
- c) Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable en  $2$ .
  - d) Calculer  $(g^{-1})'(2)$
  - e) En déduire une équation de la tangente de la fonction réciproque.
  - 7) Tracer  $(D)$ ,  $(\Delta)$ ,  $C_f$  et  $C_{g^{-1}}$  de  $g^{-1}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Exercice 45 :**

Soit la fonction  $f$  définie par : 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{x^2 - x - 2} & , x < 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{|x-1|}} & , x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) Justifier que  $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ .
- 2) Ecrire  $f$  sans le symbole de la valeur absolue.
- 3) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0. (interpréter le résultat).
- 4) Calculer  $f'(x)$  dans les intervalles où  $f$  est dérivable.
- 5) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 6) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = [2; +\infty[$ .
  - a) Montrer que  $g$  est une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à préciser.
  - b)  $g^{-1}$  est-elle dérivable en  $-\frac{5}{2}$  ? si oui calculer  $(g^{-1})'\left(-\frac{5}{2}\right)$ .
  - c) Expliciter  $g^{-1}$ .
- 7) Tracer la courbe de  $f$  et de  $g^{-1}$  dans le même repère.

**Exercice 46 :**

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

1. Détermine  $D_f$  et les limites aux bornes de  $D_f$ .
2. Démontrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\beta$  dans  $[1; 2]$ , en déduire un encadrement de  $\beta$  à  $10^{-1}$  près
3. a) Soit  $g^{-1}$  la restriction de  $f$  dans l'intervalle  $[0; +\infty[$ . Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $[0; +\infty[$  vers un intervalle  $J$  que l'on déterminera.
- b) Soit  $g^{-1}$  la réciproque de  $g$  ;  $g^{-1}$  est-elle dérivable en 2 ?
4. Exprimer  $g^{-1}(x)$  en fonction de  $x$ .

**Exercice 47 :**

On considère la fonction  $f$  définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \sqrt{|1 - x^2|}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et  $(C_f)$  sa courbe représentative.

1. Déterminer son domaine de définition  $D_f$ .
2. Étudier la parité de  $f$  et en déduire une interprétation graphique pour  $(C_f)$ .
3. Étudier la continuité de  $f$  en 0.
4. Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0 et en 1.
5. Calculer les limites de  $f$  aux bornes du domaine d'étude.

6. Calculer la dérivée de  $f$  dans chaque intervalle où  $f$  est dérivable puis établir le tableau de variation de  $f$  dans son domaine d'étude
7. Montrer que le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion de la courbe  $(C_f)$ .
8. Construire la courbe  $(C_f)$ , dans  $D_f$ .
9. a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.  
 b) Soit  $f^{-1}$  la réciproque de  $f_{/[1; +\infty[}$  construire  $(C_{f^{-1}})$ .  
 c)  $f^{-1}$  est-elle dérivable en 1 ?  
 d) Exprimer  $f^{-1}(x)$  en fonction de  $x$ .

**Exercice 48 :**

1. On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$ .  
 a) Étudier les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 b) Calculer  $g(1)$  puis dresser le tableau de variation de  $g$ .
2. Soit  $f$  la fonction de courbe représentative  $(C_f)$  définie par :  

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 4}{x + 1}$$
 a) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de  $f$ .  
 b) Étudier la nature des branches infinies de  $(C_f)$ .  
 c) Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$  ; en déduire les variations de  $f$
3. Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = ]-\infty; -1[$   
 a) Montrer que  $h$  est une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à déterminer.  
 b)  $h^{-1}$  est-elle dérivable en 4 ?
4. Construire  $(C_h)$  et  $(C_{h^{-1}})$  dans un même R.O.N  $(O, \vec{i}; \vec{j})$ .

**Exercice 49 :**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$  et  $C_f$  sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Écrire  $f$  sans les symboles de la valeur absolue.
3. Étudier les limites aux bornes de  $D_f$ .
4. Étudier les branches infinies.
5. Étudier la continuité de  $f$  en 0 et 1.
6. Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0 et 1. En déduire une interprétation géométrique pour  $C_f$ .
7. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de  $f$  et calculer  $f'(x)$ .
8. Étudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variation.
9. Tracer la courbe  $C_f$  de  $f$ .

**Exercice 50 :**

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \cos(3x)\cos^3 x$$

Soit  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal.

- 1) a) Restreindre le domaine d'étude de  $f$ .
- b) Étudier les variations de  $f$ .
- 2) a) Tracer  $C$ .
- b) Déterminer les abscisses des points de  $C$  où la tangente à  $C$  est parallèle à l'axe ( $ox$ )

**Exercice 51 :**

On considère la fonction  $f$  définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = (x-1)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}, \text{ si } x > 1 \\ f(x) = \frac{-4x^3 + 4x - 1}{2x^2}, \text{ si } x \leq 1 \end{cases}$$
 et  $(C_f)$  sa courbe

représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a) Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .
- b) Calculer les limites aux bornes de  $D_f$
- 2) Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 1.
- 3) a) Déterminer les asymptotes obliques à la courbe  $C_f$
- b) Étudier la position de la courbe  $C_f$  par rapport à ses asymptotes.
- 4) On pose  $U(x) = -2x^3 - 2x + 1$ .
- a) Montrer que l'équation  $U(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta \in ]0;1[$ ,  
donner un encadrement de  $\beta$  à  $10^{-1}$  près.
- b) En déduire le signe de  $U(x)$  sur  $\mathbb{R}$
- 5) a) Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  dans les intervalles où  $f$  est dérivable.
- b) Montrer que  $f'(x) = \frac{U(x)}{x^3}$  si  $x < 1$  et  $x \neq 0$ .
- c) Établir le tableau de variation de  $f$ .
- d) Montrer que  $f(\beta) = \frac{8\beta - 3}{2\beta^2}$ .
- 6) On note  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = ]-\infty; 0[$ .
- a) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $I$  vers un intervalle  $J$  à préciser.
- b) On pose  $V(x) = -4x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ .
- b-1) Calculer  $V\left(\frac{1}{2}\right)$ .
- b-2) Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable en 1 puis déterminer  $(g^{-1})'(1)$ .
- c) Dresser le tableau de variation de  $g^{-1}$ .

7) Tracer  $C_f$  et  $C_{g^{-1}}$  dans le même repère.

## PRIMITIVES

### ✎ Exercice 1 :

Déterminer une primitive  $F$  de la fonction  $f$

$$a) f(x) = \frac{6x+3}{(x^2+x+2)^2}$$

$$b) f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}}$$

$$c) f(x) = x^3 + 2x - 5$$

$$d) f(x) = 10x^4 + 6x^3 - 1$$

$$e) f(x) = (2x)(x^2+1)^3$$

$$f) f(x) = \frac{-3}{(2x+5)^2}$$

$$g) f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 4$$

$$h) f(x) = x \sin(x^2 - 4)$$

$$i) f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-5}}$$

$$j) f(x) = (4x-6)(x^2-3x+1)$$

$$k) f(x) = \frac{1}{x^2} + \sin x$$

$$l) f(x) = (3x^2+5)(x^3+5x-2)^2$$

$$m) f(x) = \sin x \cos^2 x$$

$$n) f(x) = (3x-1)^4$$

$$o) f(x) = 4x - \frac{3}{x^2}$$

$$p) f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$$

$$q) f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x}$$

$$r) f(x) = \tan x + (\tan x)^3$$

### ✎ Exercice 2 :

Donner la primitive  $F$  de  $f$  sur un intervalle  $I$  telle que  $F(x_0) = y_0$ .

$$1^\circ/ f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{et } F(1) = 0. \quad I = ]0, +\infty[$$

$$2^\circ/ f(x) = 2 \cos(2x)$$

$$\text{et } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad I = \mathbb{R}$$

$$3^\circ/ f(x) = \frac{3x^2+2x}{(x^3+x^2+1)^2}$$

$$\text{et } F(0) = 1. \quad I = ]0, +\infty[$$

$$4^\circ/ f(x) = \frac{6x-1}{(3x^2-x)^2}$$

$$\text{et } F(2) = 0. \quad I = ]1, +\infty[$$

$$5^\circ/ f(x) = (3x^2-2x)(x^3-x^2+1)$$

$$\text{et } F(1) = 2. \quad I = \mathbb{R}$$

**Exercice 3 :**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]2, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2x^3 - 11x^2 + 20x - 10}{(x-2)^2}$ .

1°/ Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tel que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$ .

2°/ En déduire une primitive de  $f$  sur  $]2, +\infty[$ .

**Exercice 4 :**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  par  $f(x) = \frac{2x+1}{(x-2)^3}$ .

- Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tel que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$   $f(x) = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x-2)^3}$ .
- En déduire une primitive de  $f$  sur  $]-\infty, 2[$ .

**Exercice 5 :**

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x+x^2}$ .

On désigne par  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Etudier les variations de  $f$  et construire sa courbe  $C_f$ . (Préciser sa tangente en 0).
  - En déduire que pour tout réel  $t$  de  $[0, +\infty[$ ,  $\frac{2}{3} \leq f(t) \leq 1$ .
- Soit  $F$  la primitive de  $f$  sur  $[0, +\infty[$  qui s'annule en 0.
  - Montrer que pour tout réel  $x$  de  $[0, +\infty[$ , on a  $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$ .
  - En déduire la limite de  $F$  en  $+\infty$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $F$ .

**Exercice 6 :**

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

- Montrer que  $f$  admet au moins une primitive sur  $[-1, 1]$ .
- Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[-1, 1]$  qui s'annule en 0. Calculer la dérivée de la fonction  $x \mapsto F(x) + F(-x)$ . En déduire la parité de  $F$ .
- Soit  $G$  la fonction définie sur  $[0, \pi]$  par  $G(x) = F(\cos x)$ .

On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Montrer que le point  $I\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  est un centre de symétrie de  $(C)$ .
- Montrer que  $G$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  puis calculer  $G'(x)$ .

En déduire que pour tout  $x$  de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $G(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{\pi}{4}$

4. Calculer  $F(1), F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , et  $F\left(\frac{1}{2}\right)$

**Exercice 7 :**

On pose  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  et on désigne par  $F$  la primitive de  $f$  sur  $[0, +\infty[$  qui s'annule en 0.

1°/ Montrer que  $F$  est une fonction impaire.

2°/ Prouver que  $F(1) \leq 1$ . (Utiliser le théorème des inégalités des accroissements finis)

2°/ Soit  $G$  la fonction définie par  $G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$ .

a) Montrer que  $G$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  puis calculer  $G'(x)$ .

b) En déduire que  $G$  est constante sur chacun des intervalles  $] -\infty, -2[$  et  $[0, +\infty[$ .

c) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 2F(1)$ .

2°/ On pose  $H(x) = F(\tan x)$ , pour tout  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} H(x)$ .

b) Calculer  $H'(x)$  et en déduire que  $H(x) = x$ .

c) Déterminer  $F(1)$  et en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

3°/ Construire la courbe  $C$  dans le repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Exercice 8 :**

1) Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$

a)  $f(x) = 5x(5x^2 - 7)^4$                       b)  $f(x) = \frac{2x-3}{(2x^2-6x+11)^3}$

c)  $f(x) = \cos^3 x \sin^2 x$                       d)  $f(x) = \frac{x(2x^2+1)}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$

2) On donne  $g(x) = \cos(3x) - 3\sin(x)$ . Déterminer la primitive de  $g$  qui s'annule pour

$x = \frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 9 :**

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{(x-1)^2}$

1. a) Déterminer deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que :  $f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}$

b) En déduire les primitives de  $f$  sur  $]1; +\infty[$

2. a) Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  qui s'annule en 2.
- b) Déterminer la primitive de  $f$  dont la courbe représentative admet la droite  $(\Delta): y = 3x + 1$  pour asymptote au voisinage de  $+\infty$ .

**Exercice 10 :**

Soit  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{(x+2)^2}$

- a) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que pour  $x \neq -2$  ; on a  $f(x) = a + \frac{b}{(x+2)^2}$
- b) Justifier que  $f$  admet une primitive sur  $] -1; +\infty[$
- c) Déterminer toutes les primitives de  $f$ .
- d) Calculer la primitive  $F$  de  $f$  dont la courbe représentative passe par le point  $A(-1; 3)$

**Exercice 11 :**

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{1 - \sin x}$

- 1) Montrer que  $f(x) = \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$
- 2) Déterminer les primitives de  $f$  sur  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ .

**Exercice 12 :**

- 1) En utilisant les formules de duplication démontrez que :

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}.$$

**Le Saviez – Vous ?**

Au tout début du 17<sup>e</sup> siècle, l'écossais **John NAPIER**, ou **NEPER** invente, à partir d'un raisonnement sur les mouvements, les logarithmes comme correspondance entre suite géométrique et suites arithmétiques.

A la fin du 17<sup>e</sup> siècle, une démonstration géométrique fondée sur les calculs d'aires est proposée par **Grégoire de SAINT-VINCENT** ;

- 2) Déduisez-en la primitive  $F$  de la fonction  $x \mapsto \cos^4 x$ , telle que  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

## FONCTIONS LOGARITHME NEPERIEN

### ✎ Exercice 1 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- 1)  $2 \ln(x - 3) = \ln 4$
- 2)  $\ln(2x + 8) - \ln \ln(3x + 2) = \ln \ln(x + 5)$
- 3)  $\ln|x + 1| + \ln \ln|x + 5| = \ln \ln 15$
- 4)  $\ln|2x - 5| - \ln \ln|3x + 2| = \ln \ln|x + 1|$
- 5)  $3 \ln^2 x - 5 \ln x + 2 = 0$
- 6)  $2 \ln^2 x + (1 - 2 \ln 2) \ln x - 2 \ln 2 = 0$
- 7)  $\ln^3 x + 2 \ln^2 x + \ln x + 2 = 0$
- 8)  $\ln(-x - 2) = \ln \ln \frac{-x - 11}{x + 3}$

### ✎ Exercice 2 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

- 1)  $\ln x + \ln(x + 2) \leq \ln(x^2 - 2x + 2)$
- 2)  $\ln(x^2 + 2x + 2) \geq \ln(3 - x) + \ln(x + 1)$
- 3)  $\ln(35 - 8x) \geq 3 \ln 2 + \ln(x^2)$
- 4)  $\ln \ln(2 - x) + \ln \ln(4 - x) > \ln \ln(3x + 2)$
- 5)  $\frac{\ln \ln x - 2}{\ln \ln x + 1} \geq 0$
- 6)  $\frac{1 + \ln \ln x}{1 - \ln \ln x} > \frac{1 - \ln \ln x}{1 + \ln \ln x}$
- 7)  $\ln^2 x - 2 \ln x - 3 \geq 0$
- 8)  $(1 - \ln \ln x)(1 + \ln \ln x) \geq 0$

### ✎ Exercice 3 :

Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x - y = \frac{3}{2} \\ \ln x + \ln y = 0 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 5 \ln x + 2 \ln y = 26 \\ 2 \ln x - 3 \ln y = -1 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} \ln xy = 4 \\ (\ln x)(\ln y) = -12 \end{cases} \end{array}$$

**Exercice 4 :**

Déterminer les limites de la fonction  $f$  aux bornes de l'intervalle de définition  $I$

|                                          |                                  |                                        |                          |
|------------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------------|--------------------------|
| $f(x) = 3 - \ln x$                       | $I = ] 0 ; + \infty [$           | $f(x) = \ln[(x-1)(2x+3)]$              | $I = ] 1 ; + \infty [$   |
| $f(x) = \ln(1+x)$                        | $I = ] - 1 ; + \infty [$         | $f(x) = \ln(x^2 + 3x)$                 | $I = ] 0 ; + \infty [$   |
| $f(x) = (1-x)\ln x$                      | $I = ] 0 ; + \infty [$           | $f(x) = (x-4)\ln(3-x)$                 | $I = ] - \infty ; 3 [$   |
| $f(x) = \ln(2x-1)$                       | $I = ] \frac{1}{2} ; + \infty [$ | $f(x) = \frac{1}{\ln x}$               | $I = ] 1 ; + \infty [$   |
| $f(x) = \ln\left(\frac{3}{x^2+1}\right)$ | $I = \mathbb{R}$                 | $f(x) = \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$ | $I = ] - \infty ; - 3 [$ |
| $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$               | $I = ] 0 ; + \infty [$           | $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$             | $I = ] 0 ; + \infty [$   |
| $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$   | $I = ] 0 ; + \infty [$           | $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$             | $I = ] 0 ; + \infty [$   |
| $f(x) = \frac{2x}{\ln x}$                | $I = ] 1 ; + \infty [$           | $f(x) = \frac{2+x}{\ln x}$             | $I = ] 0 ; 1 [$          |

**Exercice 5 :**

Calculer les dérivées des fonctions définies précédemment.

**Exercice 6 :**

Donner une primitive  $F$  de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I$

|                          |                        |                               |                                               |
|--------------------------|------------------------|-------------------------------|-----------------------------------------------|
| $f(x) = \frac{2}{x}$     | $I = ] 0 ; + \infty [$ | $f(x) = \frac{2}{2x+3}$       | $I = \left] - \frac{3}{2} ; + \infty \right[$ |
| $f(x) = \frac{3}{x-2}$   | $I = ] 2 ; + \infty [$ | $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ | $I = \mathbb{R}$                              |
| $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ | $I = \mathbb{R}$       | $f(x) = \frac{6}{3x+1}$       | $I = \left] - \frac{1}{3} ; + \infty \right[$ |

Calculer la primitive  $F$  de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I$  et vérifiant la condition donnée.

|                               |                                     |                                        |                                       |
|-------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------------|---------------------------------------|
| $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+3}$ | $I = \mathbb{R} \quad F(0) = \ln 3$ | $f(x) = \frac{2}{3-x}$                 | $I = ] - \infty ; 3 [ \quad F(2) = 1$ |
| $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3}$ | $I = \mathbb{R} \quad F(0) = 0$     | $f(x) = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{5-x}$ | $I = ] 2 ; 5 [ \quad F(3) = 0$        |

**Exercice 7 :**

On donne des fonctions  $f$  définies sur un intervalle  $I$ .

Pour chaque fonction indiquer une formule à utiliser pour calculer une primitive, puis donner une primitive  $F$ .

|                           |                  |                                            |                          |
|---------------------------|------------------|--------------------------------------------|--------------------------|
| $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ | $I = \mathbb{R}$ | $f(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{2}{(x+3)^2}$ | $I = ] - 3 ; + \infty [$ |
|---------------------------|------------------|--------------------------------------------|--------------------------|

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2(\ln x) \times \left(\frac{1}{x}\right) \quad I = ]0 ; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{x \ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1) \left[ \ln(x^2 + 1) \right]^2} \quad I = \mathbb{R}$$

**Exercice 8 :**

Soit  $g$  la fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $I = ]-4 ; 2[$  telle que

$$g(x) = (x+4)\ln(x+4) + (2-x)\ln(2-x).$$

On note  $g'$  la dérivée de  $g$ , calculer  $g'(x)$ . En déduire la primitive  $F$  de la fonction  $f$  définie sur

$$I \text{ par } f(x) = \ln\left(\frac{x+4}{2-x}\right) \text{ et telle que } F(1) = \ln(125).$$

**Exercice 9 :**

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant un intervalle de validité des calculs.

a)  $f(x) = \frac{1}{x-3}$

b)  $g(x) = \frac{1}{1-5x}$

c)  $h(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

d)  $i(x) = \frac{2x}{3x^2+5x}$

e)  $j(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$

f)  $k(x) = \frac{\ln x}{x}$

g)  $l(x) = \frac{1}{3x+1} + \frac{6}{x-2}$

h)  $m(x) = \frac{0,5x^2 - 3x + 4}{x}$

**Exercice 10 :**

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$ .

Déterminer la primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui s'annule pour  $x = 1$ .

2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$ .

Déterminer la primitive de  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$  qui s'annule pour  $x = 3$ .

**Exercice 11 :**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \ln(x+1) - \ln(3-x)$

- 1) Etudier  $f$  et tracer sa courbe représentative  $(C)$ .
- 2) Démontrer que  $(C)$  coupe l'axe des abscisses en un seul point  $A$  dont on précisera les coordonnées.
- 3) Démontrer que  $A$  est le centre de symétrie de  $(C)$ .
- 4) Donner l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  en  $A$ .
- 5) Démontrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une solution unique dont on précisera un encadrement à  $10^{-1}$  près.
- 6) Résoudre graphiquement l'inéquation :  $x - 1 \leq f(x)$ .

**Exercice 12 :**

1. Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = (x - 1) \ln|x - 1| - x \ln x$   
Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  et étudier les variations de  $f$ .
2. Soit  $g$  la fonction définie par : 
$$\begin{cases} g(0) = 0, g(1) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = f(x) \end{cases}$$
  - a) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $g$  en 0 puis en 1.
  - b) Tracer  $(C_g)$  dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

**Exercice 13 :**

- Soit la fonction  $f(x) = \ln|x| + x + 1$ .
- a) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .
  - b) Etudier les variations de  $f$ . Dresser le tableau de variations de  $f$ .
  - c) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  et vérifier que  $0,27 < \alpha < 0,28$ .
  - d) Déterminer le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

**Exercice 14 :**

Soit  $f$  la fonction définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 - (\ln x)^2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

1. a) Démontrer que  $f$  est continue et dérivable en 1.  
b) Calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition et préciser les branches infinies de la courbe représentative  $(C)$  de  $f$ .  
c) Etudier les variations de  $f$ .  
d) Démontrer que le point d'abscisse  $e$  est un point d'inflexion de  $(C)$ .  
e) Tracer  $(C)$ .
2. a) Démontrer que  $h$  réalise une bijection de  $]1; +\infty[$  vers un intervalle que l'on précisera.  
b) En déduire que  $h$  admet une fonction réciproque  $h^{-1}$  dont on précisera le sens de variation
3. Tracer la courbe de  $h^{-1}$ .

**Exercice 15 :**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I = ]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x + \frac{1 - \ln x}{x}$

On nomme  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $I$  par :  $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$ .
  - a) Etudier les variations de  $g$ .
  - b) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution, notée  $\alpha$ , appartenant à l'intervalle  $[1; 2]$ . Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
  - c) Etudier le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
- 2) a) Démontrer que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .

En déduire les variations de la fonction  $f$ .

- b) Etudier les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.  
c) Tracer  $C$ .

**Exercice 16 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$ .

Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$

- 1) Étudiez les variations de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$  ainsi que ses limites en 0 et en  $+\infty$ .
- 2) Soit  $A, B, C$  et  $D$  les points suivants de  $(C)$ .

$A$  est d'abscisse  $a$  et est le point d'intersection de  $(C)$  avec l'axe des abscisses.

$B$  est d'abscisse  $b$  et est le point où la tangente à  $(C)$  passe par l'origine du repère.

$C$  est d'abscisse  $c$  et est le point où la tangente à  $(C)$  est parallèle à l'axe des abscisses.

$D$  est d'abscisse  $d$  et est le point où la dérivée seconde de  $f$  s'annule.

Montrez que  $a, b, c, d$  sont en progression géométrique.

**Exercice 17 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x \ln(x^2 + 1)$ .

On appelle  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

1. Justifiez que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$  et étudiez la parité de  $f$ .
2. Étudiez les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , puis déterminez la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
3. Résolvez l'équation :  $f(x) = x$
4. Pour  $x$  réel, on note, s'il existe,  $g(x)$  le réel tel que  $(g(x))' = x$ .  
Justifiez que  $g(x)$  est bien défini pour tout  $x$  réel.
5. Déterminez  $g(0)$  et  $g(\sqrt{e-1})$
6. Représentez  $(C)$  et la courbe représentative de  $g$  sur une même figure.

**Exercice 18 :**

**PARTIE A :**

On considère la fonction  $u$  définie par:

$u : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2x}{x^2-1}$$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de  $u$  ; Calculer  $u(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ .

2°) Etudier les variations de  $u$ .

Dresser son tableau de variations (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de  $u$  en 1).

3°) Dédurre des résultats précédents que :

a)  $\forall x \in [0 ; 1[, u(x) \geq 0$ .

b)  $\forall x \in ]1 ; +\infty[, u(x) < 0$ .

**PARTIE B :**

Soit  $g$  la fonction définie par  $g : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 1.$$

1°) Déterminer  $Dg$  (le domaine de définition de  $g$ ) ; puis étudier la limite de  $g$  en 1 .

2°) a) Vérifier que :  $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

b) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)}{2} \ln \left( 1 + \frac{2}{x-1} \right) = 1$

b) En déduire que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ . Interpréter géométriquement ce résultat.

c) Dresser le tableau de variations de  $g$  .

d) Montrer qu'il existe un réel  $\alpha$  unique appartenant à  $]0 ; 1[$  tel que  $g(\alpha) = 0$  .

Donner un encadrement d'ordre 1 de  $\alpha$ .

3°) Tracer la courbe  $(C_g)$  de  $g$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité = 2 cm).

**Exercice 19 :**

A) Etude d'une fonction auxiliaire.

$g$  est la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(1 + x^2)$

1) Démontrer que sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ , l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et donner pour  $\alpha$  un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$ .

2) Préciser le signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

B) Etude d'une fonction

$f$  est la fonction définie sur  $I = [0; +\infty[$  par :  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) a) Quelle est la limite de  $\frac{f(x) - f(0)}{x}$  quand  $x$  tend vers 0 ?

b) En déduire que  $f$  est dérivable en  $x = 0$  et trouver une équation de la tangente  $T$  en  $x = 0$  à la courbe  $(C)$  représentant  $f$ .

2) a) Vérifier que pour tout réel  $x > 0$ ,  $f(x) = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)$

b) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

3) a) Démontrer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire les variations de  $f$ .

c) Construire  $T$  puis  $(C)$ .

## FONCTION EXPONENTIELLE

### Exercice 1 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$a) e^{-x}(e^{2x} - 4) = 0 \quad b) (e^x - 2)(e^{-x} + 1) = 0 \quad c) e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$$

$$d) 2e^x - 2e^{-x} - 3 = 0 \quad e) e^x - e^{-x} = \frac{8}{3} \quad f) e^{2x+1} + 3e^{x+1} = 4e$$

$$g) \frac{e^x + 1}{e^x - 4} = \frac{1}{2} \quad h) \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 \quad i) \frac{e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{-x}}$$

### Exercice 2 :

Résoudre les systèmes suivants :

$$a). \begin{cases} 4e^x - 3e^y = 9 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases} \quad b). \begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^{x+y} = 30 \end{cases} \quad c). \begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

### Exercice 3 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

$$a). e^{-x} \geq 2 \quad b). e^{x^2-1} < 1 \quad c). (e^x - 1)(e^{-x} - 4) < 0$$

$$d). (e^{2x} - 1)(2e^x - 1) \geq 0 \quad e). 2^{2x} - 5e^x + 2 > 0 \quad f). 3^x > 6$$

### Exercice 4 :

Calculer les limites suivantes :

$$a). \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+x} \quad b). \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} \quad c). \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x}$$

$$d). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - e^x} \quad e). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x} \quad f). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-1}}{x}$$

$$g). \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \quad h). \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} \ln x \quad i). \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \sin x$$

### Exercice 5 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la fonction dérivée de  $f$

$$a). f(x) = e^{2x+1} \quad b). f(x) = e^{2-3x} \quad c). f(x) = (2x-1)e^x$$

$$d). f(x) = (x^2 - 2x)e^{-x} \quad e). f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad f). f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$$

**g).**  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

**h).**  $f(x) = e^{-x} \ln x$

**Exercice 6 :**

Déterminer sur l'intervalle  $I$  une primitive  $F$  de  $f$

$I = \mathbb{R}, \quad a) f(x) = e^{-x} \quad b) f(x) = xe^{x^2} \quad c) f(x) = (x+1)e^{x^2+2x}$

$I = ]0; +\infty[ \quad a) f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \quad b) f\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right) \quad c) f(x) = 2^x$

**Exercice 7 :**

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que  $F$  soit une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$

a)  $f(x) = (2x+1)e^x \quad \text{et} \quad F(x) = (ax+b)e^x$

b)  $f(x) = (x+1)e^{\frac{-x}{2}} \quad \text{et} \quad F(x) = (ax+b)e^{\frac{-x}{2}}$

**Exercice 8 :**

Soit  $f$  la fonction définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = \exp\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right), \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\} \\ f(-1) = f(1) = 0 \end{cases}$$

On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative

- 1) Démontrer que  $f$  est dérivable à droite en  $-1$  et à gauche en  $1$ .
- 2) Étudier  $f$  et tracer  $(C)$

**Exercice 9 :**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{(2x-1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de la fonction  $f$  et trouver les trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout  $x$  de  $D_f$ , on ait

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{e^x - 1}$$

2°) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .

3°) a) Déterminer la fonction dérivée de  $f$ .

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$ .

c) En déduire le sens de variation de  $f$  et dresser le tableau de variation de  $f$ .

4°) On appelle  $(C)$  la représentation graphique de la fonction  $f$  dans un plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  dont l'unité est 2 cm.

Démontrer que les droites d'équations respectives  $y = 2x - 1$  et  $y = 2x - 2$  sont des asymptotes de  $(C)$  respectivement en  $+\infty$  et  $-\infty$ .

Préciser l'autre asymptote.

5°) Soit  $x$  un réel de  $D_f$ . On considère les deux points M et M' de (C) d'abscisses respectives  $x$  et  $-x$ . Déterminer les coordonnées du milieu  $\Omega$  du segment [MM']. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

6°) Tracer la courbe (C).

7°) a) Trouver les réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que, pour tout réel  $x$  de l'ensemble  $D_f$  on ait :

$$f(x) = 2x + \alpha + \frac{\beta e^x}{e^x - 1}$$

b) Soit  $k$  un réel supérieur ou égal à 2.

Déterminer l'aire  $A(k)$  en  $\text{cm}^2$  de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées  $(x; y)$  vérifient :  $\ln 2 \leq x \leq \ln k$  et  $2x - 1 \leq y \leq f(x)$ .

c) Calculer  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A(k)$ .

### ✎ Exercice 10 :

#### Partie A

On donne 
$$\begin{cases} f(x) = x(\ln x)^2, & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \ln|2e^x - e^{-x}|, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Déterminer  $D_f$ .

Ecrire  $f$  sans le symbole de la valeur absolue.

Etudier la continuité de  $f$  en 0.

Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0 puis interpréter graphiquement.

Donner la nature de la branche infinie en  $+\infty$ .

a) Montrer pour  $x < -\frac{1}{2} \ln 2$ , on a  $f(x) = -x + \ln(1 - 2e^{2x})$ .

b) En déduire que (C) admet une asymptote  $(\Delta)$  en  $-\infty$ .

c) Etudier la position de (C) par rapport à  $(\Delta)$  sur  $\left] -\infty ; -\frac{1}{2} \ln 2 \right[$ .

#### Partie B

Calculer  $f'$  dans l'intervalle où  $f$  est dérivable.

Etudier les variations de  $f$  et donner son tableau de variation.

Tracer  $(C_f)$  dans un repère orthonormé  $(0; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2cm)

a) Montrer que  $g$  restriction de  $f$  sur  $\left] -\infty ; -\frac{1}{2} \ln 2 \right[ = I$  est bijective de  $I$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera.

b) Donner l'expression de  $g^{-1}$

c) Tracer  $(C_{g^{-1}})$  dans le même repère.

**Exercice 11 :**

I. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x(1 + e^{2-x})$ .

On note  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2 cm).

1°) Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}$ .

a) Etudier les variations de  $h$  (on ne déterminera pas de limites aux bornes de  $D_h$ ).

b) En déduire le signe de  $h(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

2°) a) Etudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

b) Préciser la nature de la branche infinie de  $f$  en  $-\infty$ .

c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ , puis interpréter le résultat obtenu.

d) Préciser la position de  $(C)$  par rapport à la droite  $(\Delta) : y = x$ .

3°) a) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

b) Montrer que  $f$  admet une bijection réciproque notée  $f^{-1}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

c)  $f^{-1}$  est-elle dérivable en 4 ?

d) Etudier la position de  $(C)$  par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.

e) Construire  $(C)$  (on tracera la tangente à  $(C)$  au point d'abscisse 2).

f) Construire  $(C')$  courbe de  $f^{-1}$  dans le repère précédent.

II. Soit  $\lambda$  un réel strictement positif.  $R_\lambda$  est la région du plan délimitée par les droites d'équations respectives  $x=0$  et  $x=\lambda$  et les courbes d'équations respectives :  $y=f(x)$  et  $y=x$ . Soit  $a(\lambda)$  l'aire de  $R_\lambda$  en  $\text{cm}^2$ .

1°) Calculer  $a(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$ .

2°) Déterminer  $a = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} a(\lambda)$ . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

**Exercice 12 :**

Les parties A et B du problème ne sont pas indépendantes.

**PARTIE A :**

1. Etudier sur  $\mathbb{R}$  le signe de  $4e^{2x} - 5e^x + 1$ .

2. Soit  $\varphi$  la fonction définie par :  $\varphi(x) = \ln x - 2\sqrt{x} + 2$ .

Déterminer son domaine de définition  $D_\varphi$  et calculer ses limites aux bornes de  $D_\varphi$ .

3. Etudier ses variations et dresser son tableau de variations  
En déduire son signe

**PARTIE B :**

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{e^x}{2e^x - 1}, & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x + \sqrt{x} \ln x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

- 1) a) Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de  $f$ .
- b) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$  et étudier les branches infinies de  $(C_f)$ .
- c) Etudier la position de  $(C_f)$  par rapport à l'asymptote non parallèle aux axes dans  $]-\infty; 0]$ .
- 2) a) Etudier la continuité de  $f$  en 0.
- b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0 et interpréter graphiquement les résultats.
- 3) Déterminer la dérivée de  $f$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .
- 4) Construire dans le repère les asymptotes, la courbe  $(C_f)$  et les demi-tangentes. On remarquera que  $f(1)=0$  et  $f'(1)=0$ .
- 5) Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine délimité par  $(C_f)$ , la droite d'équation  $y=x$  et les droites d'équations  $x=-\ln 8$  et  $x=-\ln 4$ .

### Exercice 13 :

1°)a) Etudier la continuité de  $f$  en zéro. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2}, & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^2 \ln x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en zéro.  
Interpréter géométriquement les résultats obtenus.
- 2°) a) Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- b) Calculer  $f'(x)$  on précisera le domaine de dérivabilité de  $f$ .
- c) Etudier le signe de  $f'(x)$  et établir le tableau de variation de  $f$ .
- 3°) Etudier les branches infinies de la courbe de  $f$ .
- 4°) Tracer la courbe représentative de  $f$  dans le plan de repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 4cm).
- 5°)  $\alpha$  étant un réel tel que  $0 < \alpha \leq 1$ , calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire  $q(\alpha)$  de l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que :  $\begin{cases} \alpha \leq x \leq 1 \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$  à l'aide d'une intégrale par parties.
- 6°) Déterminer  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} q(\alpha)$  et interpréter le résultat obtenu.

**Exercice 14 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  d'unité  $2\text{cm}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0.

2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $] -\infty ; 0[$  par :  $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1$

En étudiant les variations de  $g$ , déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $] -\infty ; 0[$ .

3. Soit  $h$  la fonction définie par :  $h(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

a) Etudier les variations de  $h$ . (On calculera la limite en  $+\infty$  de  $h$ )

b) En déduire le signe de  $h(x)$  sur  $]0 ; +\infty[$

4. Montrer que :  $\forall x \in ]0 ; +\infty[ , f'(x) = \frac{g(x)}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$  et  $\forall x \in ]0 ; +\infty[ , f'(x) = h(x)$

5. a) Calculer la limite en  $+\infty$  de  $f$  (poser  $X = \frac{1}{x}$ ) puis interpréter géométriquement le résultat.

b) Calculer la limite en  $-\infty$  de  $f$  puis établir le tableau de variation de  $f$ .

c) En posant  $X = \frac{1}{x}$ , calculer la limite en  $-\infty$  de  $x\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)$  puis montrer que la

limite en  $-\infty$  de  $\left[f(x) - \frac{x}{2}\right]$  est égale à  $-\frac{1}{4}$  et interpréter géométriquement le résultat.

6. a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers un ensemble que l'on précisera.

b) Calculer  $f(1)$  puis dire si  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0 = \ln 2$ ; dans le cas échéant, calculer  $(f^{-1})'(\ln 2)$

7. Tracer  $C'$  de  $f^{-1}$  dans le repère précédent.

**Exercice 15 :**

**PARTIE A**

Soit la fonction  $\varphi$  définie dans  $\mathbb{R}$  par

$$\varphi(x) = e^x + x + 1.$$

1. Étudier le sens de variation de  $\varphi$  et ses limites en  $+\infty$  et  $-\infty$ .

2. Montrer que l'équation  $\varphi(x) = 0$  a une solution et une seule  $\alpha$  et que l'on a :

$$-1,28 < \alpha < -1,27$$

3. En déduire le signe de  $\phi(x)$  sur  $\mathbf{R}$ .

### PARTIE B

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan  
(unité graphique : 4 cm).

1. Montrer que :  $f'(x) = \frac{e^x \phi(x)}{(e^x + 1)^2}$ .

En déduire le sens de variation de  $f$ .

2. Montrer que  $f(\alpha) = \alpha + 1$  et en déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ .

3. Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

Donner une équation de T et étudier la position de (C) par rapport à T.

4. Chercher les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .

Démontrer que la droite D d'équation  $y = x$  est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à D.

5. Faire le tableau de variation de  $f$ .

6. Tracer sur un même dessin (C), T et D. La figure demandée fera apparaître les points de (C) dont les abscisses appartiennent à  $[-2, 4]$ .

### PARTIE C

On considère la fonction  $g$ , définie sur  $[0, 1]$  par :  
 $g(x) = \ln(1 + e^x)$ .

On note (L) la courbe représentative de  $g$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , I le point défini par  $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ , A le point d'abscisse 0 de (L) et B son point d'abscisse 1.

1. Étudier brièvement les variations de  $g$ .

2. Donner une équation de la tangente en A à (L).

3. On note P l'intersection de cette tangente avec le segment [IB].  
Calculer les aires des trapèzes OIPA et OIBA.

4. On admet que la courbe (L) est située entre les segments [AP] et [AB]. Montrer alors que :

$$\ln 2 + \frac{1}{4} \leq \int_0^1 g(x) dx \leq \ln \sqrt{2(1+e)}.$$

5. Au moyen d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_0^1 f(x)dx = \ln(1+e) - \int_0^1 g(x)dx.$$

6. En déduire un encadrement de  $\int_0^1 f(x)dx$ .

### ✎ Exercice 16:

#### **PARTIE A**

Soit  $f$  la fonction définie, sur  $\mathbf{R}$ , par:  $f(x) = \frac{10e^x}{e^x + 4}$ .

On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique : 1 cm).

1°) a) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

En écrivant.  $f(x) = 10 - \frac{40}{e^x + 4}$ , déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

En déduire les équations des asymptotes à (C).

b) Calculer  $f'(x)$ , où  $f'$  est la dérivée de  $f$ .

c) Etudier les variations de  $f$ .

d) Dresser son tableau de variations.

2°) Déterminer une équation de la tangente, (D), à (C) au point d'abscisse  $\ln 4$ .

3°) Tracer sur un même graphique, la courbe (C), ses asymptotes et la droite (D).

#### **PARTIE B**

Une entreprise fabrique un certain produit P. On appelle  $x$  le nombre de tonnes de P fabriquées.

On note  $C(x)$  leur coût total de fabrication, exprimé en milliers d'euros.

La fonction coût marginal,  $C'$ , est la dérivée de la fonction  $C$ .

Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on a :  $C'(x) = f(x)$ , où  $f$  est la fonction étudiée dans la partie A. De plus, on suppose qu'il n'y a pas de charges fixes, donc que  $C(0) = 0$ .

1°) a) Montrer que le coût total est donné par :  $C(x) = \int_0^x f(t)dt$ .

b) Exprimer  $C(x)$  en fonction de  $x$ .

c) Quel est le coût total de 5 tonnes de ce produit P ? On en donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à la dizaine d'euros près.

2°) On appelle  $C_M(x)$  le coût moyen défini, pour tout  $x$  strictement positif, par:  $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$ .

Exprimer  $C_M(x)$  en fonction de  $x$ .

Vérifier que, pour tout  $x > 0$ ,  $C_M(x) = 10 + \frac{10\ln(1+4e^{-x})}{x} - \frac{10\ln 5}{x}$ .

En déduire la limite de  $C_M(x)$  en  $+\infty$ .

### Exercice 17 :

Les tracés de courbes seront faits dans un plan rapporté à un repère orthonormal

$(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2 cm).

On rappelle qu'une fonction  $f$  est majorée par une fonction  $g$  (ce qui signifie aussi que  $g$  est minorée par  $f$ ) sur un intervalle  $I$  si et seulement si, pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f(x) \leq g(x)$ .

#### Partie A

Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln(1+x) \text{ et } g(x) = \frac{2x}{x+2} ;$$

on notera  $C$  la représentation graphique de  $f$  et  $\Gamma$  celle de  $g$ .

On se propose de démontrer que  $f$  est minorée par  $g$  sur  $[0; +\infty[$ .

Soit  $h$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

1) Étudier le sens de variation de  $h$  sur  $[0; +\infty[$ ; calculer  $h(0)$ . (L'étude de la limite de  $h$  en  $+\infty$  n'est pas demandée.)

2) En déduire que pour tout réel  $x$  positif ou nul,  $\frac{2x}{x+2} \leq \ln(1+x)$

3) Construire dans le même repère les courbes  $C$  et  $\Gamma$  et montrer qu'elles admettent en  $O$  une même tangente  $D$  que l'on tracera. (On justifiera rapidement le tracé de ces courbes).

#### PARTIE B

$k$  désignant un réel strictement positif, on se propose de déterminer toutes les fonctions linéaires  $x \rightarrow kx$ , majorant la fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x)$  sur  $[0; +\infty[$ .

Soit  $f_k$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$ .

1) Étudier le sens de variation de  $f_1$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f_1(x) = \ln(1+x) - x$ .

2) Étudier la limite de  $f_1$  en  $+\infty$  et donner la valeur de  $f_1$  en 0.

3) Montrer que pour tout réel  $x$  positif ou nul :  $\ln(1+x) \geq x$ .

4) En déduire que si  $k \leq 1$ , alors : pour tout  $x \geq 0$ ,  $f(x) \geq kx$ .

5) Le réel  $k$  vérifie les conditions :  $0 < k < 1$ .

Montrer que la dérivée de  $f_k$  s'annule pour  $x = \frac{1}{k} - 1$  et étudier le sens de variation de  $f_k$ .

(L'étude de la limite de  $f_k$  en  $+\infty$  n'est pas demandée.)

6) En déduire les valeurs de  $k$  strictement positives telles que : pour tout  $x \geq 0$ ,  $f(x) \geq kx$ .

#### PARTIE C

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I = \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

(On remarquera éventuellement que :  $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ ).

En déduire le calcul de  $J = \int_0^1 (x - \ln(1+x))dx$  puis de  $K = \int_0^1 (\ln(1+x) - \frac{2x}{x+2})dx$

(Pour le calcul de K on pourra vérifier que :  $\frac{2x}{x+2} = 2 - \frac{4}{2+x}$ ).

Interprétez géométriquement les valeurs des intégrales J et K en utilisant les courbes C,  $\Gamma$  et la droite D obtenues dans la partie A.

2) Soit u la fonction définie sur  $[0;1]$  de la façon suivante :

$$u(0) = 1 \text{ et si } x \neq 0, u(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

a. Démontrer que la fonction u est continue sur  $[0;1]$ .

b. On pose :  $\int_0^1 u(x)dx$

En utilisant les inégalités (1) et (2) obtenues dans les parties A et B, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{2}{x+2} dx \leq L \leq 1$$

En déduire une valeur approchée de L à  $10^{-1}$  près.

### ✎ Exercice 18 :

#### **Partie A**

Soit la fonction g définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 1 - 2x + e^{2x}$ .

1. Pour tout x de  $\mathbb{R}$ , déterminer  $g'(x)$ . En déduire les variations de g sur  $\mathbb{R}$  ( on ne demande pas les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ).
2. Montrer que  $g(x) > 0$  pour tout x de  $(\Delta)$ .

#### **Partie B**

On considère maintenant la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + 2 + xe^{-2x}$

On appelle  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Déterminer la limite de f en  $-\infty$ .
2. Déterminer la limite de f en  $+\infty$ .
3. a. Calculer pour tout x de  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x)$  et vérifier que :  $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{2x}}$ .  
 b. En utilisant la **partie A**, déterminer le tableau de variations de .  
 c. En déduire que, pour tout x de  $[0; \infty[$  on a :  $f(x) > 0$ .

4. a. Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x + 2$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $+\infty$ .  
b. Etudier la position relative de  $(C_f)$  et  $(\Delta)$ .
5. Tracer  $(C_f)$  et  $(\Delta)$
6. Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x}$ 
  - a. Démontrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - b. Soit l'aire  $A$  en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan délimitée par  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ . déterminer la valeur exacte de  $A$ , puis sa valeur arrondie à 0,1 près.

### Exercice 19 :

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  ; on prendra 2 cm comme unité sur les deux axes et on placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille millimétrée.

#### **PARTIE A**

On considère la fonction  $f$ , définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = (1-x)(\ln x - 2)$  et on désigne par  $C$  sa courbe représentative relativement au repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et 0.
- 2) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  et calculer  $f'(x)$ .
- 3) Soit  $u$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $u(x) = \ln x + x - 3$ .
  - a) Étudier les variations de  $u$ .
  - b) Montrer que l'équation  $u(x) = 0$  possède une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[2,3]$ .  
Montrer que  $2,20 < \alpha < 2,21$ .
  - c) Étudier le signe de  $u(x)$  sur  $]0 ; +\infty[$ .
- 4) a) Étudier les variations de  $f$ .  
b) Exprimer  $\ln \alpha$  comme polynôme en  $\alpha$ .

Montrer que :  $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ .

En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude  $2 \times 10^{-2}$ .

- 5) a) Étudier le signe de  $f(x)$ .  
b) Tracer  $C$ .

#### **PARTIE B**

Soit  $F$  la primitive de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$  qui s'annule pour  $x = 1$ .

On appelle  $\Gamma$  la courbe représentative de  $F$  relativement au repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a) Sans calculer  $F(x)$ , étudier les variations de  $F$  sur  $]0 ; +\infty[$ .  
b) Que peut-on dire des tangentes à  $\Gamma$  en ses points d'abscisses 1 et  $e^2$  ?
- 2) Calcul de  $F(x)$

a)  $x$  étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale  $\int_1^x \ln t \, dt$

(on pourra faire une intégration par parties).

b) Montrer que, pour tout  $x$  strictement positif :  $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$

c) En déduire l'expression de  $F(x)$  en fonction de  $x$ .

3) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$ . En déduire la limite de  $F$  en 0.

b) Montrer que, pour  $x$  strictement supérieur à 1,

$$F(x) = x \ln x \left( 1 - \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x} \right) + 3$$

En déduire la limite de  $F$  en  $+\infty$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $F$ .

d) Tracer  $\Gamma$  sur le même graphique que  $C$ .

4) Calcul d'une aire :

Calculer, en  $\text{cm}^2$ , l'aire du domaine limité par la courbe  $C$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e^2$ .

### Exercice 20 :

On considère la fonction  $f$  définie par :

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  avec  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$

#### Partie A

1) - Quel est le domaine de définition de  $f$ . Calculer  $f(-2)$  et  $f(3)$ .

2) - Montrer que la fonction  $f$  est continue en zéro.

3) -a)- Etablir que la dérivée  $f'$  de  $f$  a pour expression

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[ \\ f'(x) = xe^{-x}(2-x) & \text{si } x \in [0; +\infty[ \end{cases}$$

b) La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 ? justifier votre réponse.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

4) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une racine unique  $\alpha$  comprise entre  $-1,6$  et  $-1,5$ .

5) a) Justifier que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $(C)$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ .

b)- Etudier la position de  $(C)$  par rapport à  $(D)$ . dans  $] -\infty; 0[ - \{-1\}$ .

6) Tracer la courbe  $(C)$  en représentant sur la même figure les asymptotes ; les demi tangentes en 0 et les points d'intersection avec les axes de coordonnées.

#### Partie B

Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $[0; 2]$ .

1) Montrer que  $g$  définit une bijection de  $[0; 2]$  sur un intervalle  $J$  à préciser.

2) On note  $g^{-1}$  la bijection réciproque de  $g$ .

a) Résoudre l'équation :  $g^{-1}(x) = 1$ .

b) Montrer que :  $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{1}{e}\right) = e$ .

3) - On appelle  $(C')$  la courbe représentative de  $g^{-1}$ .

Tracer  $(C')$  en utilisant la courbe  $(C)$  et une transformation à préciser (on placera sur la courbe  $(C')$  le point d'ordonnée 1 et la tangente au point d'abscisse  $\frac{1}{e}$ )

### Partie C

$\lambda$  étant un réel strictement positif, on pose :  $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x) dx$

1) a) Interpréter graphiquement  $I(\lambda)$ .

b) En procédant à une intégration par parties, calculer  $I(\lambda)$ .

2) Quelle est la limite de  $I(\lambda)$  lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$  ? Pour  $x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; 0[$ ,  $f(x)$  existe si et seulement si  $x \neq 1$  (or, 1 n'est pas élément de cet ensemble) et pour  $x \in [0 ; +\infty[$ ,  $f(x)$  est toujours définie. on en conclut que :  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

3) On pose  $\lambda = 2$

a) Calculer  $I(\lambda)$ .

b) En déduire la valeur en  $cm^2$  de l'aire de la partie limitée par  $(C')$  et les droites d'équation  $y = 0$  ;  $x = 0$  et  $x = \frac{4}{e^2}$

### Exercice 21 :

#### Partie A

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x(x-1) + x^2$

1. Montrer que la dérivée de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  est :  $g'(x) = x(e^x + 2)$

2. Déterminer les limites de la fonction  $g$  en  $(+\infty)$  et en  $(-\infty)$

3. Etudier le signe de  $g'(x)$  sur  $\mathbb{R}$ , et dresser le tableau de variation de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

4. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution  $\alpha$  et une seule sur l'intervalle  $[0, +\infty[$

5. Montrer que  $\alpha$  est dans l'intervalle  $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .

#### Partie B

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$ .

1. Montrer que les équations  $f(x) = x$  et  $g(x) = 0$  sont équivalentes sur  $[0, +\infty[$ , et que, par suite l'équation  $f(x) = x$  admet  $\alpha$  pour unique solution sur  $\mathbb{I}$ .

2. Calculer la dérivée de  $f$  et en déduire le sens de  $f$  sur  $[0, +\infty[$

3. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$

4. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
5. Construire la courbe représentative (C) de  $f$  sur  $[0, +\infty[$  dans un repère orthonormé (unité 2cm). On indiquera en particulier les tangentes à (C) aux points d'abscisses 0 et 1.

### Partie C

1. Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f(x)$  appartient à  $I$ .
2. Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par : 
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n > 1 \end{cases}$$
  - a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*, u_n \in I$
  - b) Montrer que, pour tout  $x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .
  - c) En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :  
pour tout  $n > 1, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$
  - d) En déduire par un raisonnement de récurrence que : pour tout  
$$n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
  - e) En déduire que  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$ .
  - f) A priori, combien suffit-il de calculer de termes de la suite pour obtenir une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-7}$  près ?
3. En utilisant la décroissance de  $f$ , montrer que  $\alpha$  est compris entre deux termes consécutifs quelconques de la suite. En déduire un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-7}$ .

## CALCUL INTEGRAL

### Exercice 1 :

Calculer l'intégrale  $I$  dans les cas suivants :

$$1) I = \int_1^2 (2x+1)^2 dx.$$

$$2) I = \int_0^1 -x(1+x^2)^3 dx.$$

$$3) I = \int_0^2 xe^{-x^2} dx.$$

$$4) I = \int_{-1}^0 \frac{3x}{(x^2+1)^2} dx.$$

$$5) I = \int_1^e \frac{1+\ln t}{t} dt$$

$$6) I = \int_{-1}^1 e^{3x+4} dx.$$

$$7) I = \int_0^2 \sqrt{2x+1} dx.$$

$$8) I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx.$$

$$9) I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$10) I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx. \text{ (On pourra écrire } \frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} \text{)}$$

$$11) I = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

$$12) I = \int_0^{-2} t \cdot \exp(-t^2) dt$$

$$13) I = \int_1^e \left(x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$14) I = \int_{-1}^x \frac{dt}{1-t}$$

$$15) I = \int_0^{\pi/6} \sin 3u du$$

$$16) I = \int_{e^2}^e \frac{\ln t}{t} dt$$

$$17) I = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$18) I = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2} dt$$

$$19) I = \int_a^{a^n} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$20) I = \int_1^{e^2} (x^3+1) \ln(x) dx$$

$$21) I = \int_0^1 (x^2+x+1)e^{-x} dx$$

$$22) I = \int_0^\pi x^2 \sin(x) dx.$$

### Exercice 2 :

Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^{2n-1}}{x} dx = \frac{1}{n(n+1)}$$

**Exercice 3 :**

On considère un entier naturel  $n$  et on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

- 1) Trouver la dérivée de  $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .
- 2) Calculer  $I_0$  et  $I_1$

**Exercice 4 :**

Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$$a) I = \int_1^2 x^2 \ln x dx \quad b) I = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2} dx \quad c) I = \int_0^1 x^2 \cos x dx \quad d) I = \int_0^1 e^x \cos x dx.$$

**Exercice 5 :**

- 1) Déterminer les réelles  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre réel  $x$  strictement positif :

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x}.$$

- 2) Calculer alors :  $J = \int_1^2 \frac{dx}{x(1+x)}.$

- 3) Calculer l'intégrale :  $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx.$

**Exercice 6 :**

$$\text{On pose : } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx.$$

Calculer puis  $I - J$ . En déduire  $I$  et  $J$ .

**Exercice 7 :**

- 1) Déterminer trois réels  $a, b, c$  tels que, pour tout  $x \in [0; +\infty[$  :

$$\frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}$$

- 2) Soit  $t \geq 1$ . Calculer  $\int_1^t \frac{dx}{x(1+x)^2}$

- 3) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1; +\infty[$  par  $f(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx.$

En intégrant par parties, calculer  $f(t)$  en fonction de  $t$ .

4) Montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{1}{2} \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right)$

**✎ Exercice 8 :**

A l'aide d'une double intégration par parties successives, calculer :

a)  $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} (2x^2 - 1) \cos 3x dx$

b)  $J = \int_0^1 e^x \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx$

**✎ Exercice 9 :**

1°) a) Démontrer que pour tout réel  $x$  on a :  $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$

b) En déduire la valeur de l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$ .

2°) Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \ln(1+e^x)$ .

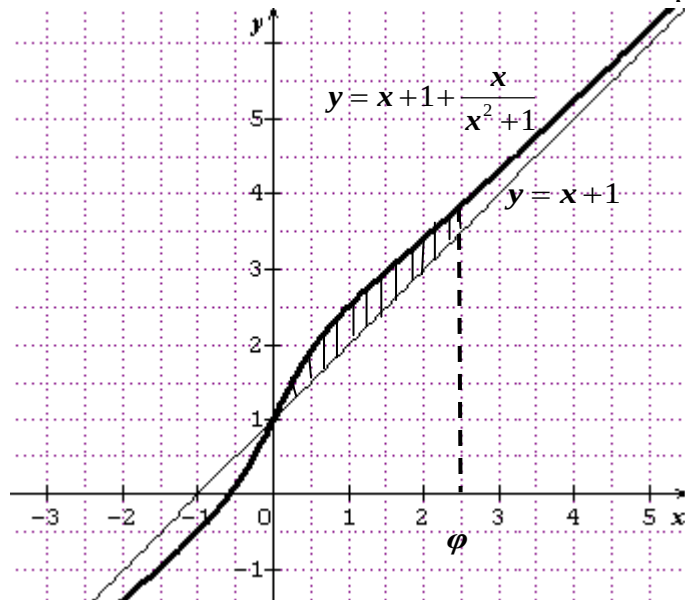
a) Calculer la dérivée de  $f$ .

b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties la valeur de l'intégrale

$J = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x) dx$

**✎ Exercice 10 :**

On considère la fonction  $f$  définie par :  $x \mapsto x + 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$



Interpréter le domaine représenté ci-dessus et calculer l'aire du domaine hachuré quand  $\phi \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 11 :**

1) Soient  $I_1 = \int_0^1 \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$  et  $I_2 = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ .

Calculer  $I_1 + I_2$  et  $I_1 - I_2$ . En déduire les valeurs de  $I_1$  et  $I_2$ .

2) On souhaite calculer  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2\sin x} dx$ .

a) Calculer :  $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} dx$ .

b) Calculer :  $J_2 = J_1 + J$ . En déduire  $J$ .

**Exercice 12 :**

1. Calculer la dérivée de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \ln(4 + e^{-x})$ .

2. En déduire la valeur de l'intégrale :  $\int_0^a \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

**Exercice 13 :**

1.  $g$  est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = -x^2 - 4 + 4 \ln x$ .

Etudier les variations de  $g$  et en déduire le signe de  $g(x)$  pour tout  $x > 0$ .

2.  $f$  est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = -x + 2 - \frac{4 \ln x}{x}$ .

Le plan est rapporté à un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

On appelle  $C$  la courbe représentative de  $f$ .

- Etudier les variations de  $f$ .
- Etudier la limite de  $f$  en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- Etudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- Démontrer que la droite  $D$  d'équation  $y = -x + 2$  est asymptote à  $C$  en  $+\infty$ .
- Etudier la position relative de  $D$  et  $C$ .
- Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- Déterminer les points de  $C$  en lesquels la tangente est parallèle à  $D$ .
- Représenter  $C$  et  $D$ .

3.  $h$  est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $h(x) = -x + 2 - \frac{4}{x}$ .

On appelle  $H$  sa courbe représentative dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- Etudier les variations de  $h$ .
- Démontrer que la droite  $D$  est asymptote à  $H$ . Déterminer l'autre asymptote à  $H$ .
- Etudier les intersections de  $C$  et  $H$ , et étudier la position relative des deux courbes.

4. Calculer  $\int_1^e (f(x) - h(x)) dx$ .

**Exercice 14 :**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique : 1 cm). Dans ce repère, on a tracé ci-dessous la courbe G représentative de la fonction g définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{x^3+3x}{x^2+1}$ .

On a également tracé ci-dessous la droite D d'équation  $y = x$  et une droite d parallèle à l'axe des ordonnées  $(O ; \vec{j})$ . Cette droite d coupe l'axe des abscisses, la droite D et la courbe G respectivement aux points A, B et C de même abscisse a appartenant à l'intervalle  $[1 ; 10]$ .

La réunion des parties P et T représente à l'échelle  $\frac{1}{200}^e$  la voile d'un bateau.

Les parties P et T exigent des toiles différentes mais doivent avoir la même aire. Le but du problème est de choisir le nombre a de telle sorte que les aires des parties P et T soient égales.

A - Etude du bord supérieur de la voile

1. Vérifier que, pour tout nombre réel

positif x :  $g(x) = x + \frac{2x}{x^2+1}$ .

2. a) En déduire que la droite D est asymptote à la courbe G.

b) Etudier la position de la courbe G par rapport à la droite D.

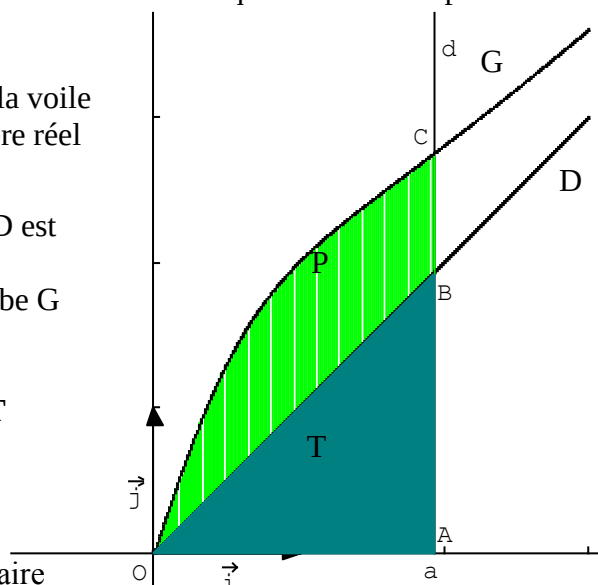
B – Calcul des aires de P et T

1. Calculer en fonction de a :

$$\int_0^a \frac{2x}{x^2+1} dx$$

2. Calculer, en fonction de a, l'aire en  $\text{cm}^2$  du domaine délimité par la courbe G, l'axe des abscisses et la droite d'équation  $x = a$ .

3. Calculer, en fonction de a, l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie T, puis en déduire l'aire de la partie P.



**Exercice 15 :**

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \int_{n+1}^n e^{-\frac{1}{2^x}} dx$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

1. Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

2. Montrer que la suite  $(u_n)$  est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3. On pose  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  Montrer que  $S_n = \int_0^n e^{-\frac{1}{2^x}} dx$

La suite  $(u_n)$  a-t-elle une limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## EQUATIONS DIFFERENTIELLES

### ✎ Exercice 1 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

- a)  $f' + 2f = 0$  ;
- b)  $f' - 4 = 0$  ;
- c)  $3f' - f = 0$
- d)  $f'' - f' - 2f = 0$  ;
- e)  $2f'' - 12f' + 18 = 0$
- f)  $-f'' + f' - f = 0$  ;
- g)  $4f'' + 6f = 0$

### ✎ Exercice 2 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations différentielles ci-dessous avec des conditions initiales imposées.

- a)  $-f' + 2f = 0$  ;  $f(3) = -2$  .
- b)  $2f'' + 3f' - 2f = 0$  ;  $f(0) = 1$  ;  $f'(0) = 3$  .
- c)  $3f'' - 2f' + 7f = 0$  ;  $f(0) = 1$  ;  $f'(0) = -1$  .
- d)  $25f'' + f = 0$  ;  $f(\pi) = 2$  ;  $f'(0) = -1$  .
- e)  $y'' + 2y + y = 0$  ;  $y(0) = -1$  ;  $y'(0) = 0$
- g)  $y'' - (\ln 2)^2 y = 0$  ;  $y(0) = 1$  ;  $y(2) = 1$

### ✎ Exercice 3 :

Le plan est muni d'un repère  $(O, I, J)$

Déterminer la fonction  $f$  deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f'' - \pi f = 0$  et dont la courbe représentative admet au point  $A(0 ; \pi)$  une tangente de coefficient directeur  $\pi$

### ✎ Exercice 4 :

Le plan est muni d'un repère  $(O, I, J)$

1. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$
2. Quelle est la solution de  $(E)$  dont la courbe représentative  $(C)$  la même tangente que la courbe  $(C')$  représentative de la fonction  $x \mapsto e^{3x}$ .

### ✎ Exercice 5 :

Déterminer les solutions de l'équation différentielle  $f'' - f' + \frac{1}{4}f = 0$  sachant que sa

représentation graphique passe par  $A(0; 4)$  et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.

**Exercice 6 :**

On donne l'équation différentielle :

$$f'' + 2f' + f = 0 \quad (E)$$

On pose : pour tout nombre réel  $x$  :

$$h(x) = e^x k(x)$$

1. Démontrer que  $k$  est solution de  $(E)$  si et seulement si, pour tout nombre réel  $x$ ,  $h''(x) = 0$ .
2. Résoudre l'équation différentielle  $h'' = 0$ .

En déduire les solutions de  $(E)$ .

**Exercice 7 :**

On considère l'équation différentielle  $(E): y' + 2y = e^{-2x}$

1. Vérifier que la fonction  $g: x \mapsto (x+1)e^{-2x}$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de  $(E)$
2. Démontrer qu'une fonction  $f + g$  est solution de  $(E)$  si la fonction  $f$  est solution de l'équation différentielle :  $y' + 2y = 0$
3. En déduire les solutions sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 8 :**

1. Résoudre l'équation différentielle  $(E): y'' + 2y' + y = 0$ .
2. Soit  $(E')$  l'équation différentielle :  $y'' + 2y' + y = x + 3$ .
  - b) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $h$  définie par  $h(x) = ax + b$ , soit solution de  $(E')$ .
  - c) Démontrer que  $g$  est solution de  $(E')$  si et seulement  $g - h$  est solution de  $(E)$ .
  - d) Résoudre alors  $(E')$ .
- 3) Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$  telle que :  $f(0) = 2$  et  $f'(0) = -1$ .
- 4) Soit la fonction  $k$  définie par  $k(x) = (x+2)e^{-x}$ 
  - a) Etudier les variations de  $K$ .
  - b) Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  de  $K$  au point d'abscisse 0.
  - c) Démontrer que le point  $I(0; 2)$  est un point d'inflexion de la courbe  $(C)$ .
  - d) Tracer  $(C)$  et  $(T)$  dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Exercice 9 :**

Soit la fonction  $f: x \mapsto \sin x + \cos x$

1. Déterminer  $f'(x)$  et  $f''(x)$
2. Former une équation différentielle du second ordre sans second membre dont  $f$  soit solution.
3. Résoudre cette équation.

**Exercice 10 :**

On considère l'équation différentielle  $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$  (E)

1. Déterminer le réel  $\lambda$  tel que la fonction  $y_0$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $y_0(x) = \lambda x^2 e^{-x}$  soit solution de l'équation (E)
2. Démontrer que  $y$ , fonction numérique deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , est solution sur  $\mathbb{R}$  de (E) si et seulement si la fonction  $z$  définie par  $z = y - y_0$  est solution de l'équation différentielle  $(E_1) : y'' + 2y' + y = 0$
3. Soit la fonction  $t = z' + z$ . Montrer que  $t' + t = 0$
4. Résoudre alors l'équation différentielle  $(E_1)$
5. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E)
6. Déterminer la solution  $f$  de (E) dont la courbe représentative dans le repère  $(0; \vec{i}, \vec{j})$  passe par le point de coordonnées  $A(-1, 0)$  et admet en ce point une tangente de vecteur directeur  $\vec{i}$ .

**Exercice 11 :**

**Partie A**

- a/ Résoudre l'équation différentielle :  $y'' - 3y' + 2y = 0$
  - b/ Donner la solution satisfaisant aux conditions suivantes :  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$
- 2) On considère la fonction  $g(x) = e^x - e^{2x}$
- a) Étudier les variations de  $g$  et construire sa courbe représentative  $(C_g)$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  unité 1 cm.
  - b) À tout réel  $\beta$  on associe  $(P_\beta)$  l'ensemble des points  $M$  du plan dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} \beta \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq g(x) \end{cases}$$

Hachurer ce domaine ; calcule en  $\text{cm}^2$ , l'aire  $A(\beta)$  de ce domaine et la limite de cette aire lorsque  $\beta$  tend vers  $-\infty$ .

**Partie B**

On considère la fonction  $h : x \mapsto |e^x - e^{2x}|$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

- 1) Déterminer :  $\lim_{u \rightarrow 0} \left( \frac{e^u - 1}{u} \right)$ , en justifiant
- 2) Étudier la dérivabilité de  $h$  à droite ; puis à gauche en 0.
- 3) Faire l'étude complète de  $h$  puis construire  $(C_h)$  dans un second repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  on représentera les demi-tangentes en 0 à  $(C_h)$ .

**Partie C**

III / On considère la fonction :  $n(x) = \ln|e^x - e^{2x}|$

- 1) a/ Préciser le domaine de  $n$ .
- b/ Démontrer que :  $n(x) - 2x = \ln(1 - e^{-x})$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

c/ Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - e^{-x})$

d/ En déduire l'existence d'une asymptote oblique  $(\Delta_1)$  à  $(C_n)$ . On étudiera éventuellement la position de  $(C_n)$  et  $(\Delta_1)$ .

2) a/ Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, n(x) - x = \ln(1 - e^x)$

b/ Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 - e^x)$  en déduire l'existence d'une deuxième asymptote  $(\Delta'_1)$  à la courbe  $(C_n)$ , étudier leur position.

3) Faire l'étude complète de  $n$  et construire  $(C_n)$  dans un troisième repère orthonormal  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

4) Montrer que la restriction  $\varphi$  de  $n$  à  $\mathbb{R}_+^*$  admet une bijection réciproque  $\varphi^{-1}$  et construire la courbe  $(C')$  de  $\varphi^{-1}$  dans le repère  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

### Exercice 12 :

#### Partie A

1. Déterminer la fonction  $h$  solution de l'équation différentielle  $2y'' - 3y' + y = 0$ , telle que  $h(0) = 0$  et  $h'(0) = -\frac{1}{2}$ .

2. On désigne par  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^x$  et on appelle  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Étudier les variations de  $f$ . Préciser les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

b) Préciser le signe de  $f(x)$  en fonction de  $x$

c) Tracer la courbe  $(C_f)$ .

#### Partie B

Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R} - \{0\}$  par :  $g(x) = \ln \left| e^{\frac{x}{2}} - e^x \right|$

On note  $(C_g)$  la courbe représentative de la fonction  $g$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Préciser les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$  et en 0.

2. Calculer  $g'(x)$  et déterminer son signe.

3. Démontrer que pour tout réel  $x$  strictement positif :  $g(x) - x = \ln \left( 1 - e^{-\frac{x}{2}} \right)$

Montrer que la droite  $D$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $(C_g)$ . Étudier la position de  $(C_g)$  par rapport à  $D$  pour tout réel  $x$  strictement positif.

4. Démontrer que pour tout réel  $x$  strictement négatif :  $g(x) - \frac{x}{2} = \ln \left( 1 - e^{\frac{x}{2}} \right)$

Montrer que la droite  $D'$  d'équation  $y = \frac{x}{2}$  est asymptote à la courbe  $(C_g)$ . Étudier la position de  $(C_g)$  par rapport à  $D'$  pour tout réel  $x$  strictement négatif.  
Construire  $(C_g)$ ,  $D$  et  $D'$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On utilisera un graphique différent que celui de la **partie A**

### Le Saviez – Vous ?

La base de la Fonction Exponentielle **e** :

- Est la limite de la suite  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  (quand  $n$  tend vers l'infini)
- Est égale à la somme de la série infinie  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$
- N'est ni entier, ni rationnel, ni susceptible d'être écrit avec des radicaux, il est un nombre transcendant. (un autre nombre transcendant est le nombre  $\pi$ )

La notation  $\int$  fut introduite par **Leibniz** : « en appelant « y » n'importe quel terme d'une suite, on pourra appeler la différence première « dy », la différence seconde « ddy », ..., et en appelant x n'importe quel terme d'une autre suite, on pourra appeler la somme de ces termes «  $\int x$  »... ».

*Histoire et Origine du calcul différentiel (1713)*

### Le saviez – vous ?

Le nombre **e** qui figure dans la notation  $e^{i\theta}$  est la base du logarithme népérien ( $\ln e = 1$ )

C'est **Euler** qui a introduit l'usage des deux lettres **e** et **i**. A l'origine, **i** symbolisait l'infini. Ce n'est qu'en 1777 qu'Euler l'utilisa pour désigner «  $\sqrt{-1}$  ». Citons Leibniz : « l'esprit divin a trouvé une issue magnifique de ce (...) qui n'est ni l'être ni le non-être, que nous appelons la racine imaginaire de l'unité négative ».

## SUITES NUMERIQUES

### Exercice 1 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in [0, 1]$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f$  est la fonction définie par :  $f(x) = \frac{1}{x+1}$

- 1- Montrer que pour tout  $n \in [0, 1]$ ,  $u_n$  est bien défini et  $u_n \in [0, 1]$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle monotone ?
- 2- On pose pour tout  $n \in [0, 1]$ ,  $v_n = u_{2n}$  et  $w_n = u_{2n+1}$ . Etudier les sens de variation des suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- 3- Résoudre l'équation  $(f \circ f)(x) = x$ .
- 4- Etudier la convergence des suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , puis celle de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Exercice 2 :

On considère les suites numériques  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  par :

$$U_0 = e^3 \quad \text{et} \quad V_n = \ln(U_n) - 2.$$

- 1°) Calculer  $U_1$  et  $V_1$ .
- 2°) Démontrer que la suite  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 3°) Ecrire  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- 4°) Etudier la convergence des suites  $(V_n)$  et  $(U_n)$ .

### Exercice 3 :

Soit la suite  $(U_n)$  définie par :  $U_n = \exp\left(1 - \frac{n}{2}\right)$ .

- 1°) a) Montrer que  $(U_n)$  est une suite géométrique. En préciser le premier terme et la raison.  
b) Justifier que  $(V_n)$ , définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $V_n = \ln U_n$  existe et est arithmétique.
- 2°) On pose  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$  et  $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$ .  
a) Exprimer  $S_n$  et  $P_n$  en fonction de  $n$ .  
b) Déterminer les limites à l'infini de  $S_n$  et  $P_n$ .

### Exercice 4 :

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ . On se

propose de montrer la convergence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et de déterminer sa limite par trois méthodes différentes.

- 1- Montrer que la limite éventuelle de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne peut être que  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (nombre d'or).
- 2- a- Montrer que, pour tout  $v_n = nu_n$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\alpha} |u_n - \alpha|^2$ .  
b- En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ .
- 3- a- Etudier le signe de  $u_{n+1} = f(u_n)$  en fonction de celui de  $u_n - \alpha$  et le signe de  $u_{n+1} - u_n$  en fonction de celui de  $u_n - u_{n-1}$ .  
b- Montrer par récurrence que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $u_{2p} \leq \alpha \leq u_{2p+1}$ .  
c- Montrer que les suites  $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?  
d- En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ .
- 4- Soit  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . On introduit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  

$$v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$$
  - a- La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle correctement définie ?
  - b- Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique. On pourra remarquer que  $\beta$  et  $\alpha$  sont les racines de l'équation  $r^2 = r + 1$ . Quelle est sa limite ?
  - c- En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\beta$ .

### Exercice 5 :

Soit  $a$  un réel non nul et la suite  $(U_n)$  :  $U_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_n = a U_{n-1} + 2$

1°) On suppose  $a = 1$ .

- a) Quelle est la nature de la suite  $(U_n)$  ?
- b) Calculer le centième terme de cette suite.
- c) Déterminer la valeur de  $S = 1 + 3 + 5 + \dots + u_{99}$ .

2°) On suppose  $a = 3$  et on donne la suite  $(V_n)$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n + 1.$$

- a) Montrez que  $(V_n)$  est une suite géométrique dont vous donnerez la raison et le premier terme.
- b) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .  $(U_n)$  est-elle convergente ? Pourquoi ?

3°) On ne donne pas  $a$  mais on donne la suite  $(\omega_n)$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \omega_n = U_n - \frac{2}{1-a}; a \neq 1.$$

- a) Montrer que  $(\omega_n)$  est une suite géométrique dont vous donnerez la raison et le premier terme.
- b) Pour quelles valeurs de  $a$   $(U_n)$  sera-t-elle convergente ? donner alors sa limite.

**Exercice 6 :**

1. a) Etudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $] -1; +\infty[$  par :  $f(x) = 2 \ln(x + 1)$ .  
Tracer sa courbe représentative (C) dans le repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , unité : 2cm.
- b) Démontrer que sur  $[2; +\infty[$  la fonction  $l$ , définie par  $l(x) = f(x) - x$ , est bijective et l'équation  $l(x) = 0$  admet une solution unique  $\gamma$ .
2. On considère la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :
 
$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 2 \ln(1 + U_n) \end{cases}$$
  - a) Sans faire le calcul, représenter les quatre premiers termes de la suite sur le graphique.
  - b) Démontrer par récurrence que pour tout  $n$ ,  $U_n \geq 2$ .
  - c) Montrer que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[2; +\infty[$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$
  - d) En déduire que pour tout  $n$ , on a :  $|U_{n+1} - \gamma| \leq \frac{2}{3} |U_n - \gamma|$ .  
Que  $|U_{n+1} - \gamma| \leq 2(\frac{2}{3})^n$ , et que la suite  $(U_n)$  converge vers  $\gamma$ .
  - e) Déterminer le plus petit entier naturel  $p$  tel que  $|U_p - \gamma| \leq 10^{-2}$ . Que représente  $U_p$  pour  $\gamma$ .

**Exercice 7 :**

- $f$  est la fonction définie sur  $] 1 ; +\infty [$  par  $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$
- 1) Prouver que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $] 1 ; 2 [$ .
  - 2) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  a même ensemble de solutions que l'équation  $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$
  - 3) Notons  $g$  la fonction définie sur  $] 0 ; +\infty [$  par  $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 
    - a) Montrer que, pour tout  $x$  dans  $] 1 ; +\infty [$ ,  $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
    - b) En déduire que pour tout  $x$  dans  $[1; +\infty[$ ,  $|g(x) - \alpha| \leq |x - \alpha|$
  - 4) On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et la relation de récurrence :  $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{U_n}}$   
Prouver, en utilisant la question précédente que : pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$   $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$   
En déduire que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

**Exercice 8 :**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tel que  $0 < a < b$ . On considère les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $u_0 = a$ ,  $v_0 = b$  et par les relations de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ ,  $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ .

Montrer que ces deux suites sont adjacentes, donc convergentes vers une même limite (appelée moyenne arithmétique -géométrique des nombres  $a$  et  $b$ ).

### Exercice 9 :

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a \leq b$  et  $(u_n)$  la suite définie par :

$$u_1 = a + b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n}$$

- On suppose que  $a < b$ .
  - Montrer que  $(u_n)$  est minorée par  $b$ .
  - Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$  en déduire qu'elle est convergente.
- Soit  $v$  la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^* : v_n = \frac{u_n - b}{u_n - a}$ 
  - Montrer que  $v$  est une suite géométrique.
  - En déduire  $u_n$  en fonction de  $n, a$  et  $b$ .
  - Calculer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- On suppose que  $a = b$ .
  - Calculer  $u_1, u_2, u_3, u_4$  en fonction de  $a$ .
  - Exprimer alors  $u_n$  en fonction de  $n$  et  $a$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

### Exercice 10 :

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ . On considère la suite numérique

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la donnée de son premier terme  $u_0 = \frac{1}{2}$  et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n).$$

- Montrer que, pour tout  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [0, 1]$ .
- Montrer qu'il existe un unique réel  $l \in [0, 1]$  tel que  $f(l) = l$ .
- Prouver, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que :  
pour tout  $n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - l| \leq |u_n - l|$
- En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ , puis donner une valeur approchée de  $l$  à  $10^{-3}$  près.

### Exercice 11 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n+2}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

- Calculer  $u_1$  et  $u_2$
- On pose  $v_n = u_n \sqrt{2} - n$ , le terme général d'une suite  $(v_n)$ .
  - Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera sa raison et son premier terme.

- b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ , puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- c) Etudier la convergence de la suite  $(v_n)$ .
3. On pose  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  et  $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .  
Exprimer  $S_n$  et  $T_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 12 :**

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases}$$
- a. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $0 \leq u_n \leq 1$ .
- b. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- c. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ? justifier.
2. Soit  $(v_n)$  la suite définie par :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$
- a. Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique convergente.
- b. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  puis en déduire la limite de  $(u_n)$  en  $+\infty$ .

**Exercice 13 :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{u_n^2 + 2}} \end{cases}$$

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(u_n) = u_{n+1}$ .

- 1) a) Démontrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha$ .  
b) Vérifier que  $\alpha \in ]0,6 ; 0,7[$ .
- 2) a) Démontrer que  $\forall x \in [0,1]$ , on a :  $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$   
b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $0 \leq u_n \leq 1$ .
- 3) a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} |u_n - \alpha|$ .  
b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$ .  
c) Montrer que  $(u_n)$  converge vers  $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ .

**Exercice 14 :**

On considère les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

On pose  $w_n = u_n - v_n$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que  $(w_n)$  est une suite géométrique convergente.
2. Etudier le sens de variation de  $(u_n)$  et  $(v_n)$
3. a) Montrer que  $(u_n)$  est majorée et  $(v_n)$  est minorée.  
b) En déduire que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers une limite commune  $l$ .
4. On pose  $d_n = u_n + v_n$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$   
Montrer que  $(d_n)$  est constante puis en déduire  $l$ .

### ✎ Exercice 15 :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Démontrer que  $f(x) = x$  admet une solution unique  $l \in \mathbb{R}_+$ . (ne pas calculer).
2. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$
3. Montrer que sur l'intervalle  $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$  ; on a  $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$
4. a- Montrer que  $|f(u_n) - f(l)| \leq \frac{4}{9}|u_n - l|$   
b- En déduire que  $|u_{n+1} - l| \leq \frac{4}{9}|u_n - l|$  puis  $|u_n - l| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - l|$
5. Démontrer que  $(u_n)$  converge vers  $l$ .

### ✎ Exercice 16 :

Soit  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

1.  $U$  est une suite réelle définie par :  $\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+1} = U_{n-1} + U_n ; n \geq 1 \end{cases}$ 
  - a) Montrer que pour tout  $n \geq 1$  Vérifier que  $U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$
  - b) Montrer que la suite  $(U)$  est divergente
  - c) Montrer que  $\forall n \geq 1; -U_n^2 + U_{n+1}U_{n-1} = (-1)^n$
2. On pose  $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

- Exprimer  $V_{n+1} - V_n$  en fonction de  $U_n$  et de  $U_{n+1}$ .
- Exprimer  $V_n^2 - V_n$  en fonction de  $U_n$
- Soit  $(W_n)$  et  $(X_n)$  les suites définies sur  $\mathbb{N}$  par  $W_n = V_{2n}$  et  $X_n = V_{2n+1}$
- Montrer que les suites  $(W_n)$  et  $(X_n)$  sont adjacentes
- Montrer que la suite  $(V_n)$  est convergente et donner sa limite.

**Exercice 17 :**

- Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$   $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$ 
  - Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on a :  $0 < u_n < 1$
  - En déduire que  $(u_n)$  est une suite convergente et calculer sa limite
- Soit  $v$  la suite de terme général :  $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$ 
  - Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on a  $v_{n+1} = v_n^2$
  - En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$   $v_n = \frac{1}{3^{2^n}}$
  - Déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  et l'expression de  $u_n$ .
  - On pose pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $p_n = v_0 v_1 \dots v_n$ . Calculer  $p_n$  puis calcule  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{p_n}{v_{n+1}} \right)$
- Soit la suite  $s$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ 
  - Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $0 < 1 - u_n < \frac{1}{1+u_0^2} (1 - u_{n-1})$
  - En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < 1 - u_n < \left( \frac{4}{5} \right)^n$
  - Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$   $1 - \frac{5}{n} \left[ 1 - \left( \frac{5}{4} \right)^n \right] \leq s_n \leq 1$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$

**Le saviez – vous ?**

La formule  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ , qui a de nombreuses applications en trigonométrie, a été découverte par **Abraham de Moivre** en 1722 alors qu'il essayait de factoriser des polynômes du type  $z^{2n} + 2z \cos n\theta + 1$ .

## NOMBRES COMPLEXES

### ✎ Exercice 1 :

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$(1+i)^2; \quad (2+i)(2-i); \quad (1+i)(1-2i); \quad \frac{3-5i}{2-i}; \quad \frac{1-3i}{3-i}; \quad \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}.$$

### ✎ Exercice 2 :

Donner le conjugué des nombres complexes suivants :

$$3+5i; \quad 1+i; \quad i; \quad 1-2i; \quad -2+3i; \quad (1+i)(1-2i).$$

### ✎ Exercice 3 :

Calculer le module de :

$$3+4i; \quad \frac{1+i}{1-i}; \quad \frac{(2+3i)(1-5i)}{(4+i\sqrt{10})(12-i)}; \quad -\frac{5}{2}i; \quad (3+4i)(1-i).$$

### ✎ Exercice 4 :

Donner une écriture trigonométrique de :

$$1+i; \quad -1+i\sqrt{3}; \quad -\sqrt{3}+i; \quad \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad -1; \quad i; \\ -\frac{5}{2}i; \quad 2+2i; \quad -1-i\sqrt{3}; \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}; \quad (1+i)^2.$$

### ✎ Exercice 5 :

a) Soit  $u = -3 + 3i$ . Donner une écriture trigonométrique de  $u$ .

b) Trouver  $z$  tel que  $u \cdot z = 6\sqrt{2} e^{i\frac{17\pi}{12}}$ . Donner une écriture algébrique de  $z$ .

c) En déduire les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)$  et de  $\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ .

**Exercice 6 :**

Donner une écriture trigonométrique de  $z = -\sqrt{3} + i$ , puis de  $z^5$ , de  $\frac{1}{z^3}$  et de

$$\frac{(1+i)^7}{(1-i\sqrt{3})^5}.$$

**Exercice 7 :**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations :

$$z^2 + z + 1 = 0 ; \quad z^2 + 2z + 7 = 0 ; \quad z^2 = -7 + 24i ; \quad z^2 = -3 - 4i$$

$$z^2 + 4z + 1 + i(3z + 5) = 0 ; \quad z^2 - 2(2 + i)z + 6 + 8i = 0 .$$

**Exercice 8 :**

On cherche à résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$  lorsque

$$P(z) = z^3 + (1 - 4i)z^2 - (3 + 9i)z - 2i - 14$$

a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 + (1 - 2i)z + (1 - 7i) = 0$ .

b) Montrer que l'équation  $P(z) = 0$  possède une solution imaginaire pure .

Trouver les nombres complexes b et c tels que l'on ait :

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + bz + c)$$

**Exercice 9 :**

a) Donner sous forme trigonométrique les deux racines cubiques de l'unité autre que 1 .

b) On pose  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  ; établir que les racines cubiques de l'unité sont : 1, j, j<sup>2</sup>.

c) Montrer que  $j^2 = \bar{j}$  . Mettre alors j et j<sup>2</sup> sous forme algébrique .

d) Etablir l'égalité suivante :  $1 + j + j^2 = 0$  .

e) Représenter géométriquement les racines cubiques de l'unité.

**Exercice 10 :**

a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^5 = 1 - i$  .

b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $iz^6 - (1+i)z^3 + 1 = 0$

- c) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $2z + iz = 3$ .
- d) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $-2z^2 + 6z - 5 = 0$ .
- e) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(z^2 + 2)(z^2 - 4z + 4) = 0$ .
- f) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 = -7 - 24i$  ; en déduire les solutions de  $z^4 = -7 - 24i$ .
- g) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z + \bar{z} = |z|$
- h) Résoudre le système d'inconnues complexes  $z$  et  $z'$  : 
$$\begin{cases} 3z + z' = 1 - 7i \\ iz + 2z' = 11i \end{cases}$$

**Exercice 11:**

- 1) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes  $1 - i$  et  $-2 - 2i$ .
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 = 1 - i$ .
- 3) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 = -2 - 2i$ .
- 4) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 + (1 + 3i)z - 4 = 0$ .
- 5) On considère dans  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme  $P$  défini par  $P(X) = X^6 + (1 + 3i)X^3 - 4$ .  
Déduire de ce qui précède les solutions complexes de l'équation  $P(X) = 0$ .

**Exercice 12:**

Soit  $P(z) = (z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2$ .

- 1) L'équation  $P(z) = 0$  peut-elle avoir une solution réelle ?
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 + 3(1 + i)z + 5i = 0$  [1].
- 3) Montrer que si  $z$  est solution de l'équation [1],  $\bar{z}$  est solution de l'équation  $z^2 + 3(1 - i)z - 5i = 0$  et résoudre l'équation  $z^2 + 3(1 - i)z - 5i = 0$
- 4) Montrer que :  $[z^2 + 3(1 + i)z + 5i][z^2 + 3(1 - i)z - 5i] = P(z)$  et résoudre l'équation  $P(z) = 0$ .

**Exercice 13:**

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 = 1$ .
- 2) Donner une écriture trigonométrique de  $4\sqrt{2}(-1 + i)$  puis résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$ .
- 3) Ecrire les solutions de cette équation à l'aide du nombre complexe  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

- 4) Dédurre des questions précédentes les valeurs exactes de  $\cos \frac{19\pi}{12}$  et  $\sin \frac{19\pi}{12}$ .

**Exercice 14 :**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

a)  $z^2 + 2z + 2i + 1 = 0$       b)  $z\bar{z} - 5(z - \bar{z}) = 5 - 10i$       c)  $z^2 - \bar{z} + 2 = 0$

**Exercice 15:**

Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que :

a)  $|z - 2 + 3i| = 5$   
 b)  $|\bar{z} + 2i| = 3$   
 c)  $|z - 2i| = |z + 1 - 4i|$   
 d)  $\arg(z - 1 + 2i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

**Exercice 16 :**

Soient A, B et C les points d'affixes respectives  $a = -1 + i$ ,  $b = 2i$  et  $c = 2 - 2i$ .

- a) Calculer le nombre complexe  $z = \frac{b - a}{c - a}$   
 b) En déduire la nature du triangle ABC.

**Exercice 17 :**

Pour tout complexe z différent de i, on définit

$$Z = \frac{z+1}{z-i}.$$

On pose  $z = x + iy$  et  $Z = X + iY$  où x, y, X et Y sont réels.

- a) Exprimer X et Y en fonction de x et y.  
 b) Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit réel.  
 c) Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

**Exercice 18 :**

Soient z et z' des complexes de module 1.

Montrer que si, de plus, z et z' sont différents alors  $\frac{z \cdot z' - 1}{z' - z}$  est réel.

**Exercice 19:**

On pose  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

- a) Déterminer une écriture exponentielle de j.

b) Soient A, B et C trois points deux à deux distincts non alignés d'affixes respectives a, b et c. Démontrer que ABC est équilatéral si et seulement si  $a + bj + cj^2 = 0$

### Exercice 20 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Pour tout complexe  $z \neq 1$ , on

pose :  $z' = \frac{2+\bar{z}}{1-z}$ , avec  $z = x+iy$ ;  $x$  et  $y$  des réels.

En posant  $z' = x' + iy'$ ;  $x'$  et  $y'$  des réels, exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que :

- $z'$  soit réel.
- $z'$  soit imaginaire pur.

### Exercice 21 :

On pose  $z_1 = 1+i$  et  $z_2 = \sqrt{3}-i$ .

Ecrire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme trigonométrique.

Soit  $z = \frac{z_1}{z_2}$ .

Mettre  $z$  sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$ .

### Exercice 22 :

Soit  $w = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

- Calculer le module et un argument de  $w^2$ .
- En déduire l'écriture trigonométrique de  $w$ .

Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$ .

### Exercice 23 :

Soit le polynôme  $P(z) = z^3 + 3(2-i)z^2 + 3(3-5i)z - 6 - 22i$ .

- Montrer que  $P$  admet une racine imaginaire pure  $z_0$  que l'on précisera.
- Déterminer les deux autres racines de  $P$  en désignant par  $z_1$  celle dont la partie imaginaire est positive et l'autre par  $z_2$ .
- Dans le plan complexe rapporté à un repère ortho normal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A(z_0)$ ;  $B(z_1)$  et  $C(z_2)$ .
  - Déterminer la nature du triangle ABC.
  - Déterminer l'affixe du point I milieu de [AC] et celle du point D symétrique de B par rapport à I.
  - Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

**Exercice 24 :**

On donne  $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$  et  $z_2 = 1 - i$ .

- 1) Ecrire sous forme trigonométrique  $z_1$ ,  $z_2$  et  $\frac{z_1}{z_2}$ .
- 2) Ecrire  $\frac{z_1}{z_2}$  sous forme algébrique.
- 3) En déduire valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .
- 4) Résoudre dans  $]-\pi; \pi[$  l'équation  $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x - (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x = 2$

**Exercice 25 :**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

1. Placer les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $z_A = -1 - 5i$ ,  $z_B = 4 - 3i$ ,  $z_C = 3 + 3i$  et  $z_D = -2 + i$ .
2. Quelle est la nature du quadrilatère  $ABCD$ .
3. Déterminer l'affixe du point  $C'$ , symétrique du point  $C$  par rapport à  $D$ .
4. Déterminer l'affixe du point  $A'$  vérifiant  $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$ .
5. Quelle est la nature du quadrilatère  $A'BC'D$ .

**Exercice 26 :**

Le plan complexe  $(P)$  est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points  $A, B$  et  $M$  d'affixes respectives  $1$ ;  $2i$  et  $z$ .

Soit  $z' = \frac{z - 2i}{z - 1}$ .

1. Donner une signification géométrique de  $|z'|$  et  $\arg(z')$ .
2. Préciser la nature puis construire :
  - a) L'ensemble  $(E_1)$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z'| = 1$ .
  - b) L'ensemble  $(E_2)$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $z'$  soit un réel positif.
  - c) L'ensemble  $(E_3)$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $z'$  soit un imaginaire pur.

**Exercice 27 :**

1. Déterminer la forme trigonométrique et la forme algébrique de  $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$

En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

2. Déterminer et construire  $E_1 = \{ M(z) ; (iz - 2)(\overline{z} - 1) \text{ soit un réel} \}$

3. Déterminer et construire  $E_2 = \{ M(z) ; \arg[(iz - 2)(\overline{z} - 1)] = \frac{\pi}{2} \}$

**Exercice 28:**

On considère le polynôme  $P$  de la variable complexe  $z$ , définie par :

$$P(z) = z^3 + iz^2 - 3z + 5i.$$

1. Calculer  $P(i)$ , puis déterminer toutes les racines de  $P(z)$ . On notera  $z_1$  la racine dont la partie réelle est négative, et  $z_2$  l'autre racine.
2. a- Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe  $\frac{z_1 - i}{z_2 - i}$   
b- Dans le plan complexe de repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  on désigne par  $A, B, C$  les images respectives de  $i, z_1, z_2$ .
3. Dédurre de la question précédente, la nature du triangle  $ABC$ .

**Exercice 29 :**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthogonal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ; unité graphique 2 cm.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue  $z$  suivante :

$$z^3 - (2 + 2i)z^2 + (2 + 4i)z - 4i = 0$$

Résolution de l'équation (E).

1. a) Montrer que  $2i$  est solution de (E).  
b) Déterminer les nombres réels  $a, b, c$  tels que :  
$$z^3 - (2 + 2i)z^2 + (2 + 4i)z - 4i = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$$
  
c) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.
2. On appelle A et B les points d'affixes respectives  $z_A = 1 + i$  et  $z_B = 2i$ .

A tout complexe  $z$  différent de  $z_A$ , on associe le complexe :  $z' = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}$ .

Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que  $z'$  soit imaginaire pur.

- a) Montrer que  $B \in (E)$ .
  - b) Déterminer et construire l'ensemble (E).
3. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que  $|z| = 1$ . Déterminer et construire (F).
  4. Soit R la rotation de centre  $\Omega\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Calculer l'affixe du point B', image de B par R et l'affixe du point I', image par R du point  $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ .
  5. Quelles sont les images de (E) et (F) par R ?

**Exercice 30 :**

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E): iz^3 + (1+i\sqrt{3})z^2 + (\sqrt{3}-1)z + i = 0.$$

1. a) Montrer que  $(E)$  admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.  
 b) En déduire les autres solutions de  $(E)$ . On notera  $z_1$  la solution dont la partie réelle est strictement positive.
2. Soit  $Z = z_1 - 1$   
 a) Mettre  $Z$  sous forme trigonométrique.  
 b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ .  
 c) En déduire les valeurs de  $\cos \frac{11\pi}{12}$  et  $\sin \frac{11\pi}{12}$ .

**Exercice 31 :**

Le plan complexe  $\mathbf{P}$  est rapporté à un repère direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , ayant comme unité graphique  $3cm$ .

Les nombres complexes  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ , et  $z_6$  que l'on va calculer dans cet exercice seront tous exprimés sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ .
2. On pose  $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$  et  $z_2 = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$ . Exprimer  $z_1$  et  $z_2$  sous forme exponentielle et placer les points  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$  dans le plan  $\mathbf{P}$ .
3. Soit  $r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ . Calculer l'affixe  $z_3$  du point  $M_3 = r(M_2)$ . Placer  $M_3$  sur la figure précédente.
4. Soit  $t$  la translation dont le vecteur  $\vec{w}$  a pour affixe  $-\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ .

Calculer l'affixe  $z_4$  du point  $M_4 = t(M_2)$ . Placer  $M_4$  sur la figure.

5. Soient  $z_5 = \frac{i}{2}(1+i\sqrt{3})$  et  $z_6 = \frac{2}{i-\sqrt{3}}$

Exprimer  $z_5$  et  $z_6$  sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

Placer les points  $M_5$  et  $M_6$  d'affixes respectives  $z_5$  et  $z_6$  sur la figure.

6. Calculer  $z_k^6$  pour  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
7. Ecrire  $z^6 + 1$  sous forme d'un produit de trois polynômes du second degré à coefficients réels. Justifier cette écriture.

**Exercice 32 :**

Soit  $\theta$  un paramètre réel appartenant à l'intervalle  $[0; \pi]$ .

$$z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + (5 + 4\cos\theta) = 0.$$

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  cette équation, on notera  $z_1$  et  $z_2$  les solutions.
2. Montrer que les points images des solutions de cette équation appartiennent au cercle de centre  $I(1)$  et de rayon 2.

**Exercice 33:**

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E) : z^4 + (1+a)z^2 + b = 0$ , avec  $a \in \mathbb{C}$  et  $b \in \mathbb{C}$ .

On pose  $a = \cos\theta + i\sin\theta$  et  $b = 4$  avec  $\theta \in [0; \pi]$ .

1. Pour quelles valeurs de  $\theta$  l'équation  $(E)$  a-t-elle ses coefficients réels ?
2. Résoudre l'équation  $(E)$  pour  $\theta = \pi$ .
3. Soit  $a = b = i$ . Résoudre l'équation  $(E)$  dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 34 :**

1. Déterminer les complexes solutions de l'équation  $z^4 = 1$ .
2. Déterminer sous forme trigonométrique les solutions de l'équation  $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$
3. Soit  $a = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}i$

Vérifier que  $a^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$ . En déduire sous forme algébrique les résultats de 2).

4. Des questions 2) et 3) déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{11\pi}{12}$  et  $\sin \frac{11\pi}{12}$ .

**Exercice 35 :**

Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 4i = 0$$

1°) a) Montrer que  $(E)$  admet une solution imaginaire pure et la déterminer.

b) Montrer que  $1 + 2i$  et  $-2 + 3i$  sont solutions de  $(E)$ .

c) Donner l'ensemble des solutions de  $(E)$ .

2°) Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , soit les points A, B et C d'affixes respectives  $1 + 2i$ ,  $3i$ ,  $-2 + 3i$ .

Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2,  $-2$ , et 1

Montrer que les vecteurs  $\vec{GA}$ ,  $\vec{GB}$  et  $\vec{GC}$  ont pour affixes respectives  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ,  $2i$  et  $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$  et que ces affixes sont, dans cet ordre, en progression géométrique ; déterminer la raison de cette suite.

**Exercice 36 :**

- 1) Linéaires les expressions suivantes :  $\cos^4 x$  ;  $\sin^3 2x$  et  $\cos^3 x \sin^3 x$   
 2)a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :  $z^2 - 4z \sin a + 4 = 0$  .  $a \in ]-\pi; \pi]$   
 b) Calculer le module et un argument de chacune des solutions.

**Exercice 37 :**

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$z^5 = 1; z^6 = -i; z^4 = -1; z^4 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\left( \frac{z+i}{z-i} \right)^5 = 1$$

- 2)a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :

$$z^2 + (2^{\theta+1} \cos \theta) z + 2^{2\theta} = 0 \text{ avec } \theta \in [0; 2\pi]$$

- b) Soient  $A(z_1)$  et  $B(z_2)$  ; déterminer  $\theta$  pour que le triangle AOB soit équilatéral.

**Exercice 38 :**

Le but de l'exercice est le calcul de  $\cos \frac{\pi}{5}$

- 1) Au nombre complexe  $z$ , on associe le nombre complexe :

$$Z = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$$

- a) Vérifier que si  $z \neq 1$ , alors  $Z = \frac{1-z^5}{1-z}$

- b) On pose  $z = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ . Calculer  $Z$  ; en déduire la valeur de :

$$S = 1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} \quad \text{Montrer que}$$

$$\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 4 \cos^2 \left( \frac{\pi}{5} \right) - 2 \text{ et que } \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} = -2 \cos \frac{\pi}{5}$$

- 2) Utiliser ces égalités et la valeur trouvée pour  $S$  en 1° b) pour calculer  $\cos \frac{\pi}{5}$

**Exercice 39 :**

Soit  $n$  un entier naturel et  $a$  un nombre complexe et l'équation

$$(E) : \left( \frac{z-i}{z+i} \right)^n = a$$

On désigne par  $P$ ,  $Q$  et  $M$  les points d'affixes respectives  $i$  ;  $-i$  et  $z$

- a) Démontrer si  $z$  est solution de (E) alors  $\frac{MQ}{MP} = \sqrt[n]{|a|}$

- b) Démontrer que si (E) admet au moins une solution réelle alors  $|a| = 1$

- c) En déduire que si (E) admet une solution réelle au moins alors toutes les solutions sont réelles.

**Exercice 40 :**

Linéariser  $\cos^3 \theta$  et  $\cos^3 \theta \sin^4 \theta$ . En déduire une primitive de  $f(x) = \cos^3 x$ .

**Exercice 41 :**

Soient  $\Omega(-1; 2)$  et  $A(0; -2)$

Dans chacun des cas donner l'écriture complexe de la transformation et déterminer l'image de A par la transformation

a) homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport -2

b) rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$

c) similitude directe de centre  $\Omega$ , d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et de rapport  $\frac{1}{2}$

**Exercice 42 :**

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation dont l'écriture complexe est :

a)  $z' = 4e^{i\frac{\pi}{3}}z + 4\sqrt{3} - 2i$

b)  $z' = -\frac{1}{2}z + 3 - 6i$

c)  $z' = e^{-i\frac{\pi}{6}}z + 1 - i$

d)  $z' = 5 - i + z$

**Exercice 43 :**

Le plan est rapporté à un repère complexes  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  unité graphique 4cm.

On donne les points A et B d'affixes respectives i et  $e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

1) Soit r la rotation de centre O et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  et C l'image de B par r

a) Déterminer une écriture complexe de r.

b) Montrer que l'affixe de C est  $e^{-i\frac{\pi}{6}}$

c) Ecrire  $z_B$  et  $z_C$  sous forme algébrique

d) Placer les points A, B et C.

2) Soit  $D = \text{bar} \{(A, 2); (B, -1); (C, 2)\}$

a) Déterminer l'affixe de D et placer D.

b) Montrer que A, B, C et D sont sur le même cercle

3) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2 et on appelle E l'image de D par h.

a) Déterminer une écriture complexe de h

b) Déterminer l'affixe de E et placer E.

4) Calculer  $\frac{Z_D - Z_C}{Z_E - Z_C}$

a) En déduire son module et un argument.

- b) Donner la nature du triangle CDE.  
 c) Déterminer les éléments caractéristiques de la rotation qui transforme le point D en E et qui laisse le point C invariant.

**Exercice 44 :**

1) a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 - 2z + 2 = 0$

On désigne par  $z_1$  la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive et par  $z_2$  l'autre solution de (E).

b) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives  $z_1$ ,  $z_2$  et  $\sqrt{3} + 1$ .

Placer les points A, B et C.

c) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

2) Résoudre l'équation différentielle :  $y'' - 2y' + 2y = 0$

3) On considère l'équation différentielle (1) :  $ay'' - by' + cy = 0$ , où a, b et c désignent trois paramètres, éléments de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Pour déterminer a, b et c, on lance trois fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note à chaque fois le chiffre marqué sur la face supérieure du dé.

Le premier numéro sorti donne la valeur de **a**, le deuxième donne la valeur de **b** et le troisième, celle de **c**.

a) Justifier que l'équation différentielle :  $ay'' - by' + cy = 0$  a pour solutions les fonctions de la forme  $\mapsto (A \cos x + B \sin x)e^x$ , où A et B sont des réels si et seulement si  $1+i$  est solution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation du second degré en  $z$ ,  $az^2 - bz + c = 0$

b) Calculer la probabilité de l'événement : les solutions de (1) sont les fonctions de la forme  $x \mapsto (A \cos x + B \sin x)e^x$ , A et B étant des constantes réelles.

**Exercice 45 :**

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite géométrique de premier terme  $U_0 = 4$  de raison  $\frac{1}{2}$

Soit  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite arithmétique de premier terme  $V_0 = \frac{\pi}{2}$  et de raison  $\frac{\pi}{4}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $z_n$  le nombre complexe de module  $U_n$  et dont un argument est  $V_n$ .

1) a) Exprimer  $U_n$  et  $V_n$  en fonction de n.

b) En déduire  $z_n$ .

2) Démontrer que  $(z_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}i$  et de premier terme

$$z_0 = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$$

3) Soit (P) le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  et  $M_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

a) Déterminer la nature de la transformation F qui au point  $M_n$  associe le point  $M_{n+1}$  d'affixe  $z_{n+1}$ .

b) Donner ses éléments caractéristiques.

4) pour tout entier naturel  $n$  on pose :  $Z_n = z_0 z_1 z_2 \dots z_n$ .

a) Exprimer en fonction de  $n$  un argument de  $z_n$ .

b) Démontrer que si  $n$  est impair alors  $z_n$  est réel.

#### ✎ Exercice 46 :

Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E): Z^3 + (1-8i)Z^2 - (23+4i)Z - 3+24i = 0$$

1) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.

b) Montrer que  $1+2i$  et  $-2+3i$  sont solutions de (E).

c) Donner l'ensemble des solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Soit les points A, B et C d'affixes respectives :  $1+2i$ ,  $3i$ ,  $-2+3i$ .

Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs : 2 ; -2 et 1.

a) Montrer que les vecteurs  $\vec{GA}$ ,  $\vec{GB}$  et  $\vec{GC}$  ont pour affixes respectives  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  ;  $2i$  et  $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$  et que ces affixes sont, dans cet ordre, en progression géométrique ; déterminer la raison de cette suite.

b) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A, en B et B en C.

Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

#### ✎ Exercice 47 :

$\mathbb{C}$  désigne l'ensemble des complexes.

Montrer que, dans  $\mathbb{C}$ , la somme des racines nièmes de l'unité est égale à zéro ( $n \geq 2$ ).

En utilisant les résultats du 1°) montrer que  $\cos \frac{\pi}{5}$  est une solution de l'équation :

$$4x^2 - 2x - 1 = 0. \text{ En déduire les valeurs exactes de : } \cos \frac{\pi}{5} ; \cos \frac{2\pi}{5} \text{ et } \cos \frac{\pi}{10}.$$

#### ✎ Exercice 48 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$  vers  $\mathbb{C}$  définie par :  $f(z) = \frac{2z-i}{z-2i}$

1. a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :  $f(z) = z$

b) Donner les  $Z_1$  et  $Z_2$  solutions et sous forme algébriques puis sous forme trigonométriques.

c) Calculer :  $Z_1^4 + Z_2^4$

2. Soit  $M(Z)$  un point de P

Soit  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M(Z)$  tels que  $f(z)$  soit un imaginaire pur. Donner une équation cartésienne de  $(\Gamma)$ . Tracer  $(\Gamma)$ .

3. Montrer que  $|z|=1$  équivaut à  $|f(z)|=1$ .

**Exercice 49 :**

Dans le plan complexe soit  $f$  la similitude qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par :  $z' = (1 - i)z + 2i$ .

1°) Déterminer le rapport, l'angle et le centre de  $f$ .

2°) soient  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$ , les formes algébriques des nombres complexes  $z$  et  $z'$ .

Exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et de  $y$ .

3°) Quelle est l'image par  $f$  de la droite d'équation  $x + 2y - 1 = 0$  ?

4°) Quelle est l'image par  $f$  du cercle  $(C)$  de centre le point d'affixe  $i$  et de rayon  $\sqrt{2}$  ?

**Exercice 50 :**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  tel que

$\vec{u} = \vec{v} = 2$  ; l'unité est le centimètre.

1) a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 = 1$ . Les solutions seront données sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

b) En remarquant que  $2^3 = 8$ , déduire de 1) a) les solutions de l'équation  $z^3 = 8$ .

2) On donne les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $-1 + i\sqrt{3}$ ,  $2$  et  $-1 - i\sqrt{3}$ .

a) Placer ces points dans le repère.

b) Calculer le module et un argument de  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

c) En déduire la nature du triangle  $ABC$ .

3) On considère  $f$ , la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$

d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que :  $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$ .

a) Déterminer la nature de  $f$  puis donner ses éléments géométriques caractéristiques.

b) Déterminer les affixes des points  $A'$  et  $C'$  images respectives des points  $A$  et  $C$  par  $f$ .

c) En déduire l'image de la droite  $(AC)$  par  $f$ .

**Exercice 51 :**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Déterminer la forme complexe de la

similitude  $S$  de centre  $I(1+i)$  de rapport  $2$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

Déterminer analytiquement, puis construire l'ensemble des points  $M$  tels que  $S(M)$  est un point de l'axe  $(O, \vec{u})$ .

**Exercice 52 :**

Soit la suite  $(z_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = (1+i)z_n + 2i \end{cases}$$

1. Calculer  $z_1$  et  $z_2$ .

2. On considère la suite  $(U_n)$  définie par :  $U_n = z_n + 2$

a) Montrer que :  $U_n = (2+i)(1+i)^n$

b) Exprimer  $z_n$  en fonction de  $n$ .

3. Soit  $A, B, M_n$  et  $M_{n+1}$  les points d'affixes respectives :  $i$  ;  $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$  ;  $z_n$  et  $z_{n+1}$ .

Démontrer que :  $\frac{AM_{n+1}}{BM_n} = \sqrt{2}$  et  $(\overrightarrow{BM_n}; \overrightarrow{AM_{n+1}}) = \frac{\pi}{4}$

### ✎ Exercice 53 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  d'unité graphique : 2 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :  $z^2 + 2\sqrt{2}z + 6 = 0$ .

On appelle  $z_B$  la solution de cette équation dont la partie imaginaire est positive.

2. On désigne par A le point d'affixe  $z_A = 2 + i\sqrt{2}$ .

a) Placer dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$ .

b) Montrer que les points A et B appartiennent au cercle  $(C)$  de centre O et de rayon  $\sqrt{6}$ .

3. Soient I, J et K les points d'affixes respectives  $z_I, z_J$  et  $z_K$  telles que :  $z_I = 2i$  ;

$z_J$  est le nombre complexe de module 2 et d'argument  $\frac{3\pi}{4}$  ;  $z_K = -z_J$

a. Donner la forme algébrique de  $z_J$ .

b. Placer les points I, J et K dans le plan complexe.

c. Quelle est la nature du triangle IJK ? Justifier.

d. Donner le rayon du cercle  $(C)$  et  $(C')$  circonscrit au triangle IJK.

4. Soit E l'ensemble des points M du plan dont l'affixe  $z$  vérifie la relation :  $2 < |z| < \sqrt{6}$ .

a. Tracer les cercles  $(C)$  et  $(C')$

b. Représenter l'ensemble E sur le graphique précédent à l'aide de hachures. Justifier.

### ✎ Exercice 54 :

Pour tout nombre complexe  $z$ , on définit :  $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$

1. Calculer  $P(2)$ . Déterminer une factorisation de  $P(z)$  par  $(z - 2)$ .

2. On appelle  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de l'équation autre que 2,  $z_1$  ayant une partie imaginaire positive. Vérifier que  $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$ . Déterminer le module et un argument de  $z_1$  et  $z_2$ .

a) Placer dans le plan muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  (unité graphique : 2cm), les points A d'affixe 2, B et C d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$ , et I milieu de  $[AB]$ .

b) Démontrer que le triangle OAB est isocèle.  
En déduire la mesure de l'angle  $(\vec{u}; \overrightarrow{OI})$ .

c) Calculer l'affixe  $z_I$  de I puis le module de  $z_I$ .

d) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de  $\cos \frac{3\pi}{8}$  et  $\sin \frac{3\pi}{8}$

**Exercice 55 :**

1°) a) Montrer que  $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $Z^3 = 1$ . On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

c) Dédire des questions précédentes les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation :

$z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$  (E). On remarquera que (E) est équivalente à  $\left(\frac{Z}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}\right)^3 = 1$ .

2°) a) Ecrire  $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$  sous forme trigonométrique.

b) En déduire les arguments des solutions de (E).

3°) Dédire des questions 1)c et 2)b les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

4°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère la transformation F qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$z' = \sqrt{2}(-1+i)z + (1+\sqrt{2})i + \sqrt{2}$ .

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de F.

b) Construire l'image B du point A d'affixe  $-1$ .

**Exercice 56 :**

1- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $(\sin^2 \alpha)z^2 + (\sin 2\alpha)z + 1 + \cos^2 \alpha = 0$  ;  $0 < \alpha < \pi$ .

On désigne par  $z'$  et  $z''$  les solutions obtenues avec  $\text{Im}(z') > 0$ .

2- Vérifier que  $z'^2 + z''^2$  est un réel indépendant de  $\alpha$ .

3- Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On désigne par M' et M'' les points d'affixes respectives  $z'$  et  $z''$ .

a) Déterminer  $\alpha$  tel que 
$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \\ M'M'' = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

b)  $\alpha$  étant le réel trouvé au 3-a), montrer que M' et M'' appartiennent à un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

**Exercice 57 :**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère l'application  $f$  du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $Z' = \frac{1}{2}iZ + \frac{1-3i}{2}$

1) Montrer que  $f$  est une similitude directe dont on précisera le centre  $\Omega$ , le rapport  $k$  et l'angle  $\theta$ .

2) Soit  $M_0$  le point d'affixe  $Z_0 = 1 + 4\sqrt{3} + 3i$

Pour tout entier naturel  $n$ , le point  $M_{n+1}$  est défini par  $M_{n+1} = f(M_n)$ . Calculer  $\Omega M_0$ .

3) a) En utilisant la première question, calculer  $\Omega M_n$  en fonction de  $n$ .

b) Placer le point  $M_0$  et construire les points  $M_1, M_2, M_3, M_4$

4) A partir de quel rang  $n_0$  a-t-on : Pour tout  $n \geq n_0$ ,  $M_n$  appartient au cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $r = 0,05$ ?

5) a) Calculer  $M_0 M_1$ .

b) Pour tout entier naturel  $n$ , on donne  $d_n = M_n M_{n+1}$

Montrer que  $(d_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) On note:  $l_n = d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_n$

Calculer  $l_n$  en fonction de  $n$  et en déduire la limite de  $l_n$  en  $+\infty$ .

### ✎ Exercice 58 :

Dans le plan complexe ; on donne les points  $A, B, A'$  et  $B'$  d'affixes respectives :  $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$  ;

$1+3i$  ;  $1-i$  et  $-3+4i$ .

1. Placer ces points dans le plan.

2. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe  $S$  telle que :

$$S(A) = A' \text{ et } S(B) = B'.$$

3. On note  $\Omega$  le centre de  $S$  ; placer  $\Omega$  dans le repère.

Soit  $(D)$  la droite d'équation :  $y = x + 1$ .

On note  $(D') = S(D)$ . Donner l'équation de  $(D')$  puis construire  $(D)$  et  $(D')$  dans le même repère.

Soit  $(C)$  le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $R = \sqrt{2}$ . Construire  $(C)$ .

Sans chercher l'équation cartésienne de  $(C') = S(C)$  ; donner le centre et le rayon du cercle  $(C')$ .

### ✎ Exercice 59 :

Soit  $u = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ . Calculer  $1 + u + u^2 + u^3 + u^4$ . Calculer  $u + u^4$ , puis  $u^2 + u^3$ .

En déduire la valeur de  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ .

### Exercice 60 :

On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , (u. g 2cm), l'application  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ , telle que } z' = \frac{2iz-1}{z-2+i}, \text{ avec } z \neq 2-i.$$

- 1) Trouver l'ensemble des points  $M'$  d'affixe  $z'$  tels que
  - a)  $z'$  soit réel.  $(E_1)$
  - b)  $z'$  soit imaginaire pur.  $(E_2)$
  - c)  $z'$  soit réel positif.  $(E_3)$
- 2) Représenter ces trois ensembles dans le même repère
- 3) Soit le point  $A$  d'affixe  $z_A = -\frac{1}{2}i$  et le point  $B$  d'affixe  $z_B = 2-i$ .
  - a) Donner une interprétation géométrique de  $|z'|$ .
  - b) En déduire l'ensemble des points  $M'$  d'affixe  $z'$  tels que  $|z'| = 2$

### Exercice 61 :

Dans le plan complexe rapporté par un repère orthonormé directe  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$  unité 2cm. Soit l'application  $f: M(z) \mapsto M'(z')$  telle que :

$$z' = \frac{2iz-4+2i}{z-3-i}, \text{ avec } z \neq 3+i.$$

1. Calculer l'affixe du point  $N'$  image par  $f$  du point  $N(1+i)$
2. Calculer l'affixe de  $R$  dont l'image par  $f$  est le point  $R'(1+i)$
3. On pose  $z = x + iy$ 
  - a) Calculer  $\text{Re}(z')$  et  $\text{Im}(z')$  en fonction de  $x$  et de  $y$ .
  - b) Déterminer ; puis construire l'ensemble  $(E_1)$  des points  $M(z)$  tels que  $z'$  soit réel.
  - c) Déterminer ; puis construire l'ensemble  $(E_2)$  des points  $M(z)$  tels que  $z'$  soit imaginaire pur.
  - d) Déterminer ; puis construire l'ensemble  $(E_3)$  des points  $M(z)$  tels que  $|z'| = 1$ .
4. Considérons les points  $A(-3-i)$  et  $B(-1-2i)$ .
  - a) Donner une interprétation géométrique de  $|z'|$  et  $\arg(z')$ .
  - b) Montrer que si  $M'$  appartient au cercle de centre  $O$  et de rayon  $R=2$  ; alors  $M$  appartient à une droite  $(D)$  que l'on précisera.
  - c) Comparer  $(D)$  et  $(E_3)$ .
5. Déterminer ; puis construire l'ensemble des points  $M(z)$  tels que :

$$\arg(z') = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ et}$$

$$\arg(z') = \pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}.$$

### Le Saviez – Vous ?

**Pascal**, en 1654 parle des probabilités comme « la géométrie du hasard, joignant la rigueur des démonstrations de la science à l'incertitude du hasard et conciliant ces choses en apparence contraire ».

## DENOMBREMENT

### ✎ Exercice 1 :

On jette 3 fois un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure.

1. Déterminer le nombre de résultats :
  - a) Comportant trois chiffres identiques
  - b) Comportant trois chiffres distincts
  - c) Comportant deux (et seulement deux) chiffres identiques
2. Pour lesquels la somme des chiffres obtenus est égale à 6.

### ✎ Exercice 2 :

5 artistes dont deux femmes doivent se succéder sur un podium.

1. De combien de façons différentes peut-on les faire passer
2. Déterminer le nombre de façon de faire passer sachant que :
  - a) Une femme est au premier passage.
  - b) Une femme est 1<sup>er</sup> passage et un homme au 2<sup>ième</sup>.
  - c) Deux femmes se succèdent sur le podium.

### ✎ Exercice 3 :

Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard (ces 5 cartes s'appellent une main).

- a) Quel est le nombre total de mains que l'on peut obtenir ?
- b) Combien de mains contiennent exactement 4 as ?
- c) Combien de mains contiennent exactement 3 as et 2 rois ?
- d) Combien de mains contiennent au moins 3 rois ?
- e) Combien de mains contiennent au moins un as ?

### ✎ Exercice 4 :

On dispose d'un damier carré de 4 lignes et 4 colonnes, et de 4 jetons indiscernables. Le jeu consiste à répartir les 4 jetons sur 4 cases différentes.

- 1) Combien y'a-t-il de dispositions possibles de ces 4 jetons ?
- 2) Combien y'a-t-il de dispositions où aucun des 4 jetons n'est placé sur une diagonale ?
- 3) Combien y'a-t-il de dispositions où trois jetons exactement sont placés sur une même diagonale ?

### ✎ Exercice 5 :

Le code antivol d'un autoradio est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffres pouvant prendre l'une des dix valeurs : 0, 1, 2, ..., 9

- 1) a) Quel est le nombre de codes possibles ?  
b) Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres distincts deux à deux ?

2) Après une coupure d'alimentation électrique, le propriétaire doit réintroduire le code pour pouvoir utiliser son autoradio. Il sait que les chiffres de son code sont : 2, 0, 0, 5 mais il a oublié l'ordre de ces chiffres.

a) Combien de codes différents peut-il composer avec ses quatre chiffres ?

b) Si le premier code introduit n'est pas le bon, le propriétaire doit attendre deux minutes avant de pouvoir tenter un second essai. Le délai d'attente entre second et le troisième est de quatre minutes, entre le troisième et le quatrième est de huit minutes... (Le délai d'attente double entre deux essais successifs)

Combien de codes le propriétaire peut-il introduire au maximum de 24h ?

### **Exercice 6 :**

Les numéros d'un réseau téléphonique sont tous formés de 7 chiffres choisis parmi les chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 .

Exemples de numéros théoriquement acceptés : 000 00 00 ; 961 52 87 ; 022 23 33 ; etc....

Calculer le cardinal des ensembles suivants :

$\Omega$  : la capacité théorique du réseau .

A : ensemble des numéros composés de 7 chiffres distincts .

B : ensemble des numéros composés de 7 chiffres identiques .

C : ensemble des numéros ne contenant aucun chiffre 0 .

D : ensemble des numéros contenant exactement un 0 .

E : ensemble des numéros contenant au moins un 0 .

F : ensemble des numéros contenant au plus un 0 .

G : ensemble des numéros contenant au moins deux 0 .

H : ensemble des numéros pairs, chaque numéro étant strictement inférieur à 7 000 000 .

I : ensemble des numéros commençant par un chiffre pair et finissant par un chiffre impair strictement inférieur à 7 .

### **Exercice 7 :**

Une classe de 30 élèves, 18 filles et 12 garçons, doit élire un comité comprenant un président, un trésorier et un secrétaire ( sachant qu'il n'y a ni cumul ni discrimination ) .

1°) Combien de comités peut-on ainsi constituer ?

2°) Quel est le nombre de comités comprenant l'élève X ?

3°) Quel est le nombre de comités pour lesquels le président est une fille et le secrétaire un garçon ?

4°) Sachant que le président est un garçon, le secrétaire une fille, et que M.X ne veut pas faire partie du même comité que Melle Y, quel est le nombre de comités possibles ?

### **Exercice 8 :**

Soit le nombre 1234. On utilise les quatre chiffres de ce nombre et, en les permutant au hasard, on obtient un nombre de quatre chiffres. On dit qu'il y a coïncidence chaque fois qu'un chiffre retrouve sa place initiale. Ainsi, par exemple : si on compose le nombre 4213 il y a une coïncidence car le chiffre 2 a retrouvé sa place ; si on compose le nombre 1324 il y a deux coïncidences ; si on compose le nombre 1234 il y a quatre coïncidences, etc.

1°) Combien de nombres peut-on obtenir?

2°) a) Existe-t-il des nombres présentant exactement trois coïncidences ?

b) Combien de nombres présentent exactement deux coïncidences ?

3°) Dresser la liste des nombres qui présentent exactement une coïncidence.

En déduire combien de nombres ne présentent aucune coïncidence.

### **✎ Exercice 9 :**

On tire successivement 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, en remettant à chaque fois la carte tirée dans le jeu, après avoir noté la couleur de cette carte .

On obtient ainsi une suite ordonnée de 5 cartes, non nécessairement distinctes .

1°) Déénombrer tous les tirages possibles .

2°) Déénombrer les tirages composés de :

a) 5 cartes de même couleur ; b) 4 cœurs et un pique ; c) 2 couleurs, dont l'une revient quatre fois ; d) exactement 4 trèfles et un roi .

### **✎ Exercice 10 :**

D'un jeu de 32 cartes, on tire successivement une première carte, puis une deuxième et une troisième, sans remettre dans le jeu les cartes tirées.

1°) Déénombrer tous les tirages possibles.

2°) Déénombrer les tirages tels que :

- a) les trois cartes tirées soient des piques ;
- b) la 2e carte tirée soit un pique ;
- c) la 2e carte tirée soit un roi et la 3e un as ;
- d) la 2e carte tirée soit un roi et la 3e un pique ;
- e) les 1re et 3e cartes tirées soient des piques et la 2e un roi.

### **✎ Exercice 11 :**

On constitue une grille de « Loto Sportif » en cochant l'une des 3 cases

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | N | 2 |
|---|---|---|

pour chacun des 13 matches sélectionnés .

1°) Déénombrer toutes les grilles possibles.

2°) Une grille gagnante ayant été déterminée, dénombrer parmi toutes les grilles possibles, celles contenant n résultats justes pour  $n = 10$ ,  $n = 11$  et  $n = 12$  .

### **✎ Exercice 12 :**

Les lettres du mot TERMINALE sont inscrites en 9 plaques. On tire successivement et sans remise 3 plaques que l'on dispose devant soi. On obtient ainsi un mot de 3 lettres ayant un sens ou non

1. Déterminer le nombre de mots possibles.
2. Déterminer le nombre de mots constitués de 3 consonnes.
3. Déterminer le nombre de mots constitués de 3 voyelles.
4. Déterminer le nombre de mots constitués d'au moins une voyelle.

### **✎ Exercice 13 :**

Lors d'un recrutement, un chef d'entreprise doit choisir 4 personnes parmi 20 candidats ( 13 femmes et 7 hommes) .

1°) Déénombrer les choix possibles de ce recrutement.

2°) Déénombrer les choix de recrutement, si le chef d'entreprise désire embaucher :

- a) trois femmes et un homme ; b) deux femmes et deux hommes ; c) au moins une femme ;  
d) au moins une femme et au moins un homme.

### Exercice 14 :

Coumba et Amadou font partie d'une assemblée de 17 hommes et 12 femmes.

Cette assemblée doit choisir six de ses membres pour constituer un comité.

1°) Dénombrer les choix possibles pour constituer ce comité.

2°) Dénombrer les comités :

a) contenant Coumba et Amadou ; b) ne contenant ni Coumba ni Amadou ; c) contenant Coumba ou Amadou (de deux façons) .

3°) Dénombrer les comités :

a) contenant deux femmes et quatre hommes ; b) contenant au moins deux hommes ;  
c) contenant au plus deux femmes ; d) contenant au moins une femme et au moins un homme.

### Exercice 15 :

Au jeu de poker, chaque joueur dispose d'une main de 5 cartes, distribuées d'un jeu de 32 cartes (4 couleurs : trèfle, pique, cœur et carreau, et pour chaque couleur, 8 valeurs de l'as au sept) .

1°) Dénombrer les mains de 5 cartes possibles.

2°) Dénombrer les mains de 5 cartes contenant :

a) un carré (quatre cartes de même valeur) ; b) deux paires ; c) un full (trois cartes de même valeur et deux autres de même valeur ; par exemple : 3 rois et 2 as) ; d) exactement une paire (deux cartes de même valeur) ; e) un brelan (trois cartes de même valeur, sans full ni carré) ;  
f) une quinte (cinq cartes de même couleur, se suivant dans l'ordre des valeurs ; par exemple : 9, 10, valet, dame et roi de pique).

### Exercice 16 :

Au Loto, une grille simple est un choix de 6 numéros parmi  $\{1, 2, \dots, 48, 49\}$ .

1°) Quel est le nombre total de grilles que l'on peut jouer ?

2°) Une grille gagnante ayant été déterminée, calculer, parmi toutes les grilles possibles, le nombre d'entre elles comportant exactement  $n$  bons numéros pour  $n = 5$ ,  $n = 4$ , puis  $n = 3$  .

### Exercice 17 :

Dans un sac, se trouvent cinq jetons verts numérotés de 1 à 5 et quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4 .On tire simultanément trois jetons du sac .Combien y a-t-il de tirages :

- a) possibles ? b) ne contenant que des jetons verts ? c) ne contenant aucun jeton vert ?  
d) contenant au plus deux jetons verts ?

### Exercice 18 :

On a un jeu de 32 cartes . On en prend huit, ce qui constitue une main .Dénombrer les mains qui contiennent :

- a) Exactement un as b) Exactement deux as c) Aucun as d) Au moins un as.  
e) 2 cœurs et 3 piques f) 2 cœurs, 3 piques et un trèfle g) 2 cœurs et 1 as.

h) 2 cœurs et 2 dames .

### Exercice 19 :

Un marchand de timbres constitue des pochettes de quatre timbres qu'il tire au hasard d'un paquet contenant 10 timbres sénégalais, 20 timbres mauritaniens et 15 timbres gambiens .

De combien de façons peut-il constituer des pochettes :

- 1°) qui contiennent quatre timbres d'un même pays ?
- 2°) qui contiennent des timbres des trois pays ?
- 3°) qui contiennent des timbres de deux pays seulement ?

### Exercice 20 :

Un baol-baol présente en vrac un lot de 13 paires de chaussures . Les chaussures ne se différencient que par leurs pointures ou par le fait qu'elles sont soit du pied droit soit du pied gauche . Parmi les 13 paires, il y a 4 paires de la pointure 40, 6 paires de la pointure 41 et 3 paires de la pointure 42 .

Un client choisit au hasard 2 chaussures dans le tas des 26 chaussures .

- 1°) Combien y a-t-il de possibilités pour que les deux chaussures soient de pointures différentes ?
- 2°) Combien y a-t-il de possibilités pour que les deux chaussures soient de la même pointure ?
- 3°) Combien y a-t-il de possibilités pour que les deux chaussures soient du même pied ?
- 4°) Combien y a-t-il de possibilités pour que les deux chaussures soient de pieds différents ?

### Exercice 21 :

Un jury est composé de 7 membres tirés au sort parmi 12 hommes et 9 femmes .

- 1°) Combien de jurys peut-on former ayant 3 femmes et 4 hommes ?
- 2°) Combien de jurys peut-on former ayant au moins une femme ?
- 3°) Combien de jurys peut-on former sachant que Mademoiselle X refuse de siéger avec Monsieur Y ?

### Exercice 22 :

Onze livres sont à ranger sur sept étagères vides . Dénombrer les rangements tels que :

- a) au moins deux étagères soient vides ; b) exactement deux étagères soient vides ;
  - b) exactement trois étagères contiennent deux livres ; d) au plus deux étagères soient vides .
- (Attention : exercice difficile.

### **Le Saviez – Vous ?**

Pour **Condorcet** et pour **Laplace**, le calcul des probabilités doit s'appliquer aux sciences morales et politiques.

Citons Laplace (1749-1827) : « Ce calcul délicat s'étend aux questions les plus importantes de la vie qui ne sont, en effet, pour la plupart, des questions de probabilités ».

## PROBABILITES

### Exercice 1 :

On lance 3 fois une pièce de monnaie bien équilibré

- 1) Quelle est la probabilité des évènements suivants :  
A « Obtenir « FPF » »  
B « Obtenir exactement deux faces »  
C « Obtenir au moins une pile »
- 2) On lance 5 fois une pièce de monnaie. Calculer la probabilité d'obtenir 3 fois pile.
- 3) On lance 6 fois un dé parfait numéroté de 1 à 6. Calculer la probabilité d'obtenir 4 fois le numéro 5.

### Exercice 2 :

Tom et Dierry jouent à un jeu : on lance une pièce et un dé, avec la pièce si on fait 'pile' on gagne un 750 F, avec le dé si on fait un 6 on gagne 1500 F, un autre chiffre pair 750 F

- 1) Quelle est la probabilité de gagner 2250 F (exactement)?
- 2) on sait que la pièce est tombée côté 'pile', quelle est probabilité de gagner 750 F (exactement) ?
- 3) Quelle probabilité de tomber sur 'face' et d'obtenir 750 F (exactement) ?
- 4) Quelle probabilité d'obtenir 750 (exactement) ?
- 5) Quelle probabilité de gagner de l'argent ?

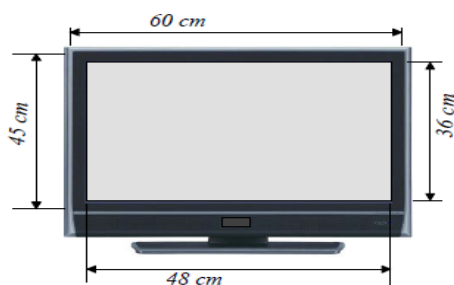
### Exercice 3 :

Marie a apporté un dé « pipé » dans ses valises !! Autrement dit les sorties ne sont pas équiprobables !!!

En fait si on note  $p_i$  la probabilité de sortir un  $i$  on a :  $p_6 = 3 p_1$  ;  $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0,1$   
Quelle est la probabilité de tirer un chiffre pair ?

### Exercice 4 :

Un écran LCD de forme rectangulaire a pour dimensions 60 cm × 45 cm. La partie principale de l'écran est elle-même représentée par un rectangle de dimensions 48 cm × 36 cm. Sachant qu'un pixel de l'écran est défectueux, détermine la probabilité de l'événement A défini par : « le pixel défectueux se trouve sur la partie principale de l'écran ».



**Exercice 5 :**

Bineta et Modou utilisent un dé truqué à six faces.

Le tableau suivant donne les probabilités d'apparition des faces.

| Numéro      | 1   | 2    | 3    | 4    | 5 | 6 |
|-------------|-----|------|------|------|---|---|
| probabilité | 0,4 | 0,15 | 0,15 | 0,05 | a | b |

- 1) Calculer a et b sachant que l'apparition du numéro 5 est quatre fois plus probable que celle du 6
- 2) Les enfants lancent le dé.
  - a) quelle est la probabilité de voir apparaître un numéro pair ? un numéro impair ?
  - b) Quelle est la probabilité que ce soit le numéro 1 sachant qu'il a obtenu un numéro impair ? (réponse à 0,01 près)
- 3) On considère les événements A : « numéro pair », B : « multiple de 3 » et C : « inférieur ou égal à 3 ». B est-il indépendant de A ? B est-il indépendant de C ?
- 4) Reprendre la question 3) si le dé n'est pas truqué.

**Exercice 6 :**

Dans une certaine population de 10000 personnes, il y a 45% de fumeurs et 35% de personnes atteintes de bronchite. De plus, 65% des bronchiteux sont fumeurs.

1. Représenter cette situation par un tableau
2. On prélève une personne au hasard dans la population. Toutes ont la même probabilité d'être choisies. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
  - E1 : « c'est un fumeur bronchiteux »
  - E2 : « c'est un bronchiteux non fumeur »
  - E3 : « c'est une personne qui n'est ni fumeur ni bronchiteux »
3. On prélève une personne au hasard parmi les fumeurs. Calculer la probabilité de l'événement « c'est un bronchiteux »

**Exercice 7 :**

Un sac contient 6 jetons qui portent les lettres A, B, C, D, E et F. On tire au hasard un jeton que l'on remet dans le sac puis un second jeton. On note les lettres obtenues.

- a) À l'aide d'un tableau, représenter l'ensemble E de toutes les issues.
- b) Définir une loi de probabilité sur E pour modéliser l'expérience.
- c) Déterminer la probabilité qu'il y ait deux voyelles lors du tirage.

**Exercice 8 :**

Une urne contient trois boules bleues B1, B2 et B3 et deux boules blanches W1 et W2.

On tire au hasard deux boules successivement, en remettant la première boule dans l'urne avant de procéder au second tirage .

- a) Représenter dans un tableau tous les tirages possibles.
- b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules bleues ?
- c) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche et une boule bleue ?
- d) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?
- e) Quelle est la somme des trois probabilités obtenues ?

### Exercice 9 :

Dans une classe de 33 élèves, est-il raisonnable de parier sur le fait que deux élèves au moins fêtent leur anniversaire le même jour de l'année ?

### Exercice 10 :

Dans un groupe de 20 personnes, 10 personnes s'intéressent à la pêche, 8 à la lecture, et 3 s'intéressent à la pêche et à la lecture.

On choisit une personne au hasard dans le groupe.

a) Calculer la probabilité qu'elle s'intéresse à la pêche ou à la lecture.

b) Calculer la probabilité qu'elle s'intéresse ni à la pêche, ni à la lecture.

### Exercice 11 :

Omar lance 2 dés à 6 faces simultanément. Soit  $X$  la variable aléatoire représentant la somme des chiffres obtenus sur les deux dés.

1) Déterminer les valeurs possibles de  $X$ .

2) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

3) Calculer l'espérance de  $X$ .

4) Calculer l'écart-type de  $X$ . En donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.

5) Calculer  $p(X > 6)$  et  $p(X = 12)$ .

### Exercice 12 :

Une épreuve consiste à tirer une boule d'un sac contenant 5 boules numérotées de 0 à 4. On note  $p_n$  la probabilité de tirer le numéro  $n$ . Les réels  $p_n$  sont les 5 premiers termes d'une

suite arithmétique de raison  $\frac{1}{20}$

1. Calculer  $p_3$  et  $p_4$ . (On donne les résultats sous forme décimales)

2. Soit  $X$  la variable aléatoire qui prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 de probabilités respectives  $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4$ . Calculer  $E(X)$  et  $\sigma_X$

3. On procède à 5 tirages successifs d'une boule avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois une boule de numéro impair ?

### Exercice 13 :

Johanna aime bien jouer aux fléchettes. Elle arrive toujours à atteindre la cible et la probabilité qu'elle atteigne une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone. On note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de points obtenus par Johanna.

1) Déterminer les valeurs possibles de  $X$ .

2) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

3) Calculer l'espérance de  $X$ .

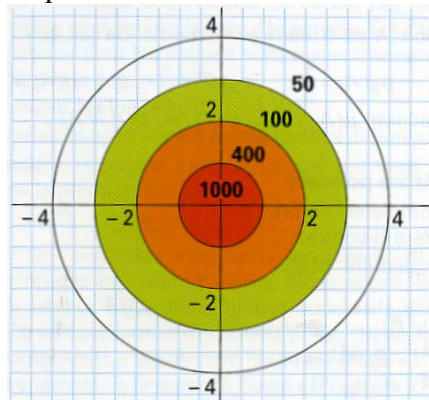
4) Calculer l'écart-type de  $X$ . Arrondir le résultat au dixième.

**Exercice 14 :**

Un tireur sur cible s'entraîne sur une cible circulaire comportant trois zones délimitées par des cercles concentriques, de rayons respectifs 10, 20 et 30 centimètres.

On admet que la probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est proportionnelle à l'aire de cette zone.

La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à :



a)  $5/9$  b)  $9/14$  c)  $4/7$  d)  $1/3$ .

**Exercice 15 :**

Jérémy lance 2 dés à 6 faces simultanément. Soit  $X$  la variable aléatoire représentant la somme des chiffres obtenus sur les deux dés.

- 1) Déterminer les valeurs possibles de  $X$ .
- 2) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
- 3) Calculer l'espérance de  $X$ .
- 4) Calculer l'écart-type de  $X$ . En donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.
- 5) Calculer  $p(X > 6)$  et  $p(X = 12)$ .

**Exercice 16 :**

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 500 F CFA et six pièces de 200 F CFA. Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie.

- 1) Calculer la probabilité de l'évènement  $A$  : "tirer trois pièces de 500 F".
- 2) Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500 F figurant parmi les trois pièces tirées.
  - a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
  - b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de  $X$ .
- 3) L'enfant répète cinq fois l'expérience en mettant chaque fois les trois pièces tirées dans le porte-monnaie. Quelle est la probabilité que l'évènement  $A$  se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

**Exercice 17 :**

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. Lorsqu'on tire au hasard un jeton de l'urne, on note  $p_i$  avec  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  la probabilité de tirer le jeton numéro  $i$ . On suppose que les nombres  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  et  $p_6$  sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison  $\frac{1}{30}$

1-a) Montrer que :  $p_1 = \frac{1}{12}$

b) En déduire  $p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$

2) On tire trois fois de suite et avec remise un jeton de cette urne, on désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de jetons portant un numéro pair.

a) Déterminer la loi de la probabilité de  $X$ .

b) Déterminer l'espérance mathématique de  $X$  puis son écart-type.

3) Un joueur tire simultanément 2 jetons et note  $S$  la valeur absolue de la différence des numéros que portent les 2 jetons tirés.

a) Déterminer la loi de probabilité de  $S$ .

b) On gagne à ce jeu lorsque  $S \geq 0$ . Déterminer la probabilité de gagner.

**Exercice 18 :**

On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On dit qu'on obtient un « double » si les deux faces supérieures des dés portent des chiffres identiques. A chaque lancer si le joueur fait un double il gagne 500 francs, sinon il perd 100 francs.

1. On lance les dés une fois. Calculer la probabilité de gagner 500 francs.

2. On lance les dés trois fois de suite. Soit  $X$  la variable aléatoire associée à la somme gagnée ou perdue après les trois lancers.

a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par  $X$  ?

b) Etablir la loi de probabilité de  $X$ .

3. On lance les dés  $n$  fois de suite.

a) Calculer en fonction de  $n$ , la probabilité, notée  $q_n$ , de ne jamais faire de double.

b) Calculer en fonction de  $n$ , la probabilité, notée  $p_n$  de faire au moins un double.

c) Quelle est la valeur minimale de  $n$  pour laquelle on a :  $p_n \geq 0,8$  ?

**Exercice 19 :**

Un service de secrétariat informatique comprend 10 agents dont 6 agents qualifiés et 4 stagiaires. Un agent qualifié a 92% de chance de bien faire la tâche qui lui est confiée ; la probabilité qu'un stagiaire fasse bien le travail qui lui est confié est 0,45.

Tout travail confié au service est exécuté le même jour, la distribution des tâches est sans discrimination.

**Partie A :**

On considère les événements :

$B$  : « Le travail est bien fait »

$S$  : « Le travail est bien par un stagiaire »

$Q$  : « Le travail est fait par un agent qualifié »

- 1) a) Expliciter les évènements  $B \cap S$  et  $B \cap \bar{S}$ .  
b) Calculer leurs probabilités.  
c) Dédire de la question précédente la probabilité qu'un travail confié au service soit bien fait.
- 2) Sachant un travail est mal fait, déterminer la probabilité qu'il ait été effectué par un agent qualifié.

### Partie B :

Durant 5 jours, le service reçoit chaque jour un client qui lui confie un travail. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de fois que la tâche a été bien faite durant ces 5 jours.

- 1) Préciser l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .
- 2) Déterminer la loi de probabilité  $P_x$  de  $X$  et la fonction de répartition  $F$  de la variable  $X$ .
- 3) Représenter graphiquement la fonction  $F$ .
- 4) Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$  de  $X$ .

### ✎ Exercice 20 :

On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On dit qu'on obtient un « double » si les deux faces supérieures des dés portent des chiffres identiques. A chaque lancer si le joueur fait un double il gagne 500 francs, sinon il perd 100 francs.

- 1) On lance les dés une fois. Calculer la probabilité de gagner 500 francs.
- 2) On lance les dés trois fois de suite. Soit  $X$  la variable aléatoire associée à la somme gagnée ou perdue après les trois lancers.
  - a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par  $X$  ?
  - b) Etablir la loi de probabilité de  $X$ .
- 3) On lance les dés  $n$  fois de suite.
  - a) Calculer en fonction de  $n$ , la probabilité, notée  $q_n$ , de ne jamais faire de double.
  - b) Calculer en fonction de  $n$ , la probabilité, notée  $p_n$  de faire au moins un double.
  - c) Quelle est la valeur minimale de  $n$  pour laquelle on a :  $p_n \geq 0,8$  ?

### ✎ Exercice 21 :

Un jeu de tir se déroule en plusieurs manches :

Un premier tir, le joueur doit atteindre la première cible sinon il est éliminé. Si le joueur a

atteint la  $n$ -ième cible, la probabilité qu'il atteigne la suivante est  $\frac{3}{4}$  ; si le joueur a raté la  $n$ -

ième cible, la probabilité qu'il atteigne la suivante est  $\frac{1}{10}$ .

On note  $p_n$  la probabilité de l'évènement  $C_n$  : « le joueur a atteint la  $n$ -ième cible.

- 1) Justifier que  $p_1 = 1$ .
- 2) Exprimer en fonction de  $p_n$  ;  $P(C_{n+1} \cap C_n)$  et  $P(C_{n+1} \cap \bar{C}_n)$ .

$$\text{En déduire que pour tout } n > 1 ; p_{n+1} = \frac{13}{20} p_n + \frac{1}{10} .$$

- 3) Déterminer le réel  $a$  tel que :  $a = \frac{13}{20}a + \frac{1}{10}$ .
- 4) Démontrer que la suite  $(U_n)$  :  $U_n = p_n - a$  est géométrique.  
En déduire  $p_n$  en fonction de  $n$ .
- 5) A partir de quelle manche, la probabilité que le tireur atteigne sa cible est-elle strictement inférieure à  $\frac{3}{10}$ ?

### ✎ Exercice 22 :

Dans un pays équatorial, les habitants présentent le plus fréquemment les symptômes de deux maladies  $M_1$  et  $M_2$ .

20 % des habitants souffrent de  $M_1$ , 16% de  $M_2$  et 8% de  $M_1$  et de  $M_2$ .

Un habitant du pays se présente à l'hôpital pour un bilan de santé.

Calculer la probabilité des événements :

$A$  : "il n'est atteint ni de la maladie  $M_1$ , ni de la maladie  $M_2$ ";

$B$  : " il souffre de la maladie  $M_1$ , mais pas de la maladie  $M_2$ ";

$C$  : "il souffre de la maladie  $M_1$ , mais pas de la maladie  $M_2$ ".

### ✎ Exercice 23 :

En sortie de fabrication, on a constaté qu'une pièce pouvait présenter deux sortes de défauts (et deux seulement).

Des tests effectués sur 1000 pièces ont donné les résultats suivants :

8% des pièces présentent le défaut  $D_1$  au moins ;

15% des pièces présentent le défaut  $D_2$  au moins ;

5% des pièces présentent à la fois les défauts  $D_1$  et  $D_2$ .

1. Reproduire, en le complétant, le tableau suivant :

| Nombre de pièces                  | Présentant le défaut $D_1$ | Ne présentant pas le défaut $D_1$ | Total |
|-----------------------------------|----------------------------|-----------------------------------|-------|
| Présentant le défaut $D_2$        |                            |                                   |       |
| Ne présentant pas le défaut $D_2$ |                            |                                   |       |
| Total                             |                            |                                   | 1000  |

2. On prélève une pièce au hasard parmi les 1000 pièces testées.
- Déterminer la probabilité de l'événement  $A$  : « La pièce choisie présente le défaut  $D_1$  ».
  - Déterminer la probabilité de l'événement  $B$  : « La pièce choisie présente le défaut  $D_2$  ».
  - Définir par une phrase l'événement  $A \cap B$ , intersection des événements  $A$  et  $B$ .
  - Déterminer la probabilité de l'événement  $A \cap B$ .
  - Déterminer la probabilité de l'événement  $A \cup B$ .
  - Déterminer la probabilité d'obtenir une pièce ne présentant qu'un seul défaut.
  - Déterminer la probabilité d'obtenir une pièce sans défaut.
3. Les pièces présentant les deux défauts sont mises directement au rebut. 90% des pièces qui ne présentent qu'un seul défaut sont acceptées après réparation.

Déterminer la probabilité d'obtenir une pièce qui soit acceptée, soit directement, soit après réparation.

### ✎ Exercice 24 :

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ . L'urne  $U_1$  contient 5 boules rouges et 3 boules blanches, l'urne  $U_2$  contient 6 boules rouges et 5 boules blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de  $U_1$  et on la remet dans  $U_2$ . On tire ensuite une boule de  $U_2$ .

On note  $R_1$  : l'évènement « on tire une boule rouge de  $U_1$  »  $R_2$  : l'évènement « on tire une boule rouge de  $U_2$  »

1. a) Déterminer  $P(R_1)$  et  $P(R_2 / R_1)$ .  
b) En déduire la probabilité d'avoir tiré une boule rouge de  $U_1$  et une boule rouge de  $U_2$ .
2. Calculer la probabilité d'avoir tiré une boule rouge et une boule blanche.

### ✎ Exercice 25 :

Dans un pays donné, la maladie du Sida touche cinq pour mille de sa population. Des études statistiques montrent que la probabilité pour un individu d'avoir un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8 et celle d'avoir un test négatif sachant qu'il n'est pas atteint par la maladie est 0,9.

On note  $T$  l'évènement « avoir un test positif à cette maladie »

$M$  : l'évènement « être malade »

$\bar{M}$  : est l'évènement contraire de  $M$

On rappelle que pour tous évènements  $A$  et  $B$  on a :

(\*)  $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$  et  $P_A(B)$  désigne la probabilité de  $A$  sachant  $B$

1) a) Réécrire la relation pour (\*)  $A = T$  et  $B = M$  puis pour  $A = \bar{M}$  et  $B = \bar{T}$ .

b) En déduire que :  $P(\bar{M} \cap T) = P(\bar{M})[1 - P_{\bar{M}}(\bar{T})]$

2) Calculer la probabilité pour qu'un individu ait un test positif à cette maladie.

3) a) Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test positif à cette maladie.

b) Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test négatif à cette maladie.

### ✎ Exercice 26 :

Une agence de voyages propose exclusivement trois destinations: la destination A, la destination G et la destination M. 50% des clients choisissent la destination A. 30% des clients choisissent la destination G.

20 % des clients choisissent la destination M.

Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction.

Le dépouillement des réponses à ce questionnaire permet de dire que 90% des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits, de même que 80% des clients ayant choisi la destination G. On prélève au hasard un questionnaire dans la pile des questionnaires recueillis.

On note les évènements :  $A$  : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination  $A$  »;

$G$  : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination  $G$  »;

$M$  : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination  $M$  » ;

$S$  : « le questionnaire est celui d'un client satisfait »;

$\bar{S}$  : « le questionnaire est celui d'un client insatisfait ».

4. Traduire les données de l'énoncé sur un arbre de probabilité.
5. Traduire par une phrase les évènements  $G \cap S$  et  $M \cap S$  puis calculer les probabilités  $P(G \cap S)$  et  $P(M \cap S)$ .
6. L'enquête montre que 72% des clients de l'agence sont satisfaits. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer  $P(A \cap S)$ . En déduire  $P_A(S)$ , probabilité de l'évènement  $S$  sachant que l'évènement  $A$  est réalisé.
7. Le questionnaire prélevé est celui d'un client qui est satisfait. Le client a omis de préciser quelle destination il avait choisie. Déterminer la probabilité qu'il ait choisi la destination  $G$ .
8. On prélève successivement au hasard trois questionnaires dans la pile d'enquêtes. On suppose que le nombre de questionnaires est suffisamment élevé pour considérer que les tirages successifs sont indépendants, Calculer la probabilité de l'évènement : « les trois questionnaires sont ceux de clients insatisfaits »  
(on donnera le résultat arrondi au millième).

### Exercice 27 :

Une enquête est réalisée auprès des clients d'une compagnie aérienne.

Elle révèle que 40% des clients utilisent la compagnie pour des raisons professionnelles, que 35% des clients utilisent la compagnie pour des raisons touristiques et le reste pour diverses autres raisons.

Sur l'ensemble de la clientèle, 40% choisit de voyager en première classe et le reste en seconde classe.

En fait, 60% des clients pour raisons professionnelles voyagent en première classe, alors que seulement 20% des clients pour raisons touristiques voyagent en première classe.

On choisit au hasard un client de cette compagnie. On suppose que chaque client à la même probabilité d'être choisi.

On note :  $A$  l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles »

$T$  l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons touristiques »

$D$  l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques »

$V$  l'évènement « le client interrogé voyage en première classe ».

Si  $E$  et  $F$  sont deux évènements, on note  $p(E)$  la probabilité que  $E$  soit réalisé, et  $p_F(E)$  la probabilité que  $E$  soit réalisé sachant que  $F$  est réalisé. D'autre part, on notera  $\bar{E}$  l'évènement contraire de  $E$ .

1. Déterminer :  $p(A)$ ,  $p(T)$ ,  $p(V)$ ,  $p_A(V)$  et  $p_T(V)$ .

2.a. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons professionnelles.

b. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons touristiques.

c. En déduire la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques.

3. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles

sachant qu'il a choisi la première classe.

4. Soit un entier  $n$  supérieur ou égal à 2. On choisit  $n$  « clients de cette compagnie aérienne d'une façon indépendante. On note  $p_n$  la probabilité qu'au moins un de ces clients voyage en seconde classe.

a. Prouver que :  $p_n = 1 - (0,4)^n$  .

b. Déterminer le plus petit entier  $n$  pour lequel  $p_n > 0,9999$  .

### **Exercice 28 :**

Un appareil de très haute technologie est installé dans un laboratoire industriel.

L'installateur assure une maintenance à l'issue de chaque semaine d'utilisation. Pour cette maintenance, soit il doit se déplacer (intervention directe sur l'appareil ), soit une assistance téléphonique suffit.

A l'issue d'une semaine de fonctionnement, trois situations sont possibles :

**Situation A :** l'appareil a fonctionné normalement ;

**Situation B :** l'appareil a eu des arrêts épisodiques ;

**Situation C :** l'appareil a eu des arrêts très fréquents.

Dans la situation A, l'installateur doit se déplacer 1 fois sur 2.

Dans la situation B, l'installateur doit se déplacer 7 fois sur 10.

L'installateur sait par expérience que, à l'issue de chaque semaine de fonctionnement, la probabilité d'être dans la situation A est 0,6 ; la probabilité d'être dans la situation B est 0,3 ; la probabilité qu'il doive se déplacer est 0,6.

**Partie A :** L'appareil a été utilisé pendant une semaine.

On considère les événements suivants :

A : « On se trouve dans la situation A »

B : « On se trouve dans la situation B »

C : « On se trouve dans la situation C »

S : « L'installateur se déplace »

T : « L'installateur effectue une assistance téléphonique »

On pourra construire un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure.

1. Calculer la probabilité de l'événement T.

2. Démontrer que, lorsqu'on se trouve dans la situation C, la probabilité que l'installateur se déplace est 0,9.

3. On sait que l'installateur s'est déplacé. Déterminer la probabilité que l'on ait été dans la situation B.

**Partie B :** L'installateur devra effectuer la maintenance trois semaines de suite.

On admet que les événements qui surviendront au cours de chacune de ces trois semaines sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité que l'installateur ait à effectuer exactement deux déplacements sur les trois semaines ?

a) Donner la loi de probabilité associée au nombre de déplacements à effectuer sur les trois semaines.

b) Montrer que l'espérance mathématique de cette loi vaut 1,8.

c) Pour l'installateur, un déplacement revient à 300 € (l'assistance téléphonique ne lui coûte rien).

L'installateur décide de proposer à son client un forfait pour trois semaines de maintenance.

2. Déterminer le montant minimum de ce forfait afin que l'installateur puisse espérer rentrer dans ses frais.

**Exercice 29 :**

Un site Internet offre la possibilité à des particuliers de vendre des objets aux enchères. Pour chaque objet, la durée des enchères dure une semaine. Si une annonce reçoit une enchère, alors la vente de l'objet est obligatoire à la fin des enchères et ce, même si le vendeur juge le prix de vente trop peu élevé. Sur ce site, une étude statistique a montré que  $\frac{3}{5}$  des annonces reçoivent une première enchère le lendemain de leur parution ; dans ce cas, 75% des vendeurs sont satisfaits du prix de vente final ;  $\frac{1}{3}$  des annonces reçoivent une première enchère au bout de trois jours et, dans ce cas, 57% des vendeurs sont satisfaits du prix de vente final de leur objet ; Les autres annonces ne reçoivent aucune enchère et le vendeur retire alors son objet de la vente.

On choisit au hasard une annonce mise en ligne sur le site. On note :

L : l'évènement « l'annonce reçoit une première enchère le lendemain de sa parution » ;

T : l'évènement « l'annonce reçoit une première enchère au bout de trois jours » ;

A : l'évènement « l'annonce ne reçoit aucune enchère » .

S : l'évènement «le vendeur est satisfait du prix de vente final de son objet » et  $\bar{S}$  son évènement contraire.

1. Traduire la situation par un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité que l'annonce ait reçu une première enchère le lendemain de sa parution et que le vendeur soit satisfait du prix de vente final.
3. Démontrer que la probabilité que le vendeur soit satisfait du prix de vente de son objet est 0,64.
4. Un objet est vendu à un prix qui satisfait son vendeur. Quelle est la probabilité que cet objet ait reçu une première enchère dès le lendemain de la parution de l'annonce
5. Marc a mis en vente le même jour trois jeux vidéo identiques sur ce site. On suppose que les déroulements de ces enchères sont indépendants les uns des autres. Calculer la probabilité qu'à la fin des enchères, Marc soit satisfait du prix de vente final d'au moins deux de ces jeux vidéo .

**Exercice 30 :**

Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60% des élèves sont des filles. De plus 40% des filles et 30% des garçons fument.

1. On choisit un élève au hasard. On note A l'évènement : « L'élève choisi fume », et  $p(A)$  la probabilité de cet évènement. On note F l'évènement : « L'élève choisi est une fille ». Quelle est la probabilité que :

- a) Cet élève soit un garçon ?
- b) Cet élève soit une fille qui fume ?
- c) Cet élève soit un garçon qui fume ?

2. Dédire des questions précédentes, en le justifiant, que  $P(A) = 0,36$ .

3. L'enquête permet de savoir que :

- Parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument ;
- Parmi les élèves non fumeurs, 65% ont des parents non fumeurs.

On note B l'évènement : « L'élève choisi a des parents fumeurs ». On notera  $p_D(C)$  la probabilité de l'évènement C sachant l'évènement D. Dans cette question, on pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a) Calculer les probabilités  $P(A \cap B)$  et  $P(\bar{A} \cap B)$  .En déduire  $p(B)$  .

b) Calculer  $p_B(A)$  , probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.

c) Calculer  $p_{\bar{B}}(A)$ , probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.

Quelle remarque amène la comparaison de ces deux résultats ?

4. On rappelle que, pour chaque élève choisi, la probabilité qu'il soit fumeur est égale à 0,36. On choisit quatre élèves de terminale au hasard. On admettra que la population d'élèves de terminale est suffisamment grande pour que le choix d'élèves au hasard soit assimilé à un tirage avec remise.

A l'aide d'un arbre pondéré, calculer la probabilité qu'aucun de ces quatre élèves ne soit fumeur ?

### ✎ Exercice 31 :

On considère les épreuves de courses du 100 m, 200 m ou 400 m lors des meetings internationaux d'athlétisme. On s'intéresse au nombre de faux départs survenant lors de ces épreuves. On rappelle qu'un faux départ est le démarrage d'un coureur avant le signal de départ donné par le starter, à la suite de quoi on doit donner un nouveau signal de départ. Les statistiques des années précédentes ont permis d'établir les données suivantes :

- la probabilité qu'il y ait un faux départ au premier signal est de 0,2
- quand il y a eu un faux départ au premier signal, la probabilité qu'il y ait de nouveau un faux départ au deuxième signal est de 0,05
- il n'y a jamais de faux départ au troisième signal. On admet que les départs sont indépendants les uns des autres.

1°) Représenter ces données par un arbre de probabilités.

On notera  $F_1$  : l'événement : " il y a un faux départ au premier signal "

$F_2$  : l'événement : " il y a un faux départ au deuxième signal "

2°) Montrer que la probabilité qu'il y ait exactement un faux départ est de 0,19

3°) Déterminer la loi de probabilités du nombre de faux départs donnés lors d'une épreuve quelconque.

Justifier l'affirmation suivante : " dans 20 % des épreuves, il y a au moins un faux départ "

4°) Lors d'un quart de finale au 200 m, on fait courir les athlètes en quatre séries indépendantes, soit quatre épreuves.

Calculer la probabilité qu'il y ait exactement trois séries sans faux départ au premier signal lors de ce quart de finale.

### ✎ Exercice 32 :

Un club de remise en forme propose, outre l'accès aux salles de musculation, des cours collectifs pour lesquels un supplément est demandé lors de l'inscription. Une fiche identifie chaque membre et son type d'abonnement : avec ou sans cours collectif. Une étude sur les profils des membres de ce club a montré que 40 % des membres sont des hommes. 65 % des membres sont inscrits aux cours collectifs.

Parmi les femmes, membres de ce club, seulement 5 % ne sont pas inscrites aux cours collectifs.

On choisit une fiche au hasard et on considère les événements suivants

$H$  : « la fiche est celle d'un homme »,  $F$  : « la fiche est celle d'une femme »,

$C$  : « la fiche est celle d'un membre inscrit à des cours collectifs ».

**Rappel de notation :** Si  $A$  et  $B$  sont deux événements donnés,  $p(A)$  désigne la probabilité de  $A$  et  $p_B(A)$  désigne la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$ .

1) Donner les probabilités suivantes :  $p(H)$ ,  $p_F(\bar{C})$ ,  $p_F(C)$  et les reporter sur un arbre pondéré modélisant la situation qui sera complété au cours de la résolution de l'exercice.

2) a) Déterminer  $p(F \cap C)$ .

b) Montrer que  $p(H \cap C) = 0,08$ .

c) On tire la fiche d'un homme, quelle est la probabilité que celui-ci soit inscrit aux cours collectifs ?

d) Compléter l'arbre pondéré de la question 1.

3) On choisit au hasard une fiche d'un membre non inscrit aux cours collectifs.

Quelle est la probabilité que ce soit celle d'un homme ? (donner la valeur décimale arrondie au centième).

4) Pour vérifier la bonne tenue de son fichier, la personne chargée de la gestion de ce club prélève une fiche au hasard et la remet après consultation. Elle procède ainsi trois fois de suite.

Quelle est la probabilité qu'au moins une des fiches soit celle d'un membre non inscrit aux cours collectifs ?

### ✎ Exercice 33 :

1. On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note  $P_i$  la probabilité d'apparition de la face numérotée  $i$  les  $p_i$  vérifient :

$$p_1 = p_2; p_3 = p_4 = 2p_1; p_5 = p_6 = 3p_1$$

a) Montrer que  $p_1 = \frac{1}{12}$

b) Montrer que la probabilité de l'événement  $A : \ll \text{obtenir 3 ou 6} \gg$  est égale à  $\frac{5}{12}$

2. Un jeu d'adresse consiste à lancer le dé décrit ci-dessus puis à lancer une flèche sur une cible fixe.

Si le joueur obtient 3 ou 6, il se place à 5m de la cible et lance la fléchette sur la cible ; à 5m, la probabilité d'atteindre la cible est alors  $\frac{3}{5}$

Si l'événement  $A$  n'est pas réalisé, il se place à 7m de la cible et lance la fléchette ; à 7m, la cible est atteinte avec une probabilité égale à  $\frac{2}{5}$ .

On note  $C$  l'événement :  $\ll \text{la cible est atteinte} \gg$ .

a) Déterminer  $p(C/A)$  et  $p(C/\bar{A})$ . En déduire que  $p(C) = \frac{29}{60}$ .

b) Déterminer  $p(A/C)$

3. le joueur dispose de 10 fléchettes qu'il doit lancer une à une, de façon indépendante, dans les mêmes conditions que précédemment définies. Calculer la probabilité pour qu'il atteigne la cible exactement 4 fois.

### ✎ Exercice 34 :

Un éleveur a dans son enclos 3 moutons et 5 chèvres. pour célébrer le retour de sa quatrième épouse de son pèlerinage, il décide d'abattre au hasard quatre de ses bêtes.

1°) — Soit  $X$  le nombre de moutons tués.

- a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$  et sa fonction de répartition.  
b) Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$  et l'écart-type de  $X$ .

2°) — On estime qu'un mouton donne environ 20kg de viande et une chèvre 15kg et qu'il faut au moins 65 kg de viande pour satisfaire les invités.

On note  $A$  l'événement « on a tué au moins 2 moutons » et  $B$  l'événement « il y a assez de viande ».

- a) Calculer  $P(A)$  et  $P(B)$   
b) Calculer  $P(B / A)$  ;  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ?

## STATISTIQUE A DEUX VARIABLES

### Exercice 1 :

Le tableau suivant recense, par clinique, le nombre de postes de personnel non médical en fonction du nombre de lits de la clinique :

| Clinique             | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_6$ | $C_7$ | $C_8$ | $C_9$ | $C_{10}$ | $C_{11}$ |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| Nombre de lits $X$   | 122   | 177   | 77    | 135   | 109   | 88    | 185   | 128   | 120   | 146      | 100      |
| Nombre de postes $Y$ | 205   | 249   | 114   | 178   | 127   | 122   | 242   | 170   | 164   | 188      | 172      |

1. Construire le nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$  correspondant à cette série statistique.  
Unités graphiques : en abscisse : 1 cm pour 10 lits en ordonnée : 1 cm pour 20 postes.
2. Calculer les coordonnées du point moyen  $G$  du nuage et le placer sur le graphique.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire  $r$ .
4. Déterminer une équation de la droite de régression  $D$  de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés. Tracer la droite  $D$  sur le graphique. (Marquer les points utilisés pour tracer  $D$ )
5. Une clinique possède 25 lits. En utilisant les résultats de la question 4, à combien peut-on estimer, par calcul, le nombre de postes de personnel non médical ?

### Exercice 2 :

Au cours d'une séance d'essais un pilote d'automobile doit, quand il reçoit un signal sonore dans son casque, arrêter le plus rapidement possible son véhicule.

Au moment du top sonore, on mesure la vitesse  $V_i$  en km/h de l'automobile puis la distance  $Y_i$  en mètre nécessaire pour arrêter le véhicule. On obtient les résultats suivants pour six essais:

|              |     |      |      |      |       |       |
|--------------|-----|------|------|------|-------|-------|
| $V_i$ (km/h) | 27  | 43   | 62   | 80   | 98    | 115   |
| $Y_i$ (m)    | 6,8 | 20,5 | 35,9 | 67,8 | 101,2 | 135,8 |

1. On pose pour les six valeurs de  $V_i$ ,  $X_i = V_i^2$  et on considère la série double  $(X_i ; Y_i)$   
Compléter le tableau suivant :

|       |  |  |  |  |  |  |
|-------|--|--|--|--|--|--|
| $X_i$ |  |  |  |  |  |  |
| $Y_i$ |  |  |  |  |  |  |

- Construire le nuage de point associé à cette série dans un repère orthogonal  $X_i$  en abscisse avec 1cm pour 1000 ;  $Y_i$  en ordonnée avec 1cm pour 10.
- Déterminer la droite de régression de y en x, tracer cette droite dans le repère précédent.
- En déduire la valeur estimée de x pour un distance d'arrêt de 180m puis la vitesse du véhicule.
- Quelle est la distance d'arrêt estimée pour une vitesse de 150km/h.

### Exercice 3 :

Le tableau suivant donne le relevé des 6 mois précédent d'une entreprise est la quantité, en tonne de la matière première utilisée ; et y est le chiffre d'affaire, en million de francs

| Numéro du mois | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6  |
|----------------|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| X              | 0,9 | 1,2 | 0,6 | 0,5 | 1,4 | 1  |
| y              | 37  | 40  | 33  | 33  | 41  | 35 |

- Représenter le nuage de points et le point moyen G.
- Calculer la variance de x et y.
- Calculer la covariance  $cov(x, y)$  de x et y.
- Calculer le coefficient de corrélation de x et y.
- Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et la représenter dans le même repère.
- Déduire une estimation du besoin en matière première pour un chiffre d'affaire de 49000000F.

### Exercice 4 :

Le tableau suivant donne la statistique portant sur les pourcentages x de femmes et y d'hommes atteints par le sida pendant les dix dernières années dans un pays :

|   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| X | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 | 17 | 20 |
| y | 2 | 3 | 4 | 6 | 5 | 8  | 10 | 11 | 14 | 16 |

- Représenter graphiquement les données dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- En portant en abscisse les valeurs de x et en ordonnées les valeurs de y, Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points.
- Déterminer par la méthode des moindres carrées, une équation de la droite d'ajustement de y en x.
- Si le pourcentage des femmes atteintes par le sida est de 25%, à quel pourcentage d'hommes atteints par le sida doit-on s'attendre ?

**Exercice 5 :**

$(X, Y)$  est une série statistique double. Soit  $(D_1)$  la droite de régression de  $X$ .  
Soit  $(D_2)$  la droite de régression de  $X$  en  $Y$ . On suppose que :

$$(D_1) : y = ax + b \text{ et } (D_2) : x = a'y + b'$$

- 1) Soit  $r$  le coefficient de corrélation linéaire entre  $X$  et  $Y$   
Etablir que :  $r^2 = aa'$ .
- 2) Dans une entreprise une étude simultanée portant sur deux caractères  $X$  et  $Y$  donnent les résultats suivants :
  - La droite de régression de  $Y$  en  $X$  a pour équation :  $2,4x - y = 0$ .
  - La droite de régression de  $X$  en  $Y$  a pour équation :  $3,5y - 9x + 24 = 0$ .  
Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre  $X$  en  $Y$ , sachant que leur covariance est positive.
- 3) Calculer la moyenne de chacun des caractères  $X$  en  $Y$ .

**Exercice 6 :**

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à en fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels ; les résultats sont donnés dans le tableau suivant où  $y_i$  représente le nombre d'exemplaires du produit que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente, exprimé en milliers de francs, est  $x_i$ .

|       |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$ | 60  | 80  | 10  | 120 | 140 | 160 | 180 | 200 |
| $y_i$ | 952 | 805 | 630 | 522 | 510 | 324 | 205 | 84  |

On appelle  $x$  la variable statistique dont les valeurs sont  $x_i$  et  $y$  celle dont les valeurs sont les  $y_i$ .

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de  $y$  et  $x$ . La valeur trouvée justifie-t-elle la recherche d'un ajustement linéaire ?
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$ .
3. Les frais de conception du produit se sont élevés à 28 millions de francs. Le prix de fabrication de chaque produit est de 25 000 francs.  
Déduire de la question précédente que le bénéfice  $z$  en fonction du prix de vente  $x$  est donné par l'égalité :  $z = -5,95x^2 + 1426,25x - 59937,5$  où  $x$  et  $z$  sont exprimés en milliers de francs.
4. Déterminer le prix de vente  $x$  permettant de réaliser un bénéfice maximum et calculer ce bénéfice.

N.B Prendre 2 chiffres après la virgule sans arrondir.

Rappel : **Bénéfice** = **Prix de vente** — **Prix de revient**.

**Exercice 7 :**

Une étude faite sur l'effectif  $X$  des familles d'une cité et la quantité  $Y$  de sucre en Kilogrammes consommée par mois dans chaque famille, a donné les résultats ci-dessous :

| X \ Y       | [ 5 ; 7 ] | [ 8 ; 10 ] | [ 11 ; 13 ] | [ 14 ; 18 ] |
|-------------|-----------|------------|-------------|-------------|
| [ 10 ; 15 ] | 1         | 3          | 0           | 0           |
| [ 5 ; 25 ]  | 5         | 9          | 8           | 3           |
| [ 25 ; 35 ] | 0         | 7          | 5           | 9           |

1. Calculer la moyenne et l'écart-type des séries marginales X et Y.
2. A chaque centre  $x_i$  de classe de la série de X on associe la moyenne  $z_i$  de Y sachant que  $X = x_i$
3. Dans la suite on considère la série  $(x, z)$  définie par le tableau suivant :

|       |       |      |       |      |
|-------|-------|------|-------|------|
| $x_i$ | 6     | 9    | 12    | 16   |
| $z_i$ | 18,75 | 22,5 | 23,85 | 27,5 |

- a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre  $x$  et  $z$ .  
Un ajustement affine est-il justifié ? (justifier la réponse).
- b) Déterminer une équation de la droite de régression de  $z$  en  $x$ .
- c) Estimer la quantité moyenne de sucre consommée par mois pour une famille d'effectif égal à 20.

### Exercice 8 :

63 candidats se sont présentés au baccalauréat comportant une épreuve de Maths et une épreuve de Sciences Physiques : SP.

Le tableau statistique suivant donne le nombre de candidats ayant obtenu un couple de notes donné.

| Note de Math \ Note de SP | 2 | 6  | 10 | 14 | 18 | Totaux |
|---------------------------|---|----|----|----|----|--------|
| 6                         | 4 | 2  | 1  | 0  | 0  | 7      |
| 8                         | 2 | 5  | 2  | 0  | 0  | 9      |
| 10                        | 1 | 6  | 16 | 5  | 1  | 29     |
| 12                        | 0 | 2  | 3  | 6  | 2  | 13     |
| 14                        | 0 | 1  | 0  | 1  | 3  | 5      |
| Totaux                    | 7 | 16 | 22 | 12 | 6  | 63     |

On appelle  $X = (x_i)$  la série statistique des notes de Sciences Physiques et  $Y = (y_i)$  la série statistique des notes de Mathématiques.

1. Déterminer pour chaque  $x_i$  la moyenne  $z_i$  de la série conditionnelle  $/z_i$ .
2. On considère la série double  $(x_i, z_i)$ 
  - b) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé construire le nuage de points  $M(x_i, z_i)$ .
  - c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre la série  $X = (x_i)$  et  $Z = (z_i)$ .
  - d) Déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire de  $Z$  et  $X$  par la méthode des moindres carrés.
  - e) Tracer cette droite.

**Exercice 9 :**

L'étude du poids  $P$  de la larve d'un insecte mesuré en fonction de l'âge  $x$  a conduit au tableau suivant :

|          |   |    |    |    |    |
|----------|---|----|----|----|----|
| X (mois) | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  |
| P (mg)   | 7 | 13 | 25 | 47 | 88 |

- 1°) On pose  $y = \ln P$  où  $\ln$  désigne le logarithme népérien.
  - a) Calculer les différentes valeurs prises par  $y$  à  $10^{-5}$  près.
  - b) Tracer le nuage de points représentant les couples  $(X, Y)$  dans un système d'axes orthonormés (unité 2 cm) : y placer le barycentre  $G$  du nuage.
- 2°) Déterminer une équation de la droite de régression de  $Y$  en  $X$ .
- 3°) Si l'évolution se poursuit dans les mêmes conditions, quel sera le poids de la larve au bout de six mois ?

**Exercice 10 :**

Une étude sur le nombre d'années d'exercices  $X$ , des ouvriers d'une entreprise et leur salaire mensuel  $Y$  en millier de francs, a donné les résultats indiqués dans le tableau ci-dessous avec des données manquantes désignées par  $a$  et  $b$ .

| $X \backslash Y$ | 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 |
|------------------|---|---|----|----|----|----|
| 75               | A | 5 | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 125              | 0 | 7 | 1  | 0  | 2  | 0  |
| 175              | 2 | 0 | 9  | 8  | 15 | 4  |
| 225              | 0 | 1 | 0  | 3  | B  | 1  |

1. Déterminer  $a$  et  $b$  pour que la moyenne de la série marginale de  $X$  soit égale à  $\frac{596}{59}$  et celle de la série marginale de  $Y$  soit  $\frac{8450}{59}$ .

Dans la suite, On suppose que  $a = 40$  et  $b = 20$ . A chaque valeur  $X_i$  de  $X$  on associe la moyenne  $m_i$  de la série conditionnelle :  $Y/X = X_i$ . On obtient ainsi la série double  $(X, M)$  définie par le tableau ci-dessous. Les calculs se feront à deux chiffres après la virgule.

| X | 2  | 6   | 10  | 14  | 18  | 22  |
|---|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| M | 80 | 113 | 170 | 189 | 199 | 185 |

2. Calculer le coefficient de corrélation de  $X$  et  $M$  puis interpréter le résultat.
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de  $M$  en  $X$ .
4. Quelle serait le salaire moyen d'un ouvrier de l'entreprise si son ancienneté était 30 ans, si cette tendance se poursuit.

**Exercice 11 :**

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels ; les résultats sont donnés dans le tableau suivant où  $y_i$  représente le nombre d'exemplaires du point que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente exprimé en milliers de francs, est  $x_i$ .

|       |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$ | 60  | 80  | 100 | 120 | 140 | 160 | 180 | 200 |
| $y_i$ | 952 | 805 | 630 | 522 | 510 | 324 | 205 | 84  |

On appelle  $x$  la variable statistique dont les valeurs sont  $x_i$  et  $y$  celle dont les valeurs sont les  $y_i$ .

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de  $y$  et  $x$ . La valeur trouvée justifie-t-elle la recherche d'un ajustement linéaire ?
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$ .
3. Les frais de conception du produit se sont élevés à 28 millions de francs. Le prix de fabrication de chaque produit est de 25000 francs.
  - a) Dédurre de la précédente question que le bénéfice  $z$  en fonction du prix de vente  $x$  est donné par l'égalité :  $z = -5,95x^2 + 1426,25x - 59937,5$  où  $x$  et  $z$  sont exprimés en milliers de francs.
  - b) Déterminer le prix de vente  $x$  permettant de réaliser un bénéfice maximum et calculer ce bénéfice.

**NB :** Prendre 2 chiffres après la virgule sans arrondir.

Rappel : Bénéfice = Prix de vente - prix de revient.

## Exercice 12 :

Les parties A et B sont indépendantes.

### Partie A :

Une étude du service des transports donne la distance de freinage d'une voiture sur une route en bon état en fonction de sa vitesse.

|                     |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
|---------------------|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| Vitesse en km/h : X | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 |
| Distance en m : Y   | 8  | 12 | 18 | 24 | 32 | 40 | 48  | 58  | 72  |

On désigne par  $X$  la vitesse et par  $Y$  la distance de freinage.

- 1) Représenter le nuage de points. On prendra en abscisse 1 cm pour 10 km/h et en ordonnée 1 cm pour 5 m.

**NB :** On commencera en abscisse les graduations à partir de 40 km/h et en ordonnée les graduations à partir de 8 m.

- 2) Déterminer l'équation de la droite de régression de  $Y$  en  $X$ .
- 3) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire  $r$ . Avons-nous une bonne corrélation ?
- 4) a) On suppose que cette évolution se poursuive. Un automobiliste roulant à 150 km/h entame un freinage à 85 m d'un obstacle immobile. Percutera-t-il l'obstacle ?
- b) Quelle devra être sa vitesse maximale au moment du freinage pour ne pas heurter l'obstacle ?

### Partie B :

Une autre étude sur les causes des accidents donne les résultats ci-contre.

|                           |                      |                                 |
|---------------------------|----------------------|---------------------------------|
| Type de transport : $y$   | Particuliers : $y_1$ | Transporteurs en commun : $y_2$ |
| Cause des accidents : $x$ |                      |                                 |

|                                             |     |     |
|---------------------------------------------|-----|-----|
| Accidents liés à l'excès de vitesse : $x_1$ | 440 | 360 |
| Accidents à cause mécanique : $x_2$         | 110 | 90  |

- 1) Déterminer l'effectif totale des accidents enregistrés lors de cette étude ?
- 2) Déterminer les fréquences conditionnelles  $f_{y_2/x_1}$  et  $f_{x_2/y_2}$ .
- 3) Déterminer les fréquences marginales  $f_1$  et  $f_2$ .

### Exercice 12 :

Afin de mieux gérer ses stocks, une entreprise décide d'estimer son besoin en matières premières par l'intermédiaire d'une grandeur dont la valeur peut être connue rapidement (chiffre d'affaires ou total des salaires). on note X la quantité, en tonnes de matières premières ; Y le chiffre d'affaires en milliers de francs. Dans tout l'exercice on pourra donner directement les résultats fournis par la calculatrice. Le relevé des mois précédents est le suivant :

| Numéro du mois | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   |
|----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| X              | 0,9 | 1,2 | 0,6 | 0,5 | 1,4 | 1   |
| Y              | 37  | 40  | 33  | 33  | 41  | 35  |
| Z              | 3,9 | 3,7 | 3,2 | 3,3 | 3,6 | 3,7 |

- 1°) a) Calculer les coefficients de corrélation linéaire  $r_1$  entre X et Y et  $r_2$  entre X et Z .  
 b) Est-ce un ajustement entre Y et X ou entre Z et X qui permettra la meilleure estimation de X ?
- 2°) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X et en déduire une estimation du besoin en matières premières.

# FIN DES EXERCICES PROPOSES

\*\*\*\*\*

## ANNEX

### Formulaire de trigonométrie

*Dans les formules où n'apparaît pas la fonction tangente,  $a$  et  $b$  sont des réels quelconques, mais dans celle où elle apparaît, ils sont supposés tels que toutes les tangentes concernées soient définies, et cela garantit alors que les dénominateurs sont non nuls.*

#### Relation entre les carrés :

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

#### Formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

#### Formules de duplication :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

#### Tout en fonction de la tangente de l'arc moitié :

Sous réserve de définition, en notant  $t = \tan \frac{a}{2}$  :

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

#### Formules de linéarisation :

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

**Transformation d'une somme ou différence en produit :**

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

## Opérations sur les limites

Dans les tableaux qui suivent, les limites des fonctions  $f$  et  $g$  sont prises soit en  $-\infty$ , soit en  $+\infty$ , soit en un réel  $a$ .  $l$  et  $l'$  sont des nombres réels. Lorsqu'il n'y a pas de conclusion en général, on dit alors qu'il y a un cas de forme indéterminée.

### Limite d'une somme

|                             |          |           |           |           |           |           |
|-----------------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Si $f$ a pour limite        | $l$      | $l$       | $l$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| Si $g$ a pour limite        | $l'$     | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| Alors $f + g$ a pour limite | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | FI        |

### Limite d'un produit

|                                  |               |           |           |           |           |           |           |           |                            |
|----------------------------------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------------------------|
| Si $f$ a pour limite             | $l$           | $l > 0$   | $l > 0$   | $l < 0$   | $l < 0$   | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0                          |
| Si $g$ a pour limite             | $l'$          | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $(+\infty)$ ou $(-\infty)$ |
| Alors $f \times g$ a pour limite | $l \times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI                         |

### Limite d'un quotient $\frac{f}{g}$ dans le cas où la limite de $g$ n'est pas nulle

|                                   |                |                            |           |           |           |           |                            |
|-----------------------------------|----------------|----------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------------------------|
| Si $f$ a pour limite              | $l$            | $l$                        | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $(+\infty)$ ou $(-\infty)$ |
| Si $g$ a pour limite              | $l' \neq 0$    | $(+\infty)$ ou $(-\infty)$ | $l' > 0$  | $l' < 0$  | $l' > 0$  | $l' < 0$  | $(+\infty)$ ou $(-\infty)$ |
| Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite | $\frac{l}{l'}$ | 0                          | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI                         |

### Limite d'un quotient $\frac{f}{g}$ dans le cas où la limite de $g$ est nulle

|                      |                          |                          |                          |                          |   |
|----------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|---|
| Si $f$ a pour limite | $(l > 0)$ ou $(+\infty)$ | $(l > 0)$ ou $(+\infty)$ | $(l < 0)$ ou $(-\infty)$ | $(l < 0)$ ou $(-\infty)$ | 0 |
|----------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|---|

| Si $g$ a pour limite              | $0^+$     | $0^-$     | $0^+$     | $0^-$     | $0$ |
|-----------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----|
| Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI  |

## Tableau de dérivée :

| Fonction $f$                          | Fonction dérivée $f'$                       | Ensemble de dérivabilité                                                        |
|---------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| $f(x) = k$ (constante)                | $f'(x) = 0$                                 | $\mathbb{R}$                                                                    |
| $f(x) = x$                            | $f'(x) = 1$                                 | $\mathbb{R}$                                                                    |
| $f(x) = ax + b$                       | $f'(x) = a$                                 | $\mathbb{R}$                                                                    |
| $f(x) = x^n$ ( $n \in \mathbb{Z}^*$ ) | $f'(x) = nx^{n-1}$                          | $\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$                            |
| $f(x) = \sqrt{x}$                     | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$               | $\mathbb{R}_+^*$                                                                |
| $f(x) = \frac{1}{x}$                  | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$                    | $\mathbb{R}^*$                                                                  |
| $f(x) = \cos x$                       | $f'(x) = -\sin x$                           | $\mathbb{R}$                                                                    |
| $f(x) = \sin x$                       | $f'(x) = \cos x$                            | $\mathbb{R}$                                                                    |
| $f(x) = \tan x$                       | $f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $\mathbb{R} - \left\{ k \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$               |
| $f(x) = \cos(ax + b)$                 | $f'(x) = -a \sin(ax + b)$                   | $\mathbb{R}$                                                                    |
| $f(x) = \sin(ax + b)$                 | $f'(x) = a \cos(ax + b)$                    | $\mathbb{R}$                                                                    |
| $f(x) = \tan(ax + b)$                 | $f'(x) = a [1 + \tan^2(ax + b)]$            | $\mathbb{R} - \left\{ k \frac{\frac{\pi}{2} - b}{a}; k \in \mathbb{Z} \right\}$ |

## Operations sur les dérivées :

Lorsque  $u$  et  $v$  sont des fonctions dérivables sur un intervalle  $I$

| Fonction                         | Dérivée                   | Conditions                    |
|----------------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| $u + v$                          | $u' + v'$                 |                               |
| $k.u$ ( $k = \text{constante}$ ) | $k.u'$                    |                               |
| $u.v$                            | $u'.v + v'.u$             |                               |
| $\frac{1}{v}$                    | $-\frac{v'}{v^2}$         | $v \neq 0$ sur $I$            |
| $\frac{u}{v}$                    | $\frac{u'.v - v'.u}{v^2}$ | $v \neq 0$ sur $I$            |
| $u^n$ ( $n \in \mathbb{Z}^*$ )   | $n.u'.u^{n-1}$            | $u > 0$ sur $I$ si $n \leq 0$ |
| $\sqrt{u}$                       | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$    | $u > 0$ sur $I$               |

|      |                    |  |
|------|--------------------|--|
| $vu$ | $u' \times (v'ou)$ |  |
|------|--------------------|--|

### Primitives de fonctions usuelles :

$F$  désigne une primitive de la fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  et  $a, \omega$  et  $\phi$  des réels avec  $\omega \neq 0$

| $f$                                                   | $I$                                            | $F$                                                 |
|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $x \mapsto a$                                         | $\mathbb{R}$                                   | $x \mapsto ax + c$                                  |
| $x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$                   | $\mathbb{R}$                                   | $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$                 |
| $x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ | $]0, +\infty[ \text{ ou } ]-\infty; 0[$        | $x \mapsto -\frac{x^{n-1}}{n-1} + c$                |
| $x \mapsto \sqrt{x}$                                  | $]0, +\infty[$                                 | $c \mapsto \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c$               |
| $x \mapsto \cos x$                                    | $\mathbb{R}$                                   | $x \mapsto \sin x + c$                              |
| $x \mapsto \sin x$                                    | $\mathbb{R}$                                   | $x \mapsto -\cos x + c$                             |
| $x \mapsto \cos(\omega x + \phi)$                     | $\mathbb{R}$                                   | $x \mapsto \frac{1}{\omega} \sin(\omega x + \phi)$  |
| $x \mapsto \sin(\omega x + \phi)$                     | $\mathbb{R}$                                   | $x \mapsto -\frac{1}{\omega} \cos(\omega x + \phi)$ |
| $x \mapsto 1 + \tan^2 x$                              | $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ | $x \mapsto \tan x + c$                              |

**BON COURAGE !!!**