

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Prof : Abdoulaye Drissa Dembélé (ADD)

Classe: TSExp

2017 - 2018

Fonctions Numériques : fiche n°1 :

Exercice 01 :

Dans chacun des cas suivants étudier la continuité de f en x_0 :

- a) $\begin{cases} f(x) = \frac{(2+x)^2 - 4}{x} ; \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 5 \end{cases} \quad x_0 = 0$
- b) $\begin{cases} f(x) = \sin x + \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x} ; \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = \sqrt{2} \end{cases} \quad x_0 = 0$
- c) $\begin{cases} f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 3x - 2}{3x^2 - 3x - 6} ; \text{ si } x \neq -2 \text{ et } x \neq 1 \\ f(-2) = -1 ; \quad f(1) = 0 \end{cases} \quad x_0 = -2 \text{ et } x_0 = 1$
- d) $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{|x|} \quad x_0 = 0.$

Exercice 02 :

Dans chacun des cas suivants trouver la valeur qu'il faut donner à m pour que f soit prolongeable par continuité en x_0 et préciser ce prolongement g .

- a) $\begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2} ; \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = m \end{cases} \quad x_0 = 2$
- b) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x+13} - 4} ; \text{ si } x \neq 3 \\ f(3) = m \end{cases} \quad x_0 = 3$

Exercice 03 :

A. On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) Montre que f est prolongeable par continuité en 0.
- 3) Soit g le prolongement de f . Exprime $g(x)$ en fonction de x .
- 4) g est-elle dérivable en 0 ? si oui, précise $g'(0)$.

B. On considère la fonction h définie par : $\begin{cases} h(x) = \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ h(x) = x^2 + kx + 1 & \text{si } x < 2 \end{cases} ; k \in \mathbb{R}$

Détermine k pour que h soit continue en 2.

C. Soit la fonction r définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ par : $r(x) = \frac{x^2 + ax + b}{(x-1)(x-2)}$

- 1) Détermine les réels a et b pour que r admette un prolongement par continuité en 1 et en 2.

2) Détermine alors la fonction prolongement q de r .

Exercice 04 :

- I. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 5$
- 1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
 - 2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [4; 5]$
 - 3) Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près par dichotomie.
- II. Soit la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$; où a ; b et c sont des réels.
- 1) Calculer $f'(x)$.
 - 2) Déterminer les réels a , b , c sachant que f admet 1 pour extremum en $x = 0$ et -3 pour extremum en $x = 2$.
 - 3) Étudier la fonction f . Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_1 dans $[-1; 0]$; une solution unique x_2 dans $[0; 1]$; une solution unique x_3 dans $[2; 3]$.
 - 4) Déterminer un encadrement de chacune de ces trois solution à 10^{-1} près.
 - 5) Tracer la courbe (C_f) de f
 - 6) En discutant suivant les valeurs du paramètre réel m , donner graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 05 :

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = -(x-1)^2(x+2)$.

- 1) Etudier les variations de f ;
- 2) Montrer que f admet un point d'inflexion que l'on précisera.
- 3) On déterminera les intersections de la courbe (C) de f avec les axes de coordonnées.
- 4) Tracer la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé

Exercice 06 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x+4}{-x+1}$ et soit (C) sa courbe.

- 1) Etudier les variations de la fonction f .
- 2) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point $x = 0$;
- 3) Quel est le coefficient directeur de la tangente (T)
- 4) Tracer la courbe (C) de f .
- 5) Résoudre et discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$.

Exercice 07 :

I. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x}$, où a , b et c sont des réels.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Déterminer les constantes a ; b ; c pour que (C) passe par les points $A(1; -2)$; $B(-4; 8)$ et admette au point $x = 2$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

II. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{-x^2+3x-4}{x}$.

- 1) Etudier les variations de la fonction f .
- 2) Pressier les équations des asymptotes à (C).
- 3) Etudier la position de (C) par rapport à son asymptote oblique (Δ).
- 4) Montrer que le point d'intersection I des asymptotes est centre de symétrie de la courbe (C).
- 5) Construire la courbe (C) et ses asymptotes.
- 7) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation : $-x^2 + (3 - m)x - 4 = 0$.

Exercice 08 :

Soit f la fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$

La fonction f a pour formule explicite : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Calculer $f'(x)$.
- 3) Déterminer les réels a , b et c en utilisant les données du tableau de f .
- 4) Montrer que la restriction g de f à $[0 ; +\infty[$ est une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 5) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α . Montrer que α est compris entre 1 et 2. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près (on précisera la méthode).
- 6) Donner une équation de la tangente (T_0) à la courbe (C) de f au point d'abscisse 1.
- 7) Tracer la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Exercice 09 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$; où a ; b et c sont des réels.

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

- 1) Déterminer les nombres réels a ; b et c sachant que :
 - ☞ (Γ) passe par le point $A(1 ; 4)$
 - ☞ La tangente (T_B) à (Γ) au point $B(5 ; 0)$ admet 1 pour pente.
 - ☞ la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe (Γ).
- 2) Vérifier que le point $\Omega(3 ; 2)$ est centre de symétrie de (Γ).
- 3) Trouver le coefficient directeur de la tangente (T_A) à (Γ) au point A .
- 4) Calculer les coordonnées du point d'intersection I des tangentes à (Γ) respectivement aux points A et B .

- 5) Dresser le tableau de variation de f .
- 6) Tracer (Γ) , (T_A) , (T_B) et ses asymptotes.

Exercice 10 :

I. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x-1}$, où a, b et c sont des réels.

Déterminer les réels $a ; b ; c$ pour que la courbe (C) de passe par les points $A(0 ; -6)$ et $B(2 ; 4)$, puis admet au point B une tangente de coefficient directeur égal à -3 .

II. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$. Soit (C) sa courbe.

- 1) a) Montrer qu'il existe des réels $a ; b ; c$ tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
 b) En déduire l'équation de l'asymptote oblique (Δ) à la courbe (C) .
 c) Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ) .
- 2) Étudier les variations de la fonction f ;
- 3) Montrer que le point I intersection des asymptotes est centre de symétrie de (C) .
- 4) Donner une équation de la tangente à (C) en $x = 2$.
- 5) Tracer dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe (C) et ses asymptotes.
- 6) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m l'existence et le signe des racines de l'équation $x^2 - (3 + m)x + m + 6 = 0$.

Exercice 11 :

Pour un produit donné, q étant la quantité produite, on désigne par $C(q)$ le coût de production ; C la fonction coût ;

☞ $C_{ma}(q)$ le coût marginal au niveau q : $C_{ma}(q) = C(q + 1) - C(q)$.

☞ $C_{mo}(q)$ le coût unitaire moyen : $C_{mo}(q) = \frac{C(q)}{q}$

Une entreprise fabrique un produit P . La fonction coût C est définie par

$C(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 200$, $C(x)$ est le coût ou prix de revient en FCFA d'une quantité x de produit P .

- 1) Étudier la fonction C sur l'intervalle $[0, 10]$.
- 2) Calculer le coût marginal $C_{ma}(x)$ au niveau de x : $C_{ma}(x) = C(x + 1) - C(x)$.
 Étudier la fonction C_{mo} sur l'intervalle $[0, 10]$.
- 3) Comparer C_{ma} et la dérivée C' de la fonction C .
- 4) Étudier la fonction C' sur l'intervalle $[0, 10]$. Étudier la position relative des courbes C_{ma} et C .
- 5) Sachant que le produit P est vendu à 9 000 FCFA l'unité, exprimer en fonction de x le bénéfice B réalisé en supposant que toute la production est vendue sur le marché.
- 6) Déterminer la production x qui procure un bénéfice maximum.