

FONCTION LOGARITHME

ME ATHENA SEDAR

TS₂

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a. $\ln(2x - 3) = -1$
- b. $\ln(x^2 - 3x - 2) = 0$
- c. $\ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x + 11)$
- d. $\ln(x + 3) + \ln(x + 2) = \ln(x + 11)$
- e. $2\ln(x - 4) = \ln x - 2\ln 2$
- f. $\ln x + \ln(2x + 5) = \ln 3$
- g. $(2 - x)(\ln(x + 5)) = 0$
- h. $(\ln x + \frac{1}{2})(\ln x - 2) = 0$
- i. $\ln \sqrt{2x - 3} = \ln(6 - x) - \frac{1}{2} \ln x$
- j. $\ln \sqrt{x + 4} + \ln \sqrt{x - 1} = \ln \sqrt{6}$
- k. $\ln |2x - 5| - \ln |2x + 2| = \ln |x + 1|$
- l. $\ln(-x - 2) = \ln \left| \frac{-x-1}{x+3} \right|$

m. $\ln^2 x + 2 \ln x = 3$

n. $6 \ln^2 x + 7 \ln x - 3 = 0$

o. $(\ln(x - 1))^2 - \ln(x - 1) - 6 = 0$

p. $\ln(x^2) = (\ln x)^2$

q. $2 \ln^3 x + 3 \ln^2 x - 8 \ln x + 3 = 0$

r. $\ln^4 x - 34 \ln^2 x + 225 = 0$

s. $\ln^2 x - \frac{1}{\ln^2 x} = \frac{15}{4}$

t. $\frac{2 \log x + 3}{\log x + 1} = \frac{7}{3}$

u. $\log_3 x \times \log_9 x = 2$

v. $\log(x^2 - 69) = 2$

w. $\log_a x = \log_{a^2}(3x - 2) \quad a \in \mathbb{R}_+^* - \{-1\}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- a. $\ln(2x - e) > 1$
- b. $\ln(2x + 1) \leq \ln(x + 3)$
- c. $\ln \left(\frac{2x-3}{5x+1} \right) \leq 0$
- d. $\ln(x^2 + 8x + 20) > \ln(x + 13)$
- e. $\ln(x + 2) \leq \ln(x^2 - 4)$
- f. $\ln(2 - x) + \ln(x + 4) \leq \ln(3x + 2)$
- g. $\ln(2x - 1) + \ln(3x + 7) > \ln 3$
- h. $\ln x + \ln(x + 2) < \ln(x^2 - 2x + 2)$
- i. $\ln(x + 5) + \ln(x - 1) < \ln(5x + 7)$

j. $\ln^2 x - 5 \ln x + 6 > 0$

k. $\ln x - 3 \leq \frac{1}{\ln x}$

l. $(1 - \ln x)(2 - \ln x) \geq 0$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants :

$$S_1 \begin{cases} \ln x + 3 \ln y = 1 \\ 9 \ln x - 6 \ln y = 20 \end{cases} \quad S_2 \begin{cases} 3 \ln x - 4 \ln y = -6 \\ \ln(x^2) + \ln y = 7 \end{cases}$$

$$S_3 \begin{cases} x + y = 25 \\ \ln x + \ln y = 2 \ln 2 \end{cases} \quad S_4 \begin{cases} \ln \left(\frac{x^2}{y^3} \right) = 9 \\ \ln(xy^5) = \frac{17}{2} \end{cases}$$

$$S_5 \begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 3 + \ln 6 \\ \ln(x + y) = \ln 9 \end{cases}$$

$$S_6 \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \ln(-x) + \ln(-y) = 2 \ln 2 + \ln 15 \end{cases}$$

Exercice 2 Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2 \ln x}{x + \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln(1 + 2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x - \sqrt{x} \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^4}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x - 1)}{x^2 + x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x + 1) - \ln x]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x - 2} \ln(x - 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^3 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \ln \left(\frac{x + 1}{x^2 - 4x + 4} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(x + 1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x + 1)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \ln(x + 1) - 2\sqrt{1 + x}}{x^2}$$

Exercice 3 BAC 2012 S2 1^{er} groupePartie A : On considère la fonction g définie par

$$g(x) = 1 - x^2 - \ln x$$

1. Calculer $g(1)$.2. Etudier les variations de g .3. Dédurre de cette étude le signe de $g(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition D_g de la fonction g .Partie B : On considère la fonction f définie par $f(x) = 2 - x + \frac{\ln x}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. a. Montrer que la courbe représentative (C_f) de f admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation : $y = 2 - x$.
b. Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ) .
4. Déterminer les coordonnées du point A de (C_f) où la tangente est parallèle à (Δ) .
5. Représenter dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique $2cm$) la courbe (C_f) et les droites asymptotes.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 - (\ln x)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Déterminer le domaine de définition D_f de f .
b. Démontrer que f est continue et dérivable en 1.
c. Calculer les limites de f aux bornes de D_f et préciser les branches infinies de (C_f) .
d. Etudier les variations de f .
e. Démontrer que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de (C_f) .
f. Tracer (C_f) dans le repère.
2. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.
a. Démontrer que h réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
b. En déduire que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera le sens de .
c. Calculer $h^{-1}(-1)$. Justifier que h^{-1} est dérivable en -1 et déterminer l'équation de la tangente $\tilde{A}$ à la courbe de h^{-1} en son point d'abscisse -1 .
d. Justifier que h^{-1} est dérivable sur son domaine de définition.
e. Tracer la courbe représentative de h^{-1} .

f. Expliciter l'expression de $h^{-1}(x)$.

Exercice 5

Partie A : On considère la fonction g définie sur $] -\infty; 0]$ par : $g(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2x}{x^2-1}$.

1. Déterminons l'ensemble de définition de g .
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de g .
4. En déduire le signe de g sur son domaine de définition.

Partie B : Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = (x+1) \ln(x+1) - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats.
3. Etudier les limites aux bornes de son domaine.
a. Vérifier que $\forall x \neq -1, \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$, puis montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) = 1$.
b. En déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$. Interpréter ce résultat.
c. Calculer les autres limites aux bornes de son ensemble de définition.
d. Donner la nature de la branche infinie en $+\infty$.
4. Etudier les variations de f .
a. Montrer que : $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[, f'(x) = g(x)$.
b. Calculer $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
c. Dresser le tableau de variations de f .
5. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $]1; +\infty[$ et vérifier que $\alpha \in]3, 9, 4[$.
6. Représenter graphiquement la courbe de f dans un repère orthonormé d'unité $1cm$? On placera le point A de la courbe d'abscisse α .

Exercice 6

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{2}{1+x^2}$.

1. a. Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}.$$
 b. En déduire le signe de g' suivant les valeurs de x .
2. a. Dresser le tableau de variations de g .
 b. En déduire qu'il existe un unique nombre réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que : $0,5 < \alpha < 0,6$.
3. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B : Etude de la fonction f

1. Etudier la parité de f . En déduire qu'on peut réduire le domaine d'étude à $]0; +\infty[$. Interpréter géométriquement le résultat.
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = g(x)$.
 En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.
3. Calculer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ (On pourra poser $u = \frac{1}{x^2}$).
4. a. Calculer la limite quand x tend vers 0^+ (on pourra écrire f sous la forme $f(x) = x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x$).
 b. Etudier la dérivabilité de f en 0. Préciser la tangente à la courbe de au point O.
5. Encadrement de α .
 a. Prouver que, pour tout élément x de $[0, 5; \alpha]$, on a : $0 \leq f'(x) \leq f'(0,5)$.
 b. En déduire que, pour tout élément x de $[0, 5; \alpha]$, on a :

$$0 \leq f(\alpha) - f(0,5) \leq (\alpha - 0,5)f'(0,5)$$
 puis que

$$0 \leq f(\alpha) - f(0,5) \leq \frac{1}{10}f'(0,5).$$
 c. En déduire une valeur approchée de α à 0,01 près.
6. Dresser le tableau de variations de f et construire la courbe (C_f) .

Exercice 7

Partie A : Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = (x+1)^2 + 1 - \ln(x+1)$$

1. Déterminer le domaine de définition de g .
2. Calculer $g'(x)$ puis dresser son tableau de variations.
3. En déduire le signe de g .

Partie B : On considère la fonction f définie

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln|x|} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + \frac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats.
3. Déterminer les limites aux bornes de D_f puis préciser les branches infinies de (C_f) .
4. Montrer que $\forall x > 0$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.
5. Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et $x \neq -1$.
6. Dresser le tableau de variations de f .
7. Tracer (C_f) ainsi que les asymptotes dans un repère orthonormé d'unité $2cm$.

Partie C : Soit h la restriction de f sur $[0; +\infty[$.

1. Montrer que h est bijective de $[0; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
2. On appelle h^{-1} la bijection réciproque de h . h^{-1} est-elle dérivable en 0 ? Si oui calculer $(h^{-1})'(0)$.
3. Représenter graphiquement $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère que (C_f) .
4. Montrer que la fonction H définie par :

$$H(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}[\ln(x+1)]^2$$
 est une primitive de h sur $[0; +\infty[$.
5. Calculer $A = [H(4) - H(0)] \times 4cm^2$ qui est l'aire comprise entre (C_h) , l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 4$.

Exercice 8

Partie A : On définit sur $]0; +\infty[$, la fonction $U(x) = x - (x+1)[x^2 + \ln(x+1)]$.

1. Dresser le tableau de variations de U sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire le signe de $U(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B : Soit f la fonction dont (C_f) et la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et qui est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x^2} - x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} - x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que le domaine de définition de f est $D_f = [-1; +\infty[$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Préciser la branche infinie de (C_f) .

3. a. Etudier la dérivabilité de f en -1^+ et en 0^- .

b. Interpréter graphiquement ces résultats.

4. On admet que : $\forall x \in]0; +\infty[$,
 $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ (*)

a. Dédurre de (*) que :

$$\frac{-1}{2} \leq \frac{\frac{\ln(x+1)}{x} - 1}{x} \leq \frac{-1}{2} + \frac{x}{3} (**)$$

b. Utiliser (**) pour étudier la dérivabilité de f en 0^+ .

c. f est-elle dérivable en $x_0 = 0$? Justifier.

5. a. Déterminer l'expression de la dérivée f' de f sur $] -1; 0[$ et montrer que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{U(x)}{x^2(x+1)}$.

b. Dresser le tableau de variations de f .

6. a. Montrer que la restriction g de f à $] \tilde{A} ; +\infty[$ est une bijection.

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$ et que $0 < \alpha < 1$.

c. Préciser le domaine de définition de h^{-1} et son sens de variation.

d. Justifier que h^{-1} est dérivable sur son domaine de définition.

7. Construire (C_f) puis la courbe représentative de h^{-1} sur la même figure.

Exercice 9

Partie A :

Soit $g(x) = \frac{2x^2}{x^2-1} - \ln|x^2-1|$ définie sur $D_g =]-\infty; 0[-\{-1\}$.

1. Calculer les limites aux bornes de D_g .

2. Montrer que $\forall x \in]-\infty; 0[-\{-1\}$, on a
 $g'(x) = \frac{-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

3. Dresser le tableau de variation de g .

4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur D_g et que : $-4 < \alpha < -3$.

5. Donner le signe de g suivant les valeurs de x .

6. Montrer que $\ln|\alpha^2-1| = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2-1}$.

Partie B : Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln|x^1-1|}{x} - 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = -1 + x^2 \ln x & \text{si } x \geq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

1. Démontrer que $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, puis étudier les limites aux bornes de D_f .

2. En déduire les asymptotes à (C_f) , parallèles aux axes du repère ?

3. Etudier la continuité de f en 0.

4. Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

5. Etudier la branche infinie de (C_f) en $+\infty$.

6. Montrer que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} - 1$.

7. Montrer que $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$ si $x \in]0; +\infty[$.

8. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, si $x \in]-\infty; 0[-\{-1\}$.

9. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation sur D_f .

10. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé d'unité 1cm. (On prendra $\alpha = 3, 1$)

Partie C : Soit h la restriction de f sur $[1; +\infty[$.

1. Montrer que h réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

2. Préciser les variations et l'ensemble de dérivabilité et sa bijection réciproque h^{-1} .

3. Montrer que le point $A(e^2-1; e)$ appartient à la courbe $(C_{h^{-1}})$.