

SYNTHÈSE MATHS N° 1 :

Exercice 1 :

1) Le plan est muni d'un repère (O, I, J) l'unité graphique est 2 cm.

On donne les pts A, B, C et D d'affixes :

$$z_A = -3i ; \quad z_B = 1 - i$$

$$z_C = 2i ; \quad z_D = -2 - 2i$$

a) Placer les pts A, B, C et D.

b) Démontrer que le triangle BAD est rectangle et isocèle en A.

2) Soit dans $\mathbb{C}$ l'éq (E) : $z^3 = -2 - 2i$

a) Déterminer les solutions de l'éq $u^3 = 1$

b) Vérifier que $1 - i$ est solution de (E)

c) En déduire les solutions de (E) sous forme trigo puis sous forme algébrique.

d) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3) On pose $U_n = (z_D)^n$; $n \in \mathbb{N}^*$ où z_D est l'affixe du point D.

a) Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle U_n est un réel.

b) Donner la forme algébrique de U_{2025}

4) Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B.

a) Dmq l'écriture complexe de S est :

$$z' = (1 + i)z - 2 + 2i$$

b) Dmq $S(B) = C$

c) Déterminer l'image du triangle BAD par la similitude S .

5) Déterminer l'ensemble des pts M dont l'affixe z vérifie :

$$|(1 + i)z - 2 + 2i| = 2\sqrt{2}$$

6) On considère les pts M et M' d'affixes respectives : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et $y' \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que l'expression analytique de S est :

$$\begin{cases} x' = x - y - 2 \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$$

b) Déterminer l'image par S de la droite (Δ) d'équation $2x - y - 3 = 0$

7) Soit T la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe z_C .

a) Donner l'écriture complexe de T .

b) Déterminer l'écriture complexe de $T \circ S$ et celle de $S \circ T$.

c) Déterminer l'affixe z_E du pt E défini par : $z_E = T \circ S(D)$.

Exercice 2 :

En vue de faire des bénéfices lors des festivités de fin d'année, le gouvernement scolaire veut proposer le jeu suivant :

Pour une mise de 500^F un joueur lance 3 fois de suite une pièce de monnaie parfaite. Si à la fin suite des 3 lancers, le joueur obtient exactement et de manière consécutive deux

faces identiques, il perçoit 1500^F , sinon il ne

gagne rien. Cependant Penda un élève de

terminale S_2 au lycée Thiaroye estime

que ce jeu n'est pas profitable au gouvernement scolaire.

A l'aide d'une production basée sur tes connaissances mathématiques donne ton avis.

— o —

Problème :

Partie A

Soit l'équation différentielle (E)

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Déterminer g de (E) la solution dont la courbe représentative ($\mathcal{C}$) passe par le pt $A(0, 1)$ et dont la tangente en ce pt est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $]-\infty, 1[$

$$\text{par } g(x) = \frac{x}{1-x} - \ln(1-x)$$

- 1) Dresser le tableau de variation de g .
- 2) Calculer $g(0)$ puis en déduire le signe de $g(x)$.

Partie C

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ 2e^{-x} - e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) a) Justifier que pour tout $x \in]-\infty, 0[$ on a : $1 - x \ln(1-x) \geq 1$
b) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- 2- a) Étudier la continuité de f en 0
b) Montrer que :
$$2e^{-x} - e^{-2x} - 1 = (1 - e^{-x})(e^{-x} - 1)$$

c) Étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter les résultats.
- 3) Calculer les limites aux bornes.

4) Étudier la nature des branches infinies.

5- a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$;

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{1-x} \ln(1-x)}$$

- b) Calculer la dérivée de f pour tout $x \geq 0$
- c) Dresser le tableau de variation de f .
- 6) Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

Partie D :

Soit h la restriction de f sur $I = [0, +\infty[$

- 1) Montrer que h est une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
- 2) Calculer $h(\ln 2)$. La fonction h^{-1} est-elle dérivable en $\frac{3}{4}$?
Si oui calculer $(h^{-1})'(\frac{3}{4})$
- 3- a) Soit α un réel strictement positif. Calculer en fonction de α l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = \alpha$, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathcal{C}_f$.
b) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$.

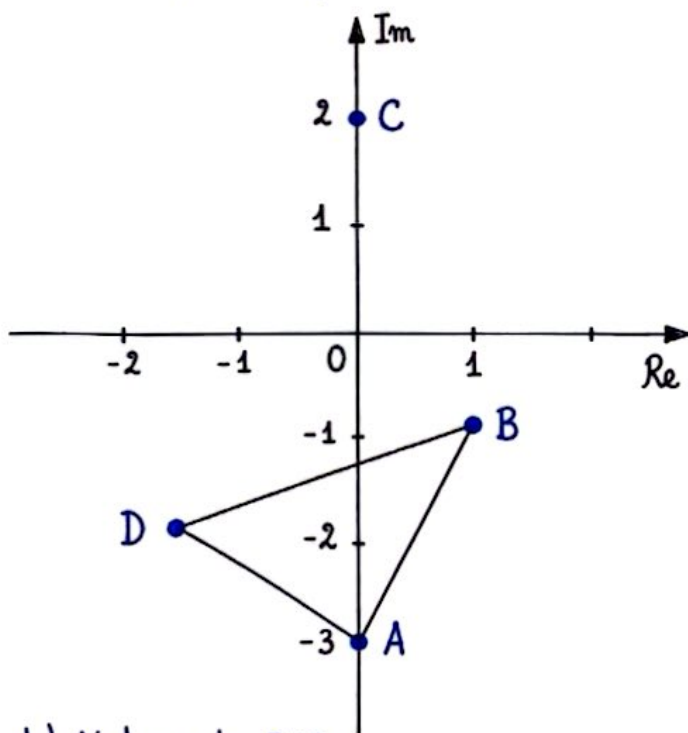
Correction du Synthèse : ①

Exo1:

$$z_A = -3i \quad ; \quad z_B = 1 - i$$

$$z_C = 2i \quad ; \quad z_D = -2 - 2i$$

1-°) Plaçons les pts A, B, C et D.



b) Nature de BAD

$$\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = \frac{1 - i + 3i}{-2 - 2i + 3i} = \frac{1 + 2i}{-2 + i}$$

$$= \frac{-i - 2 + i}{-2 + i} = -i$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = -i$$

$$\left| \frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} \right| = |-i| = 1 \Rightarrow \frac{AB}{AD} = 1 \Rightarrow AB = AD \quad ①$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}\right) = \arg(-i)$$

$$\Rightarrow (\vec{AD}; \vec{AB}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \quad ②$$

① et ② $\Rightarrow$ BAD est un triangle rectangle et isocèle en A.

$$2) (E): z^3 = -2 - 2i$$

a) Résolvons $x^3 = 1$

$$x^3 = 1 \Rightarrow z_k = e^{i \frac{2k\pi}{3}} \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

$$U_0 = e^0 \Rightarrow \boxed{U_0 = 1}$$

$$U_1 = e^{i \frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \boxed{U_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$U_2 = e^{i \frac{4\pi}{3}} \Rightarrow \boxed{U_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

b) Vérifions que $1 - i$ est solut² de (E)

$$(E): z^3 = -2 - 2i$$

$$(1 - i)^3 = (1 - i)^2(1 - i) = (1 - 2i + i^2)(1 - i)$$

$$= (1 - 2i - 1)(1 - i) = (-2i)(1 - i)$$

$$= -2i + 2i^2 = -2i - 2 = -2 - 2i$$

Donc $1 - i$ est solution de (E)

c) Les solutions de (E)

$$z^3 = -2 - 2i \Rightarrow z^3 = (1 - i)^3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z}{1 - i}\right)^3 = 1 \Rightarrow \left(\frac{z}{1 - i}\right)^3 = 1$$

$$\text{Posons } Z = \frac{z}{1 - i} \quad \text{or } 1 - i = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow Z^3 = 1$$

$$Z_0 = 1 \quad \text{ou} \quad Z_1 = e^{i \frac{2\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad Z_2 = e^{i \frac{4\pi}{3}}$$

* Sous forme trigonométrique

$$Z_0 = 1 \Rightarrow \frac{z_0}{1 - i} = 1 \Rightarrow z_0 = 1 - i$$

$$\boxed{z_0 = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]}$$

$$Z_1 = e^{i \frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \frac{z_1}{1 - i} = e^{i \frac{2\pi}{3}}$$

$$z_1 = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} \times e^{i \frac{2\pi}{3}}$$

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i \frac{5\pi}{12}}$$

$$Z_2 = e^{i \frac{4\pi}{3}} \Rightarrow \frac{z_2}{1 - i} = e^{i \frac{4\pi}{3}}$$

$$z_2 = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} \times e^{i \frac{4\pi}{3}}$$

$$z_2 = \sqrt{2} e^{i \frac{13\pi}{12}}$$

$$Z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

(3)

$$\Rightarrow \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

D'où $\boxed{\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \sin \left(\pi - \frac{5\pi}{12} \right) = \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{or } \sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

D'où $\boxed{\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

$$3) U_n = (Z_0)^n$$

a) la valeur minimale de n

$$U_n = (-2-2i)^n$$

$$|Z_0| = |-2-2i| = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(Z_0) = \arg(-2-2i) = \frac{5\pi}{4}$$

$$Z_0 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$U_n = \left(2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}} \right)^n$$

$$U_n = (2\sqrt{2})^n e^{i\frac{5n\pi}{4}}$$

$$e^{i\frac{5n\pi}{4}} = \cos \frac{5n\pi}{4} + i \sin \frac{5n\pi}{4}$$

$$U_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Im}(U_n) = 0$$

$$\Rightarrow \sin \frac{5n\pi}{4} = 0 \Rightarrow \frac{5n\pi}{4} = k\pi$$

(4)

$$Z_2 = \frac{Z_3}{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow Z_2 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$Z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{13\pi}{12}}$$

$$\boxed{Z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right)}$$

* Sous forme algébrique.

$$\boxed{Z_0 = 1-i}$$

$$Z_1 = \sqrt{2} (1-i) \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$Z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{Z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right)}$$

$$Z_2 = (1-i) \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$Z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{Z_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)}$$

d) les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

$$\frac{7\pi}{12} = \pi - \frac{5\pi}{12}$$

$$\cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) = \cos \left(\pi - \frac{5\pi}{12} \right) = -\cos \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{or } \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{5n}{4} = k \Rightarrow \boxed{n = \frac{4}{5}k}$$

(5)

$5n = 4k$ donc n est un multiple de 4

D'où $\boxed{n_{\min} = 4}$

b) Forme algébrique de U_{2025}

$$U_{2025} = (\zeta_8)^{2025} = \left(2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^{2025}$$

$$U_{2025} = (2\sqrt{2})^{2025} \left[\cos \frac{10125\pi}{4} + i \sin \frac{10125\pi}{4} \right]$$

$$U_{2025} = (2\sqrt{2})^{2025} \left[\cos \left(2531\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin \left(2531\pi + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$U_{2025} = (2\sqrt{2})^{2025} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

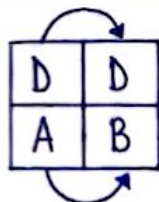
$$U_{2025} = (2\sqrt{2})^{2025} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$U_{2025} = (2\sqrt{2})^{2024} \times 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\boxed{U_{2025} = (2\sqrt{2})^{2024} (-2 - 2i)}$$

4) Soit $S \Rightarrow$

a)



$$S: \zeta' = a\zeta + b$$

$$\zeta_D = a\zeta_D + b \quad (1)$$

$$\zeta_B = a\zeta_A + b \quad (2)$$

$$a = \frac{\zeta_D - \zeta_B}{\zeta_D - \zeta_A} = \frac{-2 - 2i - 1 + i}{-2 - 2i + 3i}$$

$$a = \frac{-3 - i}{-2 + i} = \frac{(-3 - i)(-2 - i)}{(-2)^2 - (i)^2}$$

$$a = \frac{6 + 3i + 2i - 1}{4 + 1} = \frac{5 + 5i}{5}$$

$$\boxed{a = 1 + i}$$

(6)

D est le centre de S

$$b = \zeta_D - a\zeta_D = \zeta_D(1 - a)$$

$$b = (-2 - 2i)(1 - 1 - i)$$

$$b = (-i)(-2 - 2i) = 2i - 2$$

$$\boxed{b = -2 + 2i}$$

$$\text{D'où } S: \zeta' = (1 + i)\zeta - 2 + 2i$$

b) $M_q \quad S(B) = C$

$$S(B): \zeta' = (1 + i)\zeta_B - 2 + 2i$$

$$\zeta' = (1 + i)(1 - i) - 2 + 2i$$

$$\zeta' = 1 - i^2 - 2 + 2i = 1 + 1 - 2 + 2i$$

$$\zeta' = 2i = \zeta_C$$

$$\text{D'où } S(B) = C$$

c) Image du triangle BAD par S

Soit le triangle $B'A'D'$ image du triangle BAD par S .

On a: $S(B) = C$, $S(A) = B$ et $S(D) = D$

D'où l'image de BAD par S est le triangle CBD .

5) l'ensemble des pts M du plan /

$$|(1 + i)\zeta - 2 + 2i| = 2\sqrt{2}$$

$$\left| (1 + i) \left[\zeta - \frac{2 - 2i}{1 + i} \right] \right| = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{2 - 2i}{1 + i} = \frac{-2i(1 + i)}{1 + i} = -2i$$

$$|(1 + i)(\zeta + 2i)| = 2\sqrt{2}$$

$$|1+i| |3+2i| = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} |3+2i| = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow |3+2i| = 2$$

$$\text{Soit } I(-2i) \Rightarrow |3-3i| = 2$$

$$MI = 2 \Rightarrow MI = (\sqrt{2})^2$$

l'ensemble des pts M du plan est le cercle de centre I (0, -2) et de rayon $r = \sqrt{2}$

c) Expression analytique de S.

$$z' = (1+i)z - 2 + 2i$$

$$x' + iy' = (1+i)(x+iy) - 2 + 2i$$

$$x' + iy' = (x+iy) + ix - y - 2 + 2i$$

$$x' + iy' = x - y - 2 + i(x+y+2)$$

Par identification

$$\begin{cases} x' = x - y - 2 & \textcircled{1} \\ y' = x + y + 2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

b) l'image de (Δ) : $2x - y - 3 = 0$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow x' + y' = 2x$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{x' + y'}{2}} \quad \boxed{x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y'}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \Rightarrow y' - x' = 2y + 4$$

$$2y = y' - x' - 4$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}x' - 2}$$

$$\Delta: 2x - y - 3 = 0$$

$$2\left(\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right) - \left(-\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' - 2\right) - 3 = 0$$

$$x' + y' + \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' + 2 - 3 = 0$$

$$\frac{3}{2}x' + \frac{1}{2}y' - 1 = 0$$

$$\text{Donc } (\Delta'): 3x' + y' - 2 = 0$$

7

7) T: Translation de vecteur $\vec{u}(3c)$

a)

$$T: z' = z + b \text{ avec } b = 3c \quad \textcircled{8}$$

$$\boxed{T: z' = z + 2i}$$

b) Ecriture complexe de $T \circ S$

$$T \circ S = T(S): z' = z_s + 2i$$

$$T \circ S: z' = (1+i)z - 2 + 2i + 2i$$

$$\boxed{T \circ S: z' = (1+i)z - 2 + 4i}$$

Ecriture complexe de $S \circ T$.

$$S \circ T = S(T): z' = (1+i)z_T + 2 + 2i$$

$$S \circ T: z' = (1+i)(z + 2i) - 2 + 2i$$

$$S \circ T: z' = z + 2i + iz - 2 - 2 + 2i$$

$$\boxed{S \circ T: z' = (1+i)z - 4 + 4i}$$

c) l'afixe z_E | $z_E = T \circ S(D)$

$$z_E = (1+i)z_D - 2 + 4i$$

$$z_E = (1+i)(-2-2i) - 2 + 4i$$

$$z_E = -2 - 2i - 2i + 2 - 2 + 4i$$

$$\boxed{z_E = -2}$$

Exercice 2

(9)

Cherchons le gain algébrique et l'espérance mathématique.

Soit Ω l'univers du possible
 $\Omega = \{P(\text{pile}); F(\text{face})\}$

On a deux faces et on lance la même pièce 3 fois de suite.

$$\text{card } \Omega = 2^3 = 8$$

les 8 possibilités sont donc :

$$\Omega = \{PPF; FPP; PFF; FFP; PPP, \\ PFP; FPF; FFF\}$$

D'après la situation de l'énoncé

$\{PPF; FPP; PFF; FFP\}$ correspond

au gain de 1000^F [$1500 - 500$ (la mise)]

l'autre situation à savoir $\{PPP; PFP;$

$FPF; FFF\}$ correspond à une perte de la mise (-500^F).

📌 NB: Pour gagner on doit obtenir «exactement et de manière consécutive» 2 faces identiques.

Soit X la variable aléatoire qui associe le gain algébrique du joueur :

$$X \in \{-500; 1000\}$$

$$P(X = -500) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 1000) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(10)

X_i	-500	1000
$P(X_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X) = \sum X_i P(X_i)$$

$$E(X) = -500 \times \frac{1}{2} + 1000 \times \frac{1}{2}$$

$$E(X) = 250$$

Interprétation: le joueur gagne en moyenne 250^F .

Conclusion: $E(X) > 0$ donc le jeu est favorable au joueur.

D'où le gouvernement scolaire est perdant.

Recommandations: Pour rendre le jeu équitable on remplace la mise de 500 par m et on résout :

X_i	$-m$	$1500-m$
$P(X_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

NB: Gain Algébrique = (somme remise) - (mise)

Pour que le jeu soit équitable il faut que

$$E(X) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}(1500-m) = 0$$

$$\Rightarrow m = 750^F$$

Pour que le jeu soit équitable on doit augmenter la mise de 500^F à 750^F .

Problème :

(11)

Partie A

$$(E): y'' + 3y' + 2y = 0$$

Eq caractéristique

$$\pi^2 + 3\pi + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$\pi_1 = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\pi_2 = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Donc la solution générale de (E) est de la forme : $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$

$$\Rightarrow y(x) = \boxed{C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}}$$

C_1 et C_2 sont des constantes

* la courbe $\mathcal{C}$ passe par $A(0, 1)$

$$\Rightarrow y(0) = 1 \Rightarrow \boxed{C_1 + C_2 = 1} \quad (1)$$

* la tangente en ce pt est // à l'axe Ox

$$\Rightarrow y'(0) = 0 \text{ (Tangente horizontale)}$$

$$y'(x) = -2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x}$$

$$y'(0) = -2C_1 - C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-2C_1 - C_2 = 0} \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 - C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -C_1 = 1 \Rightarrow \boxed{C_1 = -1}$$

$$C_2 = 1 - C_1 \Rightarrow \boxed{C_2 = 2}$$

D'où la solut^e g de (E) est :

$$\boxed{g(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}}$$

Partie B

(12)

$$g(x) = \frac{x}{1-x} - \ln(1-x)$$

$$Dg =]-\infty, 1[$$

1) Dressons le TV de g

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-x} - \ln(1-x)$$

$$x \rightarrow -\infty \begin{cases} \frac{x}{1-x} = -1 \\ -\ln(1-x) = -\infty \end{cases}$$

$$\text{D'où } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty} \quad \text{Par Somme}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x} - \ln(1-x)$$

$$x \rightarrow 1^- \begin{cases} \frac{x}{1-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ -\ln(1-x) = -\ln(0) = +\infty \end{cases}$$

$$\text{D'où } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty} \quad \text{Par Somme}$$

$\forall x \in]-\infty, 1[$ g est dérivable :

$$g'(x) = \frac{1(1-x) - (-1)(x)}{(1-x)^2} - \frac{-1}{1-x}$$

$$g'(x) = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1-x}{(1-x)^2}$$

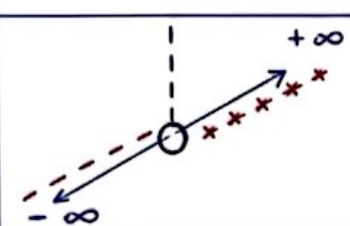
$$\boxed{g'(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2}} \quad \forall x \in]-\infty, 1[$$

le signe de $g'(x)$ dépend de $2-x$

$$x < 1 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow 2-x > 1$$

$$\Rightarrow \boxed{2-x > 0} \quad \text{D'où } g'(x) > 0$$

g est strictement croissante sur $J = -\infty; 1[$ (13)

x	$-\infty$	0	1
$g'(x)$		+	
g			

2) Calculons $g(0)$

$$g(0) = 0$$

Deduisons le signe de $g(x)$

* Sur $J = -\infty, 0] \Rightarrow x \leq 0$

$$\Rightarrow g(x) \leq g(0) \Rightarrow g(x) \leq 0$$

* Sur $]0, 1[\Rightarrow 0 < x < 1$

$$\Rightarrow x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0)$$

$$\Rightarrow g(x) > 0$$

x	$-\infty$	0	1
$g(x)$	-	0	+

Partie C

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x\ln(1-x)} & \text{si } x < 0 \\ 2e^{-x} - e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1-a) Justifions que $1 - x\ln(1-x) \geq 1$

$$x < 0 \text{ (1)} \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow 1-x > 1$$

$$\ln(1-x) > 0 \text{ (2)}$$

$$\text{(1)} * \text{(2)} \Rightarrow x\ln(1-x) \leq 0$$

$$-x\ln(1-x) \geq 0$$

$$1 - x\ln(1-x) > 1$$

b) Domaine de définition

$$f_1 \text{ ssi } 1 - x\ln(1-x) \geq 0, 1-x > 0 \text{ et } x < 0 \text{ (14)}$$

$1 - x\ln(1-x) \geq 0$ vraie d'après la question (1).

$$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1 \text{ et } x < 0$$

$$\text{D'où } Df_1 =]-\infty, 0[$$

$$f_2 \text{ ssi } x \geq 0 \Rightarrow Df_2 = [0, +\infty[$$

$$Df = Df_1 \cup Df_2 \Rightarrow Df = \mathbb{R}$$

2-a) Continuité de f en 0 ; $f(0) =$

$$f(0) = 2e^0 - e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1-x\ln(1-x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1-0\ln(1-0)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Donc f est continue en 0.

$$\begin{aligned} \text{b) Mg } 2e^{-x} - e^{-2x} - 1 &= (1-e^{-x})(e^{-x}-1) \\ (1-e^{-x})(e^{-x}-1) &= e^{-x} - 1 - e^{-2x} + e^{-x} \\ &= 2e^{-x} - e^{-2x} - 1 \end{aligned}$$

c) Dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^{-x} - e^{-2x} - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-e^{-x})(e^{-x}-1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -(1-e^{-x}) \frac{e^{-x}-1}{-x}$$

$$x \rightarrow 0^+ \begin{cases} -(1-e^{-x}) = 0 \\ \frac{e^{-x}-1}{-x} = 1 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \lim_{0^+} -(1-e^{-x}) \frac{e^{-x}-1}{-x} = 0$$

f est dérivable en 0^+ ; $f'_d(0) = 0$ (15)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-x \ln(1-x)} - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - x \ln(1-x) - 1}{x (\sqrt{1-x \ln(1-x)} + 1)}$$

$$\lim_{0^-} \frac{-\ln(1-x)}{\sqrt{1-x \ln(1-x)} + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

f est dérivable en 0^- ; $f'_g(0) = 0$

On a : $f'_g(0) = f'_d(0)$

D'où f est dérivable en 0 .

Interprétation : C_f admet au pt d'abscisse 0 :

Une Tangente horizontale.

3) les limites aux bornes.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x \ln(1-x)}$$

$$x \rightarrow -\infty \left\{ 1-x \ln(1-x) = +\infty \right.$$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-x} - e^{-2x} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

4) Nature des branches infinies.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x \ln(1-x)}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln(1-x)}{x} \right)}}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{\ln(1-x)}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{x}$$

Posons $X = 1-x \Rightarrow x = 1-X$

si $x \rightarrow -\infty \Rightarrow X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{1-X} = 0$$

Par puissance comparée

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

C_f admet une BP direction Ox .

5-a) $\forall x \in]-\infty, 0[; 0[$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{1-x \ln(1-x)}}$$

$\forall x \in]-\infty, 0[$ f est dérivable

$$f'(x) = \frac{[1-x \ln(1-x)]'}{2\sqrt{1-x \ln(1-x)}}$$

$$f'(x) = \frac{-\ln(1-x) - \frac{-x}{1-x}}{2\sqrt{1-x \ln(1-x)}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{1-x} - \ln(1-x)}{2\sqrt{1-x \ln(1-x)}}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{1-x\ln(1-x)}}$$

(17)

b) La dérivée de f pour tout $x \in [0, +\infty[$

$\forall x \in [0, +\infty[; f'$ est dérivable

$$f'(x) = -2e^{-x} + 2e^{-2x}$$

$$f'(x) = 2(e^{-2x} - e^{-x})$$

Supposons que $e^{-2x} - e^{-x} > 0$

$$e^{-2x} > e^{-x} \Rightarrow \ln(e^{-2x}) > \ln(e^{-x})$$

$$-2x > -x \Rightarrow 2x < x$$

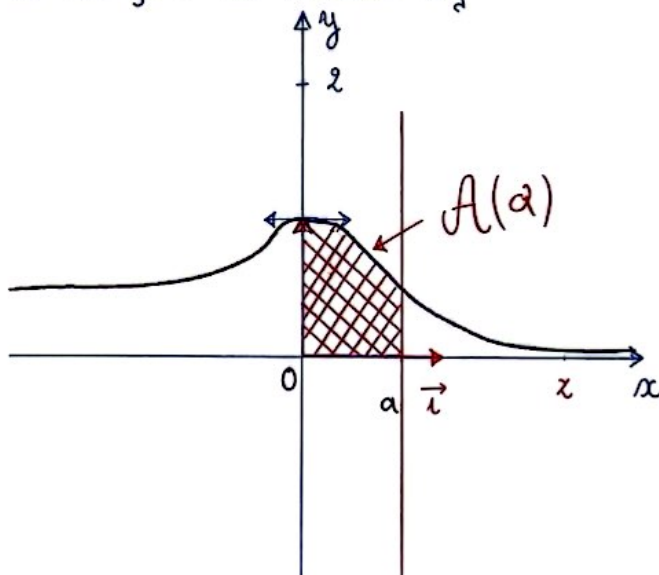
$$\Rightarrow 2 < 1 \text{ absurde}$$

D'où $e^{-2x} - e^{-x} < 0$ sur $[0, +\infty[$

c) Tableau de Variation de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\bigcirc$	$-$
f	$+\infty$	$\textcircled{1}$	0

6) Traçons la Courbe G_f



Partie D.

(18)

h restriction de f sur $I = [0, +\infty[$
1) Mq h est une bijection de $I \rightarrow J$.

Sur $I = [0, +\infty[$, h est continue et strictement décroissante, donc elle est bijective de $I \rightarrow J =]0, 1]$

2) Calculons $h(\ln 2)$

$$h(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$$

$$h(\ln 2) = 2e^{-\ln 2} - e^{-2\ln 2}$$

$$h(\ln 2) = 2e^{-\ln(\frac{1}{2})} - e^{-\ln(\frac{1}{4})}$$

$$\text{car } -\ln 2 = \ln(\frac{1}{2}) \text{ et}$$

$$-2\ln 2 = -\ln 2^2 = -\ln 4 = \ln(\frac{1}{4})$$

$$h(\ln 2) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}$$

$$h(\ln 2) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$h(\ln 2) = \frac{3}{4}$$

$$e^{\ln a} = a \quad a > 0$$

* Dérivabilité de h^{-1} en $\frac{3}{4}$

Pour que h^{-1} soit dérivable en $\frac{3}{4}$ il faut que h soit dérivable en $\ln 2$ et

$$h'(\ln 2) \neq 0 \text{ sur } I$$

D'après le TV; h est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc dérivable en $\ln 2$;

$$h'(x) = 2(e^{-2x} - e^{-x})$$

$$h'(\ln 2) = 2(e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2})$$

$$h'(\ln 2) = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$h'(\ln 2) = -\frac{1}{2} \quad h'(\ln 2) \neq 0$$

Donc h^{-1} est dérivable en $\frac{3}{4}$ (19)

* Calculons $(h^{-1})'(\frac{3}{4})$

$$(h^{-1})'(\frac{3}{4}) = \frac{1}{h'(\ln 2)} = -\frac{1}{2}$$

$$(h^{-1})'(\frac{3}{4}) = -2$$

3-a) Calcul d'aire $A(\alpha)$

$$A(\alpha) = \left[\int_0^\alpha f(x) dx \right] u.a(\text{cm}^2)$$

$$A(\alpha) = \left[\int_0^\alpha (2e^{-x} - e^{-2x}) dx \right] \text{cm}^2$$

$$= 2 \int_0^\alpha e^{-x} dx - \int_0^\alpha e^{-2x} dx$$

$$= 2 \left[-e^{-x} \right]_0^\alpha - \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^\alpha$$

$$= 2(-e^{-\alpha} + 1) + \left(\frac{1}{2} e^{-2\alpha} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2\alpha} - 2e^{-\alpha} + 2 - \frac{1}{2}$$

$$A(\alpha) = \left[\frac{1}{2} e^{-2\alpha} - 2e^{-\alpha} + \frac{3}{2} \right] \text{cm}^2$$

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm} \Rightarrow u.a = 4\text{cm}^2$$

$$A(\alpha) = \left[\frac{1}{2} e^{-2\alpha} - 2e^{-\alpha} + \frac{3}{2} \right] \times 4\text{cm}^2$$

$$A(\alpha) = [2e^{-2\alpha} - 8e^{-\alpha} + 6] \text{cm}^2$$

b) Calculons $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$ (20)

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} 2e^{-2\alpha} - 8e^{-\alpha} + 6$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha) = 6$$