

Situations sur les fonctions numériques T_{Sexp}

Limites

Limites en un point x_0

Situation1

Calcule les limites suivantes aux points x_0 donnés :

$$\begin{array}{llll} \text{a- } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{-x + 2}; & \text{b- } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}; & \text{c- } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + 5}{x^2 - x - 2}; & \text{d- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \\ \text{e- } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}; & \text{f- } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{-x^2 - 3x + 4} \end{array}$$

Situation2

Calcule les limites suivantes aux points x_0 donnés :

$$\begin{array}{llllll} \text{a- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}; & \text{b- } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1 - \sin x}; & \text{c- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}; & \text{e- } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}; & \text{f- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan x}; \end{array}$$

Limites à l'infinie

Situation3

Calcule les limites suivantes à l'infinie :

$$\begin{array}{llll} \text{a- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8}{x + 1 - x^2}; & \text{b- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} - 1}{x + 2}; & \text{c- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 2}{5x^2 - x}; & \text{d- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \\ \text{e- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3}{\sqrt{4x^2 + x} - 5}; & \text{f- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}; & \text{g- } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - |x|}{2x - 2}; & \\ \text{h- } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x + \sqrt{x^2 + x + 1}; & \text{i- } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin x}{x + 1} \text{ (théorème des gendarmes)} \end{array}$$

Limites et asymptotes

Situation4

Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous (on Donnera ci-possible les éventuelles asymptotes ou possibilité d'asymptotes)

$$\text{a- } f(x) = \frac{x^2 + 5}{-x + 2}; \quad \text{b- } f(x) = \frac{-x^2 + 5}{x^2 + 5x - 6}; \quad \text{c- } f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{-x}; \quad \text{d- } f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1}$$

Situation5

Soit la fonction f dénie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.

On note (Cf) sa courbe dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

a- Etudie les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. La courbe (Cf) admet – elle une asymptote horizontale ?

b- Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.

Continuités

Continuité en un point x_0

Situation6

Etudie la continuité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

$$\text{a- } \begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 + x - 6} \\ f(2) = 0 \end{cases} \text{ et } x_0 = 2 \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad x_0 = 1$$

Continuité et condition de faisabilité

Situation7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2} \text{ si } x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(2) = a \end{cases}$$

Détermine la valeur de a pour que f soit continue en $x_0 = 2$

Situation8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + ax \text{ si } x \in]-\infty ; -1[\\ f(x) = 2x - 1 \text{ si } x \in]-1 ; 1[\\ f(x) = b(x^2 - 1) \text{ si } x \in]1 ; +\infty[\end{cases}$$

- a) Détermine le réel a pour que f soit continue au point $x_0 = -1$
- b) Pouvez – vous Détermine la valeur de b pour que f soit continue au point $x_0 = 1$?

Prolongement par continuité

Situation 9

Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction f et Détermine (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_0 .

$$\text{a) } \begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ x_0 = 0 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} f(x) = \frac{tgx}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Situation 10

Soient f et g deux fonctions définies respectivement par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \text{ et } g(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}}$$

a- Détermine les ensembles de définitions D_f et D_g respectivement des fonctions f et g .

b- Vérifie que la fonction g est le prolongement par continuité de la fonction f en $x_0 = 0$.

Prof: Aboubacar N'Diaye

Situation 11

On considère la fonction g de la variable réelle x définie par $g(x) = \frac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}$

- 1) Détermine son ensemble de définition Dg .
- 2) Montre que g admet en 2 un prolongement par continuité que l'on notera par h .
- 3) Montre que h est dérivable en 2 puis Donne l'équation de la tangente à la courbe (C) de h au point d'abscisse 2.

Dérivabilité

Dérivabilité en un point x_0

Situation 12

Etudie la dérivabilité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

$$\text{a) } \begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 + x - 6} \\ f(2) = 0 \end{cases} \text{ et } x_0 = 2 \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad x_0 = 1$$

Dérivabilité et condition de faisabilité

Situation 13

Détermine les réels a et b pour que f soit continue et dérivable aux points $x_0 = 1$

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+b}{x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Situation 14

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} \text{ si } x \geq -1 \\ f(x) = 2x + a \text{ si } x < -1 \end{cases}$$

- 1) Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue au point -1 ?
- 2) Pour cette valeur, étudier la dérivabilité de la fonction f au point -1 .

Application de la dérivée

Situation 15

Détermine une équation de la tangente en $M_0(x_0; f(x_0))$ à la courbe (C) de f dans les cas suivants :

$$\text{a) } f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3 \text{ et } x_0 = -2 \quad ; \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \text{ et } x_0 = 1$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{\tan x}{x} \text{ et } x_0 = 0$$

Situation 16

Détermine la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

Prof: Aboubacar N'Diaye

$$a) f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3 ; b) f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} ; c) f(x) = (-x^2 + 2x)^3$$

$$d) f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 1} ; e) f(x) = (1 - 3x^2)(-x^2 + 1) ; f) f(x) = \cos^3 x$$

$$g) f(x) = (x - 1)\sqrt{x^3 - x^2} ; h) f(x) = \sin(3x - 1)^4 ; i) f(x) = \sin^4(3x - 1)$$

Situation 17

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$

- 1) Ecris de $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- 2) a- Etudie la continuité de f aux points $x_0 = -1$ et $x_0 = 3$.
b- Que dira-t-on quant à la dérivabilité de f aux points $x_0 = -1$ et $x_0 = 3$?
- 3) Donne une équation de la tangente à gauche et à droite aux points $x_0 = -1$ et $x_0 = 3$.
- 4) Dresse le tableau de variation de la fonction f .

Etudes de fonctions

Analyse et interprétation d'un tableau de variation

Situation 18

Analyse puis interprète chacun des tableaux de variations suivants afin de préciser :

- a- les domaines de définition.
- b- les limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes et possibilités d'asymptotes.
- c- Donne l'allure de la courbe (C_f) dans chaque cas.

1) f est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

De plus :

- La courbe (C_f) admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
- La courbe (C_f) admet l'axe ($y'Oy$) comme branche parabolique.

2) g est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$	0	1	$-\infty$	

De plus : La courbe (C_g) admet l'axe ($y'Oy$) comme branche parabolique.

3) h est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
$h'(x)$	+		+ 0 -		-	
$h(x)$	-1	$+\infty$	$-\infty$	1	$+\infty$	-1

4) p est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
$p'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$p(x)$	2	0	$+\infty$	$+\infty$	1	2

Situation 19

Dresse le tableau de variation de la fonction numérique donnée, partant de ses renseignements fournis dans les cas suivants :

1) Pour f :

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que l'équation $f'(x) = 0$ admet les solutions $x = -1$ et $x = \frac{3}{2}$
- f n'est croissante qu'entre les zéros de sa dérivée f' et les points $E_1\left(\frac{3}{2}; 4\right)$ et $E_2\left(-1; -\frac{5}{2}\right)$ sont ses extremums
- les droites $y = -2$ et $y = 3$ sont ses asymptotes respectives en $-\infty$ et $+\infty$

2) Pour g :

- g est définie sur $]-\infty; 0] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$ et admet des demi tangentes verticales aux points d'abscisses 0 et $\frac{5}{2}$
- g est strictement décroissante sur son ensemble de dérivabilité.
- la droite $y = -x$ est à la fois asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$
- les points de coordonnées $(0; -3)$ et $\left(\frac{5}{2}; 1\right)$ sont sur la courbe de g .

3) Pour h :

- h est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0; 2\}$ et continue sur $\mathbb{R}$.
- le point de coordonnées $(0,3; 0,4)$ est l'extremum maximum absolue de la courbe (Ch) et h est croissante sur $[0; 0,3] \cup [2; +\infty[$
- les droites d'équations $y = -1$ et $y = -2x + 1$ sont asymptotes de (Ch) respectivement en $-\infty$ et $+\infty$
- les points de coordonnées $(0; 0)$; $(1; 0)$; et $(2; -2)$ appartiennent à (Ch)

Analyse et interprétation d'un graphique

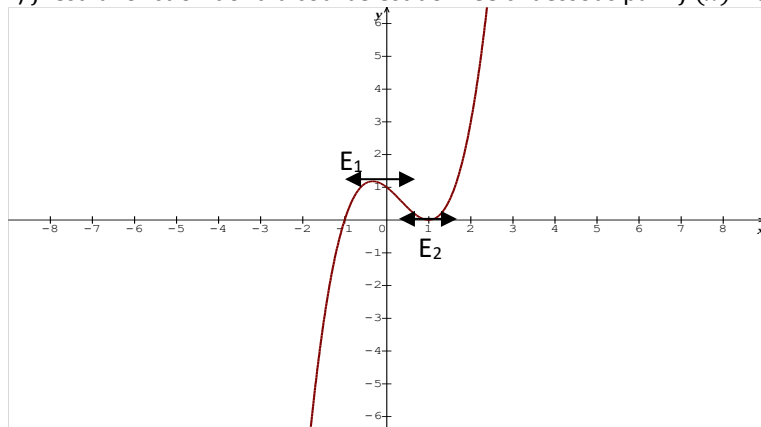
Situation 20

Analyse chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.

a- Détermine les réels a ; b ; c en utilisant le graphique.

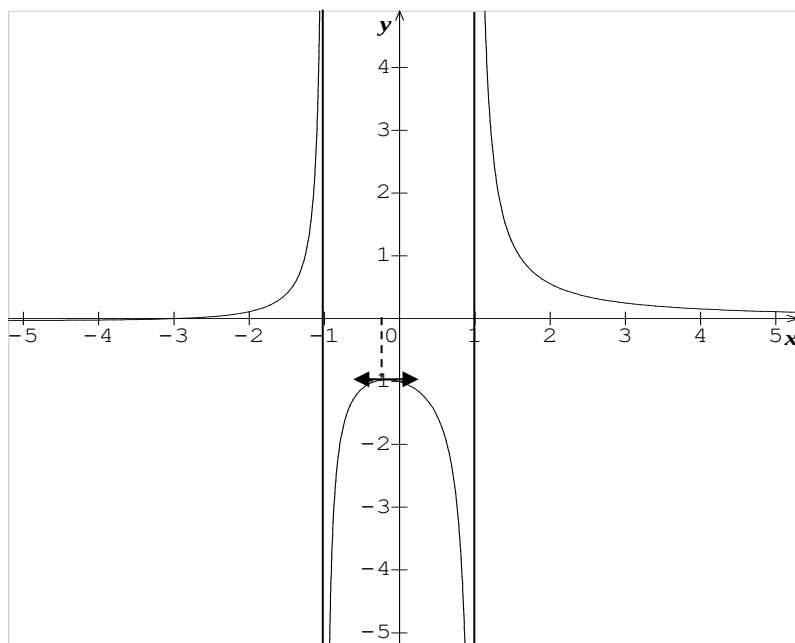
Prof: Aboubacar N'Diaye

1) f est la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

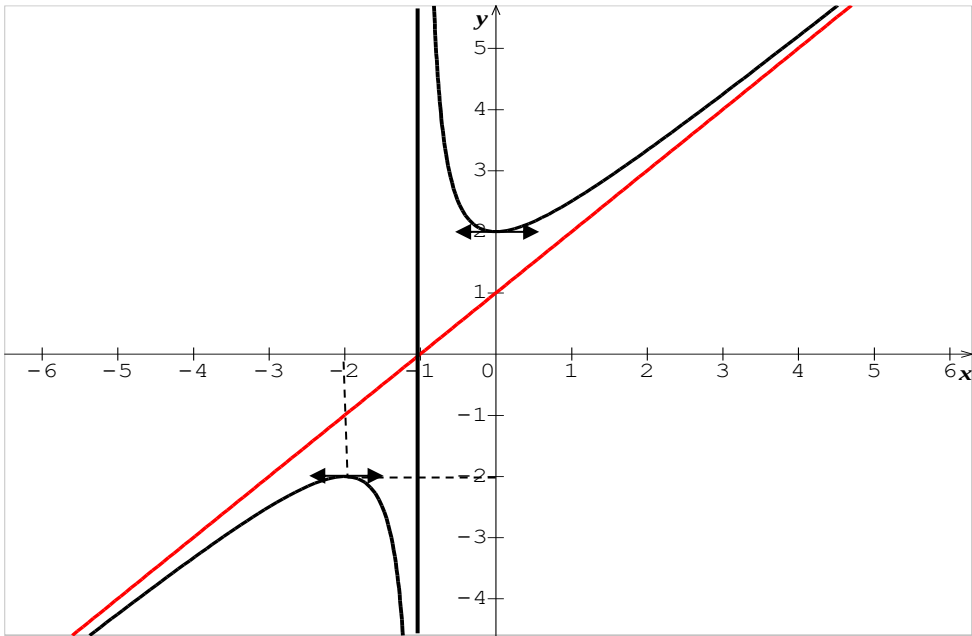


De plus : $E_1\left(-\frac{1}{3} ; \frac{32}{27}\right)$ et $E_2(1 ; 0)$ sont les sommets de la courbe (Cf)

2) La fonction donnée est g telle que : $g(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + d}$



3) La fonction donnée est h telle que : $h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$



Fonctions d'initialisations

Situation 21

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_f .
- 2) Calcule les limites aux bornes de D_f .
- 3) Détermine les réels a ; b et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$
- 4) a- Montre que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe C_f .
b- Détermine la position de la courbe C_f et de la droite (D) .
- 5) Montre que le point $I\left(-\frac{1}{0}\right)$ est centre de symétrie pour la courbe C_f .
- 6) Détermine une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -2
- 7) Calcule la dérivée f' de la fonction f puis Dresse le tableau de variation de f .
- 8) Construire la courbe C_f et la droite (D) dans le même repère.

Situation 22

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Détermine les réels a ; b ; c et d tel que :
 - a- La courbe C_f admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.
 - b- La courbe C_f passe par le point $A\left(\frac{1}{-2}\right)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -5 .
- 2) Etudie la fonction f puis représente sa courbe C_f dans le repère.

Situation 23

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Détermine les réels $a; b; c; m; n$ et p tel que :

- a- La courbe C_f admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.
- b- La courbe C_f passe par les points $A(-1, 1)$ et $B(3, 0)$ et admet au point $B(3, 0)$ une tangente de coefficient directeur -3 .

Situation 24

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Etudie les variations de f .
- 2) Préciser les asymptotes à la courbe C_f .
- 3) Soit Δ l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées, Détermine la position de C_f par rapport à Δ dans l'intervalle $] -1; 1 [$.
- 4) Construire C_f .

Situation 25

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Etudie et construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 2) Montre que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de (C_f)
- 3) Discute graphiquement suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation : $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$
- 4) Montre que la restriction h de f à l'intervalle $I = [2; +\infty [$ est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
- 5) Construire la courbe représentative de la fonction réciproque h^{-1} de h dans le même repère que (C_f) .

Fonctions biologiques

Situation 26

Une population de bactéries (exprimer en millier) a un rythme de croissance modélisé par la fonction $f(t) = \frac{60t + 40}{t + 10}$ où $t \in [0; +\infty [$ est le temps écoulé en jours.

- 1) Quelle est la population de cette culture au bout de 3 jours ? ; 5 jours ? ; 21 jours ?
- 2) Détermine les réels a et b tels que $f(t) = a + \frac{b}{t + 10}$ pour $t \in [0; +\infty [$.
- 3) a- Calcule la dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t)$.
b- Justifier que la population de bactéries est croissante.
- 4) a- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(t) = 52$.
c- En déduis à partir de quel jour la population de bactéries sera égal à 52.000 individus.

Prof: Aboubacar N'Diaye

- 5) a- Quelle est la limite de f en $+\infty$?
 b- En déduis une interprétation quant à la population de bactéries.
- 6) Trace la courbe (C_f) de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
 Echelle : $1\text{ cm} \rightarrow 10\text{ ans}$ sur l'axe (ox) et $1\text{ cm} \rightarrow 10.000$ individus sur l'axe (oy).

Situation 27

Un laboratoire médical désire mesurer le nombre de personne contaminés par jour du à un virus à partir d'une « fonction de contagion » f , définie sur l'intervalle $[1 ; 30]$ par :

$$f(t) = 0,02t^3 - 1,4t^2 + 22t + 640 \text{ où } t \text{ désigne la durée en jour de propagation.}$$

On appelle f' la dérivée de la fonction f comme la fonction « contagion ».

On dit qu'il y a « contagion » lorsque f' est positive. Sinon on dit qu'il y a « non contagion ».

1) Quelle est le nombre de personne contaminé entre le 1^{er} jour et le 21 jour ?

2) Détermine les intervalles où il ya contagion et non contagion.

3) On désigne par $S = \int_{10}^{15} f(t)dt$, l'aire en m^2 de la zone contaminée par la virus.

Détermine cette aire.

Situation 28

Une culture de bactéries a un rythme de croissance (*exprimé en mm/jour*) et modélisé par la

fonction $C(x) = \frac{3000}{(1 + 0,25x)^2}$ où $x \in [0 ; +\infty[$ est le temps écoulé en jours.

On admet que ce rythme de croissance est la dérivée de la fonction population $p(x)$ c'est-à-dire que $p'(x) = C(x)$ et au temps $x = 0$, la culture compte 1000 bactéries c'est-a-dire :

$$p(0) = 1000.$$

1) a- Détermine $p(x)$ désignant la population des bactéries après x jours.

b- Evaluer le nombre de bactérie ainsi que leur rythme de croissance au bout de 3 jours.

c- Après combien de jours le nombre de bactéries atteindra-t-il 1500 individus ?

2) a- Etudie les variations de p sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

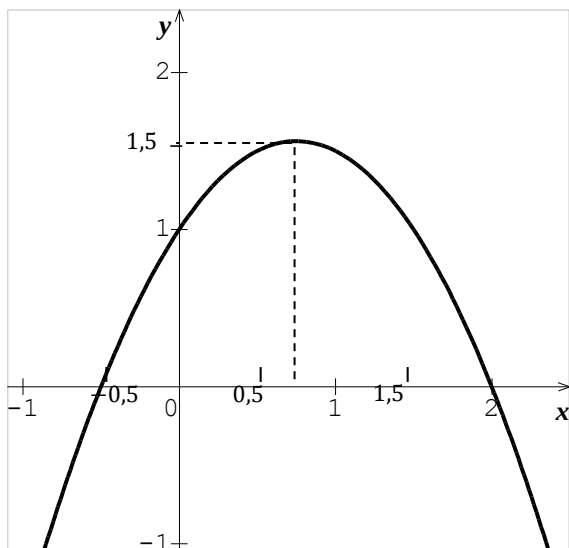
b- Calcule la limite de $p(x)$ en $+\infty$.

Situation 29

Un malade contracte une fièvre dont la température en degré est modélisée par la fonction t définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $t(x) = -x^2 + 1,5x + 1$. Où : x est le temps écoulé exprimé en seconde et $t(x)$ est la température de la fièvre exprimé en degré.

1) Quelle est la température du malade à : 0 s ? ; 1s ? et 2s ?

2) La fonction t est représentée par la courbe ci-dessous :



- a. Indiquer à qu'elle instant la fièvre atteint sa température maximale.
- b. Donne les intervalles respectifs de montée et de descente de la fièvre.
- 3) On désigne par T une primitive de la fonction t définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$.
 - a. Calcule T.
 - b. Calcule la température moyenne du malade pendant l'intervalle de temps $[0 ; 2]$.
(on donnera une valeur décimale arrondie au dixième).

Rappel : Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[a ; b]$.

La valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[a ; b]$, est le nombre m tel que :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Fonctions circulaires

Situation 30

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos^3 x}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) Montre que l'ensemble de définition D_f peut se réduire
- 2) Etudie la parité et la périodicité de f puis en déduis un intervalle d'étude D_E .
- 3) Montre que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{3\cos 2x}{\cos^4 x}$ puis Dresse le tableau de variation de f .
- 4) En déduis le tracé de (C_f) sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ par symétrie.

Situation 31

Soit la fonction f définie sur $[-\pi ; \pi]$ par $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_f .
- 2) Etudie la parité et la périodicité de f puis en déduis un intervalle d'étude D_E .
- 3) Montre que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{3(1 - 2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$

Prof: Aboubacar N'Diaye

10/17

Tel: 73 22 61 98

- 4) Etudie le signe de $(1 - 2\cos x)$ sur D_E puis en déduis les variations de f sur D_E .
- 5) Détermine les coordonnées des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.
- 6) En déduis le tracé de (Cf) sur $[-\pi ; \pi]$ par symétrie.

Situation 32

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \sin 2x \cos x$.
Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) a- Prouver que la verticale $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe Cf et étudier la parité de f .
b- Justifier que l'on peut étudier f sur $D_E = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ puis décrire les étapes à suivre pour avoir la courbe Cf sur $\mathbb{R}$.
- 2) a- Détermine $f'(x)$ et justifier que $f'(x) = 2\cos x(3\cos^2 x - 2)$ pour tout $x \in D_E$
b- Etablis le tableau de variation de f sur D_E
- 3) Trace (Cf) sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ puis sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ par symétrie.

Fonctions paramétriques

Situation 33

Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = (2m - 1)x^4 - (m + 4)x^2 - m + 5$.
Où x est la variable et m est un paramètre réel.

Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) Montre que toutes les courbes (C_m) passent par deux points fixes dont on Déterminera les coordonnées.
- 2) Etudie la fonction f_0 puis représente sa courbe (C_0) dans le repère orthonormé.

Situation 34

Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m + 1)x + 3}$.

Où x est la variable et m est un paramètre réel.

Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

- 1) Montre que toutes les courbes (C_m) passent par trois points fixes dont on Déterminera les coordonnées.
- 2) Détermine m pour que le point d'intersection I de (C_m) et l'asymptote parallèle à $(x'ox)$ ait pour abscisse $\frac{3}{2}$.
- 3) Etudie les fonctions f_0 et f_1 puis représente leur courbe respectives courbe (C_0) et (C_1) .

Situation 35

Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \frac{x^2 - mx}{x^2 - 1}$.

Où x est la variable et m est un paramètre réel différent de 1.

Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Donne le tableau de variation de la fonction f_m suivant les valeurs de m .

(On distinguera les cas où $m = -2$; $m = 2$).

2) Comparer $f_m(x)$ et $f_{-m}(-x)$ puis Donne la position relative des courbes (C_m) et (C_{-m}) .

3) Montre que toutes les courbes (C_m) passent par un même point fixe dont on Déterminera les coordonnées..

4) Représente leur courbe respectives (C_{-2}) et (C_2) .

Fonctions auxiliaires

Situation 36

Partie A : On considère le polynôme P définie : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1) Donne le tableau de variation de P .

2) Démontre que l'équation $P(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle $]1,6 ; 1,7[$.

3) Donne le signe de $P(x)$ dans l'intervalle $] -1 ; +\infty [$.

Partie B : On considère la fonction $f :]-1 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1-x}{1+x^3}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Justifier la dérivabilité de f sur $] -1 ; +\infty [$.

b) Calcule $f'(x)$ puis établir que $f'(x) = \frac{P(x)}{(1+x^3)^2}$

2) Donne le tableau de variation de f .

3) Détermine les équations des asymptotes à la courbe C_f de f .

4) Place α puis Trace C_f .

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

Montre que g réalise une bijection de $[2 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

6) Trace $C_{g^{-1}}$ où g^{-1} est la bijection réciproque de la fonction g restriction de f à l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

Situation 37

Partie A : On donne la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) Etudie les variations de g et Dresse son tableau de variation.

2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2,19 < \alpha < 2,20$

3) En déduis le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f .

2) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$, on a : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$

3) Etudie le signe de $f'(x)$ et en déduis les variations de f puis son tableau de variation de la fonction f .

4) Montre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe C_f . Etudie la position de C_f et (D) .

5) Trace C_f .

Situation 38

- 1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$
- Etudie les variations de la fonction g .
 - Montre que $g(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on Déterminera.
 - En déduis le signe de g sur $\mathbb{R}$
- 2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$.
- Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- On note (D) et (D') les droites d'équations respectives : $y = -3x$ et $y = x$.
- Etudie les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$
 - Montre que $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$
 - En déduis le tableau de variation de f .
- 3) a- Détermine la limite en $-\infty$ de $f(x) - (-3x)$.
b- Quelle conséquence graphique peut-on déduis de ce résultat ?
- 4) a-Montre la droite (D') est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$
b-Etudie la position de (C) par rapport aux deux droites (D) et (D').
- 5) Trace la courbe (C), les droites (D) et (D').

Fonction irrationnelle –fonction avec valeur absolue

Situation 39

Soit la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Donne l'ensemble de définition D_f de f .
- Etudie les variations de f , puis Trace avec soins sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On donne : $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,6$ et $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -0,3$

Situation 40

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x - \sqrt{x^2 + 8} < 0$
 - Etudie les limites de f aux bornes de D_f . En déduis que la courbe (C) de f admet une asymptote horizontale dont on précisera une équation.
 - Démontre que la droite (D) d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C) en $-\infty$
- Calcule $f'(x)$. Puis en déduis de 1) a) le sens et le tableau de variation de f .
 - Trace (C) et (D) dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm)

Situation 41

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{|x^2 + x| + 1}{|x| + 1}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Détermine le domaine de définition de f et écris $f(x)$ sans les symboles "valeur absolue"
- 2) Etudie la dérivabilité de f en -1 et en 0 , puis interprète géométriquement les résultats
- 3) Etudie les variations de f
- 4) Montre que les droites d'équations $y = -x - 2$ et $y = x$ sont asymptotes à la courbe (C) et f
- 5) Trace (C)

Situation 42

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f
- 2) Ecris $f(x)$ sans valeur absolue
- 3) Etudie la dérivabilité de f en $x_0 = -1$ et en $x_0 = 3$ puis interprète graphiquement vos résultats.
- 4) Montre que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$ et une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$.
- 5) Dresse son tableau de variation
- 6) Trace dans un repère orthonormé la courbe (C) de f .

Situation 43

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x| \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition D_f de f
- 2) a) Etudie la dérivabilité de f au point $x_0 = 0$, en déduis l'ensemble de dérivabilité de f .
b) Calcule $f'(x)$ pour x élément des intervalles de dérivabilité.
c) Calcule les limites de $f(x)$ aux bornes de D_f et préciser les équations des asymptotes à la courbe (C) de f .
d) Dresse le tableau de variation de f .
- 3) Trace la courbe (C) de f .

Situation 44

On considère, dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.

Soit A le point de coordonnées $(1; 0)$ et A' le point de coordonnées $(-1; 0)$.

- 1) Pour tout point H du segment $[AA']$, distinct de A et A' , on mène la perpendiculaire (Δ) à la droite (AA') . La droite (Δ) coupe le cercle (Γ) en M et M' .
On pose $\overline{OH} = x$. Calcule en fonction de x l'aire du triangle AMM' .
- 2) Soit f la fonction définie sur $] -1; 1 [$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
a- Etudie les variations de f .
b- Montre que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.

Problèmes

Situation 45

La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par une partie de son tableau de variation.

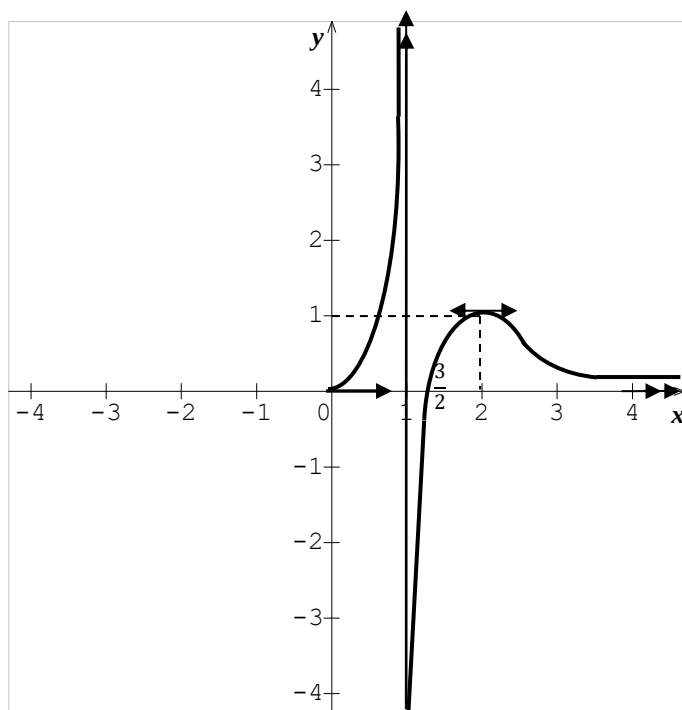
On sait de plus que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie pour la courbe C de f .

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	-
$f(x)$	1		$+\infty$	3

- 1) Trace la courbe C de f
- 2) Complète le tableau de variation de f
- 3) On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + \beta x + \alpha}$
 - a- Détermine les réels a ; b ; c ; β et α
 - b- Montre que la restriction g de f à $I =] 2 ; 4]$ réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
 - c- Donne l'équation de la tangente à la courbe C' de g^{-1} au point d'abscisse 1
 - d- Trace C'
 - e- Discute graphiquement suivant les valeurs du paramètre m , du nombre et des signes des solutions de l'équation $(3 - m)x^2 - (12 - 4m)x + 8 = 0$

Situation 46

On donne la figure ci-dessous qui représente une partie de la courbe d'une fonction g .



- 1) Complète la courbe de la fonction g sachant que g est impaire.
- 2) Donne les équations des asymptotes à (C_g)
- 3) Quel est le domaine de définition de g sous forme de réunion d'intervalles
Donne les limites de g aux bornes de D_g .
- 4) Dresse le tableau de variation de g .

Situation 47

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x+d}$ où a ; b ; c et d sont des réels et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Trouve les réels a ; b ; c et d sachant que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote et (C_f) passe par les points $A(2; 3)$, $B(4; 7)$ et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.
- 2) Dans la suite du problème on prendra $a = 1$; $b = -1$; $c = -5$ et $d = -3$
- a- Etudie la fonction f
- b- Etudie la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique
- c- Montre que la restriction g de f à l'intervalle $[4; +\infty[$ réalise une bijection de $[4; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 3) Montre que (C_f) admet un centre de symétrie que l'on Déterminera
- 4) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β
- 5) a- Montre que $\forall x \in [4; 5]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$
b- En déduis que $\left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$
- 6) Trace (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ainsi que $(C_{g^{-1}})$ la courbe de g^{-1}

Situation 48

Partie A : Soit f la fonction numérique définie sur $D_f =]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

- 1) Montre que la dérivée de f garde un signe constant sur D_f .
- 2) Etudie les variations de f (limite et sens de variation)
- 3) En déduis que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1; 2[$

Partie B : On se propose de Résous l'équation $f(x) = 0$ dans $]1; 2[$.

- 1) Montre que l'équation $f(x) = 0$, a même ensemble de solution que l'équation $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$.
- 2) On appelle g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ soit α la solution de l'équation $f(x) = 0$ (On a donc $g(\alpha) = \alpha$ et $1 \leq \alpha \leq 2$)
 - a) Montre que si x est élément de $]1; 2[$ alors $g(x)$ est aussi élément de $]1; 2[$.
 - b) Justifier la dérivabilité de g sur $]0; +\infty[$ Calcule la dérivée de g puis Montre que pour tout $x \in [1; 2]$ on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
 - c) En déduis que pour tout x de $[1; 2]$, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$
- 3) Construire la courbe (C) de la fonction f

Situation 49

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$ et (C) sa courbe.

1) a- Démontre que la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est au dessus de sa tangente en tout point.

b- En déduis que $\forall \alpha \in [0; +\infty[$, on a : $\frac{1}{\alpha+1} \geq 1 - \alpha$ **(1)**.

2) Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$; par $g(x) = \sqrt{x+1}$ et soit k un réel strictement positif.

a- Détermine la dérivée première et seconde de g sur $[0; +\infty[$

b- Vérifie que : $\forall x \in [0; k[$ on a : $\frac{1}{2\sqrt{1+k}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$

c- En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle $[0; k]$, Démontre que : $1 + \frac{k}{2\sqrt{1+k}} \leq \sqrt{1+k} \leq 1 + \frac{k}{2}$ **(2)**

d- Déduisez des relations **(1)** et **(2)** que : $\forall \alpha \in [0; +\infty[$, on a :

$$1 + \frac{k}{2} - \frac{k^2}{4} \leq \sqrt{1+k} \leq 1 + \frac{k}{2}$$

e- Etablis alors l'inégalité suivante : $1,0475 \leq \sqrt{1,1} \leq 1,05$

f- En déduisez une valeur approchée de $\sqrt{1,1}$ tout en précisant la marge d'incertitude.