



M. BA

INSPECTION D'ADCADEMIE
LOUGA
LYCEE NDIAGNE

TD: SIMILITUDE PLANE DIRECTE



Niveau: TS2

Les mathématiques ne sont que du football tu t'entraînes bien tu joues bien

Exercice : SPD 0

- 1 Montrer que $z_0 = 3 + i$ est racine de l'équation $z^3 = 18 + 26i$ (1).
- 2 Montrer que pour toute solution z de l'équation (1), le complexe $Z = \frac{z}{z_0}$ est une racine cubique de l'unité.
- 3 Résoudre $Z^3 = 1$ et en déduire les solutions de (1).

Exercice : SPD 1

- Soit le point $\Omega(1 + 2i)$ du plan complexe
- l'homothétie h de centre Ω de rapport 2.
- la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$
- la transformation du plan $s = roh$

Donner l'écriture complexe de s

Exercice : SPD 2

On considère le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Soit la transformation H qui au point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 telle que : $z_1 = 2z + i$

- 1 Donner la nature et les éléments caractéristiques de H .
- 2 Soit la transformation R qui au point M d'affixe z associe le point M_2 d'affixe z_2 telle que :
$$z_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$
- 3 Donner la nature et les éléments caractéristiques de R .
- 4 Soit la transformation $H \circ R$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' .
$$z' = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + i$$
- 5 Donner l'expression complexe, la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $H \circ R$.
- 6 Soit la similitude plane directe S qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :
$$z' = 2\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)z - \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}$$
- 7 Le point C d'affixe $-1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}$. Quelle est l'image par S du point C ?
- 8 La droite (D) a pour équation : $x + y\sqrt{3} + 2 = 0$. Vérifier que le point C appartient à (D) .
- 9 Donner l'expression analytique de S .
- 10 En déduire une équation de la droite (D') , image de (D) par S .

Exercice : SPD 5

Donner l'écriture complexe de la transformation f :

- 1 f est la similitude plane directe de centre $O(0;0)$, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et rapport 2
- 2 f est la similitude plane directe de centre $I(2i)$, d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.
- 3 f est l'homothétie de centre $I(1+i)$ et de rapport -2 .
- 4 f est la translation de vecteur $\vec{u}(1 + 2i)$.
- 5 f est la rotation de centre $I(2 - i)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exercice : SPD 3

On considère le plan complexe $\mathbb{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- 1** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : -z^3 + 6z - 20i = 0$$

Sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

- 2** Notons b et c les autres solutions de (E) , b ayant la partie réelle positive et soient A, B, C les points de $\mathbb{P}$ d'affixes respectives a, b, c .

- a** Déterminer le module et un argument de $\frac{b-a}{c-a}$.

- b** En déduire la nature du triangle ABC .

- 3** Soit $\mathcal{R}$ la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ rad et l'application qui à tout point M

de $\mathbb{P}$ d'affixe $z \neq -\sqrt{3}$ associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z - 2i}{z + \sqrt{3} - i}.$$

- a** Donner l'écriture complexe de $\mathcal{R}$ puis l'affixe du point $A' = \mathcal{R}(A)$.
- b** Déterminer l'ensemble des points M de $\mathbb{P}$ dont les images par $\mathcal{R}$ ont pour affixe un réel négatif. On notera $\mathcal{E}$ cet ensemble.
- c** Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M de $\mathbb{P}$ dont les images par $\mathcal{R}$ appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice : SPD 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère l'application f du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe : $z' = -\frac{1}{2}iz + \frac{1-3i}{2}$.

- 1** Montre que f est une similitude plane directe dont on précisera ses caractéristique.

- 2** Soit $M_0(1 + 4\sqrt{3} + 3i)$. Pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f(M_n)$.

- a** En utilisant la première question, calcule ΩM_n en fonction de n .

- b** Place les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 .

- c** À partir de quel rang n_0 a-t-on : pour tout $n \geq n_0$, M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon $r = 0.05$?

- 3** **a** Calcule $M_0 M_1$.

- b** Pour tout entier naturel n , on note $d_n = M_n M_{n+1}$. Montre que (d_n) est une suite

géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

- c** On note $l_n = d_0 + d_1 + \dots + d_{n+1}$. Calcule l_n en fonction de n . Déduis-en la limite de l_n en $+\infty$.

- 4** Pour tout entier naturel non nul n , on note G_n l'isobarycentre des points $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n$.

- a** Montre que pour tout entier naturel non nul n , $\Omega G_n \leq \frac{16}{n+1}$.

- b** Déduis-en la position limite du point G_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice : SPD 6

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points $A(1 + 2i)$, $B(-2 + i)$ et $\Omega(2 - i)$

- 1** Donner la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe S_1 de centre Ω qui transforme A en B .

- 2** Soit S_2 la transformation plane qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ telle que $z' = \left(\frac{1+i}{2}\right)z + \frac{1-3i}{2}$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de S_2 .

- 3** En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $S = S_1 S_2$

- 4** **a)** Soit t la transformation plane qui à

$M(z = x + iy)$ associe $M'(z' = x' + iy')$ définie par $\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}y - 1 \\ y' = -\sqrt{3}x + y + 1 \end{cases}$

- b)** Exprimer z' en fonction de z puis donner la nature de t .

- 5** **b)** Soit t_2 la transformation qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ telle que $z' = \alpha^2 z + \beta$.

- 6** Déterminer les complexes α et β pour que $S_2 \circ t_2$ soit une translation de vecteur $\vec{u}(1; 0)$.

Exercice : SPD 7

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On désigne par m un nombre réel. On considère la transformation T_m du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ on lui associe le point $M'(z')$ définie par : $z' = (m + i)z + m - 1 - i$.

- 1 Peut-on choisir m de telle sorte que T_m soit une translation.
- 2 Déterminer m pour que T_m soit une rotation. Préciser alors ses caractéristiques. Dans la suite, on pose $m = 1$
 - a Calculer l'abscisse du point Ω invariant par T_1
 - b Démontrer que T_1 est similitude dont on précisera les éléments caractéristiques.
 - c Démontrer que, pour tout complexe z , on a : $z' - z = i(z - 1)$. En déduire que, si $M \neq \Omega$

alors le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M .

- 3 On définit la suite (M_n) de points par :

$$M_0 = 0; M_1 = T_1(M_0); M_n = T_1(M_{n-1}).$$

- 4 Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
- 5 Pour tout entier n , on pose $d_n = \Omega M_n$. Démontrer que (d_n) est une suite géométrique, converge-t-elle ?

Exercice : SPD 9

Soit $P(z) = z^3 + 32z^2 - 32 - 5 - 20i, z \in \mathbb{C}$.

- 1 Démontrer que $2 + i$ est une racine de $P(z)$.
- 2 En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.
- 3 Dans le plan (P) rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B et C d'abscisses respectives $2 + i, -1 - 2i$ et $-4 + i$.
- 4 Placer les points A, B et C puis calculer les distances AB et BC .
- 5 Démontrer que $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = (\vec{BA}, \vec{BC})[2\pi]$.
- 6 En déduire une mesure en radian de l'angle $(\vec{BA}, \vec{BC})$.
- 7 Déduire de tout ce qui précède la nature du triangle ABC .
- 8 Soit r la rotation qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C .

Montrer que l'application f associée à r est définie par : $f(z) = iz - 3 - i$.

- 9 Préciser les éléments géométriques caractéristiques de f .
- 10 Soit $T : M(z) \mapsto M'(z')$ telle que $z' = i\alpha^2 z + \alpha, \alpha \in \mathbb{C}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles T est une homothétie de rapport 2.
- 11 Déterminer les éléments géométriques caractéristiques de T pour le nombre complexe α vérifiant $|\alpha| = \sqrt{2}$ et $\arg(\alpha) = -\frac{\pi}{4}$.
- 12 On considère la transformation $h = f \circ T$. On suppose dans ce qui suit $\alpha = 1 - i$.
- 13 Montrer que $h(z) = 2iz - 2$.
- 14 Donner les éléments géométriques caractéristiques de g .

Problème : SPD: AIBD

Deux avions, l'avion A et l'avion B, se déplacent sur le tarmac de l'aéroport international Blaise Diagne (AIBD), modélisé par le plan complexe. Leurs trajectoires rectilignes sont définies par :

- Avion A : $z_A(t) = (1 + 5i) + t(2 + i), t \in \mathbb{R}^+$
- Avion B : $z_B(t) = (4 + 8i) + t(-1 - 2i), t \in \mathbb{R}^+$

Le contrôleur aérien souhaite vérifier si ces trajectoires sont parallèles ou si elles se croisent. Si elles se croisent, il décide de modifier la trajectoire de l'avion A en appliquant la similitude plane directe $s(z) = 2iz + 3 - i$.

Travail demandé

En se basant sur vos connaissances mathématiques ; en suivant une démarche claire et détaillée aidez le contrôleur aérien à situer les avions sur le tarmac avant leur départ ; à savoir s'il est nécessaire de changer la trajectoire. Si aidez le à trouver la nouvelle trajectoire de l'avion A