

TRAVAUX DIRIGES SUR PROBABILITÉ

Exercice O...

I/ Complète les phrases suivantes :

- 1 La probabilité d'un évènement est comprise entre et
- 2 La probabilité d'un évènement certain est égale à
- 3 La probabilité d'un évènement impossible est égale à
- 4) Soit A et B deux évènements de l'univers Ω . $P(A \cup B) = \dots\dots\dots$. Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = \dots\dots\dots$
- 5 Soit A un évènement et $\bar{A}$ son évènement contraire, $P(A) + P(\bar{A}) = \dots\dots$
- 6 Dans un cadre d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est : $P(A) = \dots\dots\dots$

II/ Réponds par **Vrai** si l'affirmation est vraie ou par **Faux** si elle est fausse :

- 1 La probabilité d'un évènement $A = \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_n\}$ est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le compose c'est-à-dire :
 $P(A) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + P(\{a_3\}) + \dots + P(\{a_n\})$
- 2 soit A et B deux événements de l'univers Ω .
 - a $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$
 - b $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$
 - c Si A et B sont des évènements contraires alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = P(\Omega) = 1$
- 3 Dans la loi de probabilité, la somme des probabilités des évènements élémentaires est égale à 1.
- 4 Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et P une probabilité sur Ω et F la fonction de répartition de X. Si a et b sont des réels alors :
 - a $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$.
 - b $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$
- 5 Dans un arbre pondéré ou arbre de probabilités :
 - a la somme des probabilités portées sur les branches issues d'un nœud est égale à 1.
 - b la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches.
 - c la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins qui le compose.

Exercice 1 : ...

Une urne contient $n + 2$ boules reparties en n boules rouges et en 2 boules blanches. Raoul tire au hasard 2 boules de l'urne.

- 1 Calculer la probabilité des événements :
A : « obtenir des boules de couleur différente » ;
B : « obtenir des boules de même couleur » ;
C : « obtenir une boule rouge et une boule blanche »
D : « obtenir une boule rouge ou une boule blanche »
E : « obtenir au moins deux (2) boules rouges » ;
F : « obtenir au plus deux (2) boules rouges ».
- 2 Raoul appelle X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules blanches obtenues.
 - a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - b) Établir la loi de probabilité de X.
 - c) Donner la distribution de la fonction de répartition de X

Exercice 2 : ...

A/ BODJONA considère le système d'inconnues $(x; y)$ dans $\mathbb{R}^2$ (S) : $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{cases}$ où a, b, c sont trois paramètres pouvant prendre $\{1; 2; 3; 4; 5; \text{ et } 6\}$. Pour déterminer a, b, c, il lance trois fois de suite un dé cubique supposé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et observe sa face supérieure. Le 1^{er} tirage donne a, le 2^e tirage donne b, la 3^e donne c.

- 1 Donner un espace probabilisé fini associé à cette situation.
- 2 Calculer la probabilité des événements suivant :
 - A « (S) admet une infinité de solutions » ;
 - B « (S) n'admet aucune solution » ;
 - C « (S) admet une solution unique » ;
 - D « (S) admet la solution unique (3,0) ».

B/ Un jeu consiste à miser un franc, puis à lancer deux fois un dé cubique équilibré.

- S'il obtient un 6, il gagne 5 F,
- et s'il obtient deux 6, il gagne 10 F.

Il appelle X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

- 1 Montrer que les valeurs prises par X sont - 1, 4 et 9.
- 2 Déterminer la loi de probabilité de X.
- 3 Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 3 : ...

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, BOCCO place les points $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ affectés de leurs coefficients respectifs 1, a et b. Le couple $M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est obtenu de manière suivante :

- a est le résultat du 1^{er} jet d'un dé dont les faces portent les nombres -3; -2; -1; 1; 2; 3
- b est le résultat du 2^{ème} jet du même dé.

Chaque couple a la même probabilité d'apparition.

- 1 Discuter l'existence du barycentre G de ce système de points suivant les valeurs de a et b. Quelles sont alors les coordonnées de G ?
- 2 Quelle est la probabilité pour que le système de points pondérés admette un barycentre G dont l'ordonnée est égale à 1 ?
- 3 Question analogue en imposant au barycentre G d'avoir une abscisse nulle.
- 4 Question analogue en imposant au barycentre G d'appartenir à l'une ou l'autre des bissectrices des axes du repère.

Exercice 4 : ...

Une urne contient 5 jetons portant les réels : $-\sqrt{2}$; -1; 0; 1 et $\sqrt{2}$. Logossou tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne. Elle appelle x le numéro du premier jeton et y celui du deuxième jeton et elle construit le nombre complexe $z = x + iy$.

- 1 Combien de nombres complexes peut-on ainsi construire ?
- 2 Quelle est la probabilité d'obtenir :
 - a Un nombre complexe de module $\sqrt{2}$?
 - b Un nombre complexe dont un argument est $\frac{\pi}{2}$?

- 3** Elle effectue trois fois de suite le tirage successif et avec remise de 2 jetons de l'urne et elle désigne par X la variable aléatoire qui, à l'issue de ces trois tirages associe le nombre de nombres complexes de module $\sqrt{2}$.
Déterminer la loi de probabilité de X

Exercice 5 : ...

En 2023, la campagne électorale pour les élections municipales a fait rage dans un village du Togo. Deux groupes de listes A et B s'affrontent par joutes oratoires quotidiennes. Chaque jour de campagne on interroge un lecteur pris au hasard et on définit les événements suivants :

A_n « l'électeur est favorable à la liste A au n ème jour de campagne »

B_n « l'électeur est favorable à la liste B au n ème jour de campagne »

On note p_n et q_n les probabilités respectives des événements A_n et B_n et on admet que chaque électeur ne se détermine que pour les listes A et B.

- 1** Donner une relation simple entre P_n et Q_n .
- 2** Les arguments des uns et des autres sont si convaincants et les électeurs sont indécis qu'à l'issue de chaque jour de campagne, 20 des électeurs favorables à la liste A et 30 des électeurs favorables à la liste B changent d'avis pour le jour suivant.
- a** Déterminer l'arbre des probabilités.
- b** Donner $P(A_{n+1}/A_n)$ et $P(A_{n+1}/B_n)$.
- c** Montrer que $P(A_{n+1} \cap A_n) = 0,8P_n$ et $P(A_{n+1} \cap B_n) = 0,3Q_n$.
- d** En déduire que $P(A_{n+1}) = 0,8P_n + 0,3Q_n$; puis que $P_{n+1} = 0,5P_n + 0,3$
- 3** Soit la suite (U_n) de terme général $U_n = P_n - 0,6$
- a** Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. Quelle est sa limite ?
- b** En déduire la limite de la suite (U_n) .

Exercice 6 : ...

Une urne U_1 contient 2 jetons numérotés 1 et 2

Une urne U_2 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.

DJAMA, une élève de terminale D, choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne. (Les choix sont supposés équiprobables)

- 1** **a** Quelle est la probabilité qu'elle tire un jeton portant le numéro 1 ?
- b** Elle a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité que le jeton provienne de l'urne U_1 ?
- 2** Elle rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents. Elle tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables
- a** Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques ?
- b** Soit S la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 jetons tirés. Déterminer la loi de probabilité de S
- c** Deux joueurs, ETSE et DEKOU, décident que si la somme des numéros tirés est impaire, ETSE donne 10 euros à DEKOU et que, dans le cas contraire, ETSE reçoit λ euros de DEKOU
Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de λ puis déterminer λ pour que le jeu soit équitable (c'est à dire pour que $E(X)$ soit égale à 0)

Exercice 7 : ...

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5 négatifs.
- Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs. On choisit un individu au hasard.

1 Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2 Quelle est la probabilité

- a** qu'il soit malade et qu'il ait un test positif?
- b** qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif?
- c** qu'il ait un test positif?
- d** qu'il ait un test négatif?

3 Calculer la probabilité

- a** qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif?
- b** qu'il soit malade, sachant que le test est négatif?

Exercice 8 : ...

Pour élire leur conseiller départemental, les habitants du village de Togoville ont à choisir parmi 3 candidats : ATITSO, AHOLOU et AMAVI.

Chaque électeur vote pour un seul candidat.

A la fin du vote, on a constaté que 60% des habitants de Togoville ont effectivement voté. On suppose que la probabilité pour qu'un électeur choisisse ATITSO est égale à $\frac{3}{8}$, celle de AHOLOU est égale à $\frac{1}{2}$ et celle de AMAVI est égale à $\frac{1}{8}$, et ceci indépendamment des autres électeurs.

1 On prend au hasard et successivement 5 habitants de Togoville

- a** Quelle est la probabilité pour que ces 5 habitants aient effectivement voté.
- b** Calculer la probabilité pour qu'un habitant quelconque de Togoville choisisse AHOLOU
- c** Calculer la probabilité pour qu'un habitant de Togoville choisisse AMAVI

2 On prend au hasard 5 habitants de Togoville et on note X la variable aléatoire égale au nombre de voix obtenues par AHOLOU.

- a** Déterminer la loi de probabilité de X .
- b** Calculer son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $V(X)$.

3 Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et P_n la probabilité pour que, parmi n habitants qui votent, aucun ne choisissent AMAVI. Calculer P_n .

4 Quel est le nombre minimum d'habitants qui doivent voter pour que AMAVI obtienne au moins une voix avec une probabilité supérieure ou égale à $\frac{15}{16}$

Exercice 9 : ...

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 500 F CFA et six pièces de 200 F CFA. Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie.

1 Calculer la probabilité de l'événement A : « tirer trois pièces de 500F »

2 soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500F figurant parmi les trois pièces tirées.

- a** Déterminer la loi de probabilité de X .
- b** Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X .

- 3** L'enfant répète cinq fois l'expérience en remettant chaque fois les trois pièces tirées dans le porte-monnaie.
Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

Exercice 10 : ...

Aladji Amadou est un éleveur, il a dans son enclos 3 moutons et 5 chèvres. pour célébrer le retour de sa quatrième épouse de son pèlerinage, il décide d'abattre au hasard quatre de ses bêtes.

- 1** Soit X le nombre de moutons tués.
- a** Déterminer la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition.
 - b** Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type de X .
- 2** On estime qu'un mouton donne environ 20 kg de viande et une chèvre 15kg et qu'il faut au moins 65 kg de viande pour satisfaire les invités.
On note A l'événement « on a tué au moins 2 moutons » et B l'événement « il y a assez de viande ».
- a** Calculer $P(A)$ et $P(B)$
 - b** Calculer $P_A^{(B)}$; A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 11 : ...

Une urne contient dix boules : une boule porte le chiffre 0 ; trois boules portent le chiffre 1 et six boules portent le chiffre 2. On extrait simultanément trois boules ; on suppose que toutes les boules ont la même chance d'être prélevées.

- 1**
- a** Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule portant le chiffre 2 ?
 - b** Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules portant le même chiffre ?
- 2** On désigne par X la somme des chiffres portés par les trois boules.
- a** Déterminer la loi de probabilité de X ; calculer son espérance mathématique.
 - b** Définir et représenter la fonction de répartition de X .

Exercice 12 : ...

Une urne contient quatre boules roses, trois boules vertes et deux boules jaunes indiscernables au toucher. On tire simultanément trois boules de l'urne.

- 1** Déterminer la probabilité d'obtenir :
- a** Les trois couleurs
 - b** Les deux boules jaunes
 - c** Au moins une boule jaune
- 2** Soit X la variable aléatoire qui à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules jaunes tirées.
- a** Déterminer la loi de probabilité de X .
 - b** Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X .
 - c** Définir la fonction de répartition de X .

Exercice 13 : ...

Le porte monnaie de ZOUNGLO contient quatre pièces de 1F, deux pièces de 5 F et trois pièces de 10 F.

Un voleur prélève simultanément trois pièces. On suppose que chaque pièce à la même probabilité d'être tirée. Soient les événements :

A : « le voleur a obtenu trois pièces de même valeur »

B : « le voleur a obtenu une somme de 11 F »

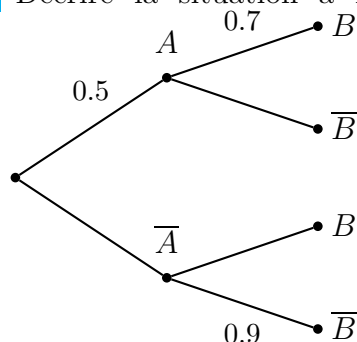
NB : On donnera les résultats sous forme d'une fraction irréductible .

- 1 Calculer la probabilité de chacun des événements A et B.
- 2 Soit X la variable aléatoire associée la somme obtenue par le voleur.
 - a Déterminer les valeurs prises par X
 - b Établir la loi de probabilité de X
 - c Calculer l'espérance mathématique de X

Exercice 14 : ...

Monsieur AZIABA joue un jeu de deux parties dans lequel la probabilité de gagner la première partie est la même que celle de la perdre. En revanche, si AZIABA gagne la première partie, la probabilité qu'il gagne la deuxième partie est 0,7. S'il perd la première partie, la probabilité de perdre la deuxième partie est 0,9. Soient les événements : A : « AZIABA gagne la première partie » ; B : « AZIABA gagne la deuxième partie »

- 1 Décrire la situation à l'aide d'un arbre de probabilité en complétant l'arbre suivant :



- 2 Calculer la probabilité que AZIABA gagne les deux parties : $P(A \cap B)$.
- 3 Montrer que $P(B) = 0,5$.
- 4 Sachant que AZIABA a gagné la deuxième partie, quelle est la probabilité qu'il ait gagné la première : $P(A/B)$.
- 5 Soit X la variable aléatoire associée le nombre de parties gagnées par AZIABA dans ce jeu
 - a Déterminer les valeurs prises par X
 - b Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X
 - c Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est égal à 0,9.

Exercice 15 : ...

Dans un carton se trouve cinq enveloppes. Deux d'entre elles renferment chacune un billet de 1000 francs CFA une autre enveloppe renferme un billet de 2000 francs CFA et les deux derniers sont vides. On tire au hasard et simultanément deux enveloppes.

- 1 Calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir une somme de 1000 francs CFA »
- 2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux enveloppes associe la somme obtenue.

- a** Déterminer les valeurs prises par X .
- b** Établir la loi de probabilité de X .
- c** Calculer l'espérance mathématique de X
- d** Construire la fonction de répartition associée à la variable aléatoire X .

Exercice 16 : ...

Une urne contient sept boules numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 toutes indiscernables au toucher. On tire une boule de l'urne, on note son numéro. On tire une seconde boule parmi les six boules restantes dans l'urne, et on écrit son numéro à droite du premier numéro. On extrait enfin une troisième boule parmi les cinq dernières et son numéro est écrit à droite du deuxième. On forme ainsi un nombre de trois chiffres.

- 1** Combien de nombres différents peut-on obtenir ainsi ?
- 2** Déterminer la probabilité d'obtenir à la fin des trois tirages un nombre impair.
- 3** On gagne 200 FCFA chaque fois qu'on tire un numéro pair, et on perd 100 FCFA sinon. Soit X la variable aléatoire qui définit le gain algébrique du joueur à l'issue des trois tirages.
 - a** Définir la loi de probabilité de X .
 - b** Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .

Exercice 17 : ...

Choisis la bonne réponse pour partie I et II et répond par vrai ou par faux pour partie III

I/ Une urne contient 3 boules blanches et deux noires. On tire successivement au hasard trois boules suivant le protocole : on remet la boule si elle est noire, on ne la remet pas si elle est blanche

- 1** La probabilité d'obtenir aucune boule blanche est :
a) $-(0,6)^3$ b) $(0,4)^3$ c) $-(0,4)^3$ d) $(0,6)^3$
- 2** La probabilité d'obtenir trois boules blanches est :
a) $(0,6)^3$ b) 0,1 c) 0,15 d) 0,42
- 3** La probabilité d'obtenir trois boules blanches est :
a) 0,366 b) $\frac{27}{125}$ c) $3(\frac{3}{5})(\frac{2}{5})^2$ d) 0,012
- 4** La probabilité d'obtenir au plus une boules blanche est :
a) $1 - (0,4)^3$ b) $\frac{183}{500}$ c) 0,547 d) 0,43

II/ Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M_1 et M_2 . Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.

D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70% des acheteurs ont choisi l'ordinateur M_1 et, parmi eux, 60% ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20% des clients ayant acheté l'un un ordinateur M_2 l'ont choisi de couleur blanche.

On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

- 1** La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire est :
a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{50}$ d) $\frac{6}{25}$
- 2** La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :
a) $\frac{21}{50}$ b) $\frac{33}{50}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{12}{25}$

- 3** Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est :
- a) $\frac{4}{11}$ b) $\frac{6}{25}$ c) $\frac{7}{11}$ d) $\frac{33}{50}$

III/ Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque fois votre réponse.

- 1** Deux évènements incompatibles sont indépendants
- 2** Deux évènements contraires sont indépendants
- 3** Si l'évènement B tel que $P(B) \neq 0$ est contenu dans l'évènement A, alors $P_B^{(A)} = 1$
- 4** Si A et B sont deux évènements tels que $P(B) = 1 - P(A)$ alors $B = \bar{A}$
- 5** Si A et B sont deux évènements tels que $P(A/B) = 0,4$, $P(B/A) = 0,3$ et $P(B) = 0,2$ alors $P(A \cup B) = 0.52$
- 6** On lance deux fois de suite un dé parfait. Si la somme est 10 alors la probabilité d'un double 5 est $\frac{1}{3}$
- 7** On lance 10 fois de suite une pièce équilibrée. La probabilité d'avoir au moins une fois pile dépasse 0.999

Exercice 18 : ...

Une urne contient deux jetons ; sur l'un est inscrit le nombre 2 et sur l'autre le nombre -3 . On tire de trois fois de suite un jeton de l'urne en le remettant dans celle-ci à chaque fois, après avoir noté le nombre qui y est inscrit. Si a, b et c désignent les nombres obtenus dans cet ordre, au triplet (a, b, c) , on associe l'équation dans $\mathbb{C}$ $az^2 + bz + c = 0$. (1)

- 1** Quelle est la probabilité pour que l'équation (1) admette deux solutions réelles ?
- 2** Soit X la variable aléatoire réelle, qui à tout triplet obtenu, associe la somme des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (1). Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 19 : ...

Une maladie atteint 10% d'une population. Un test de dépistage permet de détecter si un individu est malade. Ce test doit être positif si l'individu est malade et négatif sinon. La probabilité qu'un test soit positif sachant que l'individu est malade est de 0.008. La probabilité qu'un test soit négatif sachant que l'individu est sain est de 0.02. On appelle valeur diagnostique d'un test, la probabilité qu'un individu dont le test est positif soit malade. Une erreur de test survient lorsque : « l'individu est sain et le test positif » ou « l'individu est malade et le test négatif ».

Consigne 1 Déterminer la valeur diagnostique de ce test.

Consigne 2 Calculer la probabilité d'une erreur de test

Exercice 20 : ...

Vous êtes sur un plateau de télévision, à un jeu dont le prix est une voiture. Devant vous, il y a 3 portes fermées et un animateur. Derrière l'une de ces 3 portes se trouve la voiture à gagner. L'animateur, qui sait où se trouve la voiture, vous demande de désigner l'une des 3 portes. Votre choix fait, il n'ouvre pas la porte que vous lui avez désignée, mais l'une des 2 autres, derrière laquelle ne se trouve pas la voiture (il peut en effet toujours ouvrir une porte derrière laquelle il n'y a pas la voiture et que vous n'avez pas désignée). Dès lors, il vous permet de changer d'avis, c'est - à - dire qu'il vous demande si vous maintenez votre choix initial ou si vous changez votre choix initial en désignant l'autre porte encore fermée. Votre choix est maintenant décisif car il ouvrira la porte la porte que vous désignerez finalement : si la voiture est derrière, vous gagnez, sinon, vous avez perdu.

Consigne : Que faire ? C'est-à-dire maintenez-vous votre choix initial ou le changez-vous, votre but étant bien sûr d'avoir la plus grande chance (probabilité) de gagner la voiture !

Exercice 21 : ...

Pour réduire le nombre d'accidents de la circulation dû à la consommation d'alcool par les automobilistes, la gendarmerie nationale utilise un nouvel alcootest. Après un essai, dans une population composée de 8% de personnes ivres, la gendarmerie recueille les statistiques suivantes :

- 80% des automobilistes ivres sont déclarés positifs à ce test.
- 85% des automobilistes non ivres sont déclarés négatifs à ce test.

Le commandant de brigade de la gendarmerie nationale voudrait avoir le nombre minimal d'automobiliste à contrôler pour que la probabilité d'avoir au moins un test positif soit supérieur à 0,99 .

Il te sollicite pour trouver ce nombre.

Consigne : Utiliser une argumentation basée sur tes connaissances au programme en Mathématiques pour répondre à la préoccupation du commandant.

Exercice 23 : ...

Charlotte, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que pour un jour donné :

- La probabilité qu'il y ait une affluence de clients est de 0,6.
- Lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est de 0,7.
- Lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est de 0,4.

On désigne par A l'évènement « il y a affluence de clients » et par B l'évènement « Charlotte réalise un bénéfice ».

1 On choisit un jour au hasard.

- a** Calcule la probabilité de l'évènement E « il y a affluence de clients et Charlotte réalise un bénéfice »
- b** Démontre que la probabilité $P(B)$ de l'évènement B est égale à 0,58.
- c** Charlotte a réalisé un bénéfice. Calcule la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là. (On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible)

2 Charlotte veut faire une prévision sur trois jours successifs donnés. On désigne par X le nombre de fois qu'elle réalise un bénéfice sur les trois jours successifs

- a** Détermine les valeurs prises par X.
- b** Détermine la loi de probabilité de X. (On donnera l'arrondi d'ordre 3 des résultats)
- c** Calcule l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

3 Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note P_n la probabilité que Charlotte réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs

- a** Justifie que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $P_n = 1 - (0,42)^n$
- b** Détermine la valeur minimale de n pour qu'on ait $P_n \geq 0,9999$

Exercice 24 : ...

Une société nationale d'électricité ayant une production insuffisante en électricité pour assurer une alimentation continue dans tout le pays, procède à des délestages. Ainsi, à partir d'un certain jour les délestages ont débuté dans une ville à un rythme décrit comme suit :

- Le premier jour, la ville est délestée
- Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$
- Si la ville n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{5}{6}$.

On désigne par D_n l'évènement « la ville est délestée le $n^{\text{ième}}$ jour » et P_n la probabilité de D_n .

1 Montrer les égalités suivantes :

$$P(D_1) = 1 ; P(D_{n+1}/D_n) = \frac{2}{9} \text{ et } P(D_{n+1}/\overline{D_n}) = \frac{5}{6}$$

- 2** Exprimer P_{n+1} en fonction de $P(D_{n+1} \cap D_n)$ et $P(D_{n+1} \cap \overline{D_n})$
- 3** En déduire que, pour tout n non nul, on a : $P_{n+1} = -\frac{11}{18}P_n + \frac{5}{6}$
- 4** On pose $U_n = 6P_n - \frac{90}{29}$, pour tout n non nul.
- a** Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- b** Exprimer U_n puis P_n en fonction de n .
- c** Un match de football entre Réal Madrid et Barcelone doit se jouer le 20^{ème} jour.
Quelle est la probabilité pour que les habitants de la ville suivent le match sans détestation ?

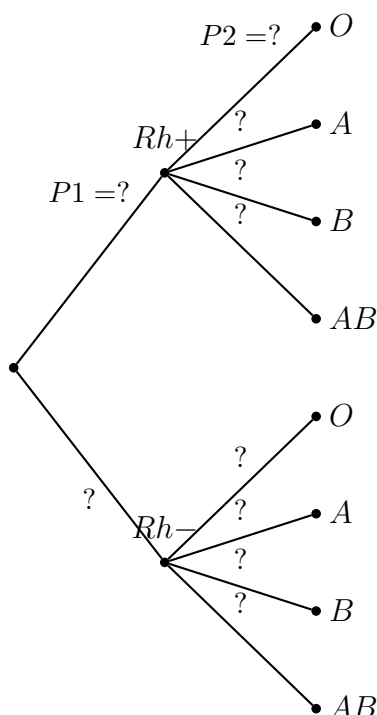
Exercice 25 : ...

Voici le tableau de répartition des principaux groupes sanguins des habitants du Togo :

	O	A	B	AB
Rhésus +	35%	38,1%	6,2%	2,8%
Rhésus -	9%	7,2%	1,2%	0,5%

Dans cet exercice, les résultats numériques demandés seront, s'il y a lieu, arrondis à trois décimales

- 1** L'objectif de cette question est de compléter à l'aide de données de ce tableau l'arbre suivant, à recopier sur la copie.



L'expérience consiste à choisir une personne au hasard dans la population donnée (les habitants du Togo).

On note $Rh+$ l'événement " la personne a le facteur $Rh+$ "

On note O l'événement " la personne appartient au groupe O "

- a** Déterminer la probabilité P_1 ; c'est à dire $P(Rh+)$: On détaillera le calcul effectué puis on reportera ce résultat dans l'arbre.
- b** Déterminer de même la probabilité P_2 (en détaillant les calculs).
- c** Compléter le reste de l'arbre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante (il est inutile de détailler les nouveaux calculs)

- 2** **a** Comment peut-on, à partir de l'arbre complète, déterminer la probabilité de O ? Vérifier ce résultat à l'aide du tableau.
- b** Quelle est la probabilité pour qu'une personne appartenant au groupe O ait le facteur Rh+ ?
- 3** **a** On considère n personnes choisies au hasard dans la population donnée (les habitants du Togo). Calculer, en fonction de n ; la probabilité p pour qu'il y ait, parmi elles, au moins une personne du groupe O.
- b** Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle on a $P \geq 0,999$.

Exercice 26 : ...

Un sac contient 03 boules numérotés respectivement **0**, **1** et **2** indiscernable au toucher. On tire une boule du sac, on note son numéro x et la remet dans le sac, puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. A chaque tirage de deux boules, on associe le plan, muni de repère orthogonal($O, \vec{i}, \vec{j}$), le point M de coordonnées $(x; y)$. On désigne par D le disque de centre O et de rayon 1,7. Les résultats seront données sous forme de fraction irréductible.

- 1** Placer dans le plan muni de repère ($O, \vec{i}, \vec{j}$) les points correspondant aux résultats possibles.
- 2** Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A $\ll$ le point M est sur l'axe des abscisses $\gg$
B $\ll$ le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 $\gg$
- 3** Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, on associe la somme $x^2 + y^2$. Déterminer la probabilité de la variable X et la représenter dans le plan. Calculer son espérance mathématique $E(X)$.
- 4** **a** Définir la fonction de répartition F et la représenter.
b Montrer que la probabilité de l'évènement $\ll$ le point M appartient au disque D $\gg$ est égale à $\frac{4}{9}$.
- 5** On tire 5 fois de suite, de façon identique et indépendante deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi 5 points du plan. Quelle est la probabilité de l'évènement suivant C $\ll$ Au moins un de ces points appartient au disque D $\gg$.
- 6** On renouvelle n fois de suite de façon identique et indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise, on obtient ainsi n points du plan. Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement $\ll$ au moins un de ces points appartient au disque D $\gg$ soit supérieur ou égale à 0,9999.

Exercice 27 : ...

On considère deux urnes U_1 et U_2
L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.
On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :
Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1 , on note sa couleur et on remet dans U_1 .
Étape n ($n \geq 2$) :
• Si la boule tiré à l'étape $(n - 1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1 , on note sa couleur et on la remet dans U_1 .
• Si la boule tiré à l'étape $(n - 1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2 , on note sa couleur et on la remet dans U_2 .
On note A l'évènement $\ll$ le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n $\gg$ et P_n sa probabilité. On a donc $P_1 = 1$

- 1 Calculer P_2
- 2 Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $P_{n+1} = 0,8P_n + 0,05$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
- 3 Calculer P_3
- 4
 - a Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $P_n > 0,25$
 - b Démontrer que la suite (P_n) est décroissante.
 - c En déduire que la suite (P_n) est convergente vers un réel noté l
 - d Justifier que l vérifie l'équation : $l = 0,8l + 0,05$. En déduire la valeur de l .

Exercice 28 \

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.
Une urne B contient un boules rouge et neuf boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

APETI dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

- 1 Soit R l'évènement « APETI obtient une boule rouge ». Montrer que $P(R) = 0,15$
- 2 Si APETI obtient une boule rouge, la probabilité que la boule provienne de l'urne A est -t-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle de l'urne B ?

Partie B

APETI répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans les contions identiques et indépendantes(c'est - à -dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).

Soit x un entier naturel non nul.

Lors de chacune des deux épreuves, APETI gagne x francs CFA s'il obtient une boule rouge et perd 2000 francs CFA s'il obtient une boule noire.

On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique de APETI en francs CFA en terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2000x$, $x - 2000$ et -4000

- 1 Déterminer la loi de probabilité de G .
- 2 Exprimer l'espérance $E(G)$ de la variable aléatoire G en fonction de x .
- 3 Pour quelles valeurs de x a - t-on $E(G) \geq 0$?

Exercice 29 : ... \

Tovor dispose d'une contenant 3 boules rouges, 4 boules blanches et n boules verte ($0 \leq n \leq 10$). Les boules sont indiscernables au toucher.

- 1 Tovor tire au hasard une boule de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
 - a R : « la boule tirée est rouge »
 - b B : « la boule tirée est blanche »
 - c V : « la boule tirée est verte »
- 2 Tovor décide de jouer une partie. Celle-ci se déroule de la manière indiquée ci-dessous.
Tovor tire une boule de l'urne
 - si elle est rouge, il gagne 16F,
 - si elle est blanche, il perd 12F ;

- si elle est verte, il remet la boule dans l'urne, puis tire une boule de l'urne ;
- si cette boule est rouge, il gagne 8F ;
- si cette boule est blanche, il perd 2F ;
- si cette boule est verte, il ne perd rien ni ne gagne rien

Les tirages sont équitables et deux tirages successifs sont indépendants.

Au début de la partie, Tovor possède 12 F. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme que Tovor possède à l'issue de la partie (un tirage ou deux tirages selon le cas)

a Déterminer les valeurs prises par X .

b Déterminer la loi de probabilité de X .

c Montrer que l'espérance mathématique de X est $12 + 16 \frac{n}{(n+7)^2}$

3 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(x) = \frac{x}{(x+7)^2}$.

Étudier les variations de f .

4 En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique de X est maximale. Calculer cette valeur maximale (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

Exercice 30 : ...

Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend **Olé** qui lui coûte 1500 F.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$; s'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel non nul, on appelle R_n l'évènement « l'employé est en retard le jour n ». On note p_n , la probabilité de R_n et q_n , celle de $\overline{R}_n$. On suppose que $p_1 = 0$

1 a Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R}_n}(R_{n+1})$

b Déterminer $P(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $P(R_{n+1} \cap \overline{R}_n)$ en fonction de q_n .

c Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n .

d En déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}p_n$

2 Pour tout entier naturel non nul, on pose $v_n = p_n - \frac{4}{23}$

a Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$

b Exprimer v_n puis p_n en fonction de n .

c Justifier que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 31 : ...

I/ Complète le texte suivant :

Une a..... est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux éventualités (issues) : l'une est appelée succès de probabilité p et l'autre échec de probabilité $q = \text{.....b.....}$. Sa loi de probabilité est appelée loi de Bernoulli de paramètre c..... Si on répète n ($n \geq 2$) fois de suite une épreuve de Bernoulli de façons identique et indépendante, alors on parle du d..... de paramètre n (nombre de répétitions de l'épreuve) et p (la probabilité du succès). La loi de probabilité X associée à un schéma de Bernoulli est appelée loi e.... de paramètre n et p . L'espérance mathématique $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de X sont données par les formules suivantes : $E(x) = \text{....f.....}$, $V(X) = \text{....g.....}$ et $\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times q}$. Si X la variable aléatoire réelle désignant le nombre k de succès au cours des n épreuves, alors la probabilité d'obtenir exactement k succès au cours des n épreuves est donnée par la formule suivante : $P(X = k) = \text{.....h....}$.

II/ Application de la partie I/. Complète le texte suivant :

Un dé cubique est mal équilibré : la probabilité d'obtenir 6 est de $\frac{1}{7}$. On appelle succès l'événement « obtenir 6 » et échec « obtenir un numéro différent de 6 ». Cette expérience qui ne comporte que deux issues est épreuve de Bernoulli de paramètre i.... Si on effectue 5 fois de suite cette expérience de façons identique et indépendante, on est en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètre ...j.... et ...k..... On appelle X , la variable aléatoire comptant le nombre de succès à l'issue des 5 lancés. L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \text{....l.....}$ et sa variance est $V(X) = \text{.....m.....}$. La probabilité d'obtenir exactement 3 fois le chiffre 6 à l'issue des 5 lancés est $P(X = 3) = \text{.....n.....}$. La probabilité d'obtenir au moins une fois le chiffre 6 à l'issue des 5 lancés est $P(X \geq 1) = 1 - P(X = \text{...r..}) = \text{.....s.....}$.

III/Un sac contient 20 jetons indiscernables au toucher. Six d'entre eux sont rouges et les autres sont bleus.

- 1 Akouvi Ruth tire un jeton au hasard. Quelle est la probabilités P qu'elle obtienne un jeton rouge?
- 2 Elle tire successivement 6 jetons un à un, avec remise.
 - a Quelle est la probabilité P_1 qu'elle obtienne exactement trois jetons rouges?
 - b Quelle est la probabilité P_2 qu'elle obtienne exactement un jeton rouge ou un jeton bleu?
 - c Quelle est la probabilité P_3 qu'elle obtienne au moins quatre jetons rouges?

)

"L'élève qui apprend son cours a toujours la moyenne"