

Problème 1:

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par: $f(x) = \frac{x-1}{x} \ln x$.
($\mathcal{C}$) est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

- 1) a) Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$
par $g(x) = x - 1 + \ln x$.
b) Vérifier que $g(1) = 0$. En déduire, suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$.
- 2) a) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
b) En déduire les variations de f .
c) Étudier la limite de f en 0 et en $+\infty$.
- 3) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe ($\mathcal{C}$) en $x_0 = e$.
- 5) Tracer la courbe ($\mathcal{C}$) dans le repère.

Problème 2:

Partie A: On donne la fonction f telle que $f(x) = 3 - x - \ln x$.

- 1) Étudier les variations de f . Compléter le tableau de variation de f par les limites de f aux bornes du domaine de définition D_f .
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution $\alpha \in [2; 3]$. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
- 3) Déterminer le signe de $f(x)$.

Partie B: Soit ($\mathcal{C}_g$) la courbe représentative de la fonction g définie par:
 $g(x) = (1 - \frac{1}{x})(2 - \ln x)$.

- 1) Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.

- 2) En déduire les variations de g . Etablir le tableau de variation de g .
- 3) En utilisant l'égalité $f(x) = 0$, montrer que $g(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$.
- 4) En déduire un encadrement de $g(x)$ d'amplitude $0,02$.
- 5) Etudier le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- 6) Construire (C_g) dans un repère cartésien.

Problème 3:

Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

- 1) a) Etudier les variations de g .
 b) Calculer $g(1)$. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- 2) On donne la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$.
 a) Etudier les variations de f , puis dresser son tableau de variation.
 b) On désigne par (Δ) la droite d'équation: $y = -\frac{1}{2}x + 1$ et par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal; d'unité graphique 4 cm.
 Démontrer que la droite (Δ) est asymptote à la courbe (C) .
- 3) Etudier le signe de $f(x) - (-\frac{1}{2}x + 1)$ et en déduire la position de (C) par rapport à (Δ) .
- 4) Tracer la courbe (C) .

Problème 4:

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} + x - 1$.

- 1) a) Etudier sur $]0; +\infty[$, le sens de variation de la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 2 \ln x + 1$.
 b) En déduire que pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $g(x) > 0$.
- 2) a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.
 b) Dresser le tableau de variation de f . Tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm.

TD : Etude de Fonction

Exercice 1 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + 8x + 1}{(x-1)^2}$$

- Déterminer a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$
- a) Montrer que $f'(x) = \frac{2(x-2)(x^2+dx+e)}{(x-1)^3}$ pour des réels d et e que l'on déterminera et étudier son signe
b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
c) Montrer que la courbe représentative (C) de f admet une asymptote oblique (D) dont on donnera une équation. Préciser la position de (C) par rapport à (D). Dresser le tableau de variations de f
- a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
b) Déterminer l'abscisse du point de (C) où la tangente a pour coefficient directeur $7/4$.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α . Montrer que $\alpha \in]-1; 0[$.
- Tracer la courbe (C), les asymptotes et la tangente (T).

Exercice 2 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$$

- Déterminer Df .
- Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie pour la courbe (C) représentative de f .
- a) Déterminer les limites de f aux bornes du Df
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- La fonction f est-elle dérivable en 0 et en -2 ?
- Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$. Et Tracer la courbe (C)

Exercice 3 soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{8}$$

- Etudier la fonction f sur son ensemble de définition puis tracer sa courbe (C) dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 4 :

- Déterminer les réels a, b, c pour que la fonction $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ passe par $A(2; 4)$, admette en ce point une tangente horizontale et aie au point d'abscisse 3 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x + 4$.

- Etudier les variations de f
- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
- Montrez que la courbe (C) de f a une asymptote oblique (D) et précisez la position de (D) par rapport à (C)
- Déterminez la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3. Déterminez la position de (T) par rapport à (C).
- Tracez soigneusement (T), (D) et (C) dans un repère orthonormé : unités : 2 cm.

Exercice 5 : Soit la fonction $f(x) = \frac{3|x-1|+1}{2|x-1|-1}$

- Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- Etudier la fonction puis Tracer sa courbe.
- Montrer que la courbe (Cf) admet un axe de symétrie que l'on déterminera
- Résoudre graphiquement $f(x) = m$, m étant un réel. Indiquer le signe des solutions

Exercice 6 : Donner l'ensemble de définition des tableaux suivants et Tracer l'allure de leur courbe.

Tableau 1

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
f'	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$+\infty$	$+\infty$	0	1	$-\infty$	

Tableau 2

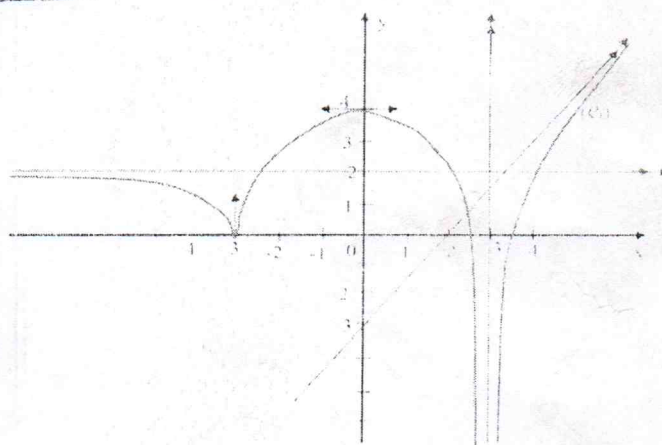
x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	0	-	-
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	0	0	$+\infty$	$+\infty$

Tableau 3

x	$-\infty$	-2	-1.17	-1	1	1.17	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+	+	0	-	+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	0.9	$+\infty$	$-\infty$	-0.9	$-\infty$	0

Du Tableau 2 au Tableau 3 quelle fonction est la dérivée de l'autre ?

Exercice 7 : Soit le graphe suivant :



- Déterminer le Df et les limites aux bornes
- Dresser le tableau de variation de f .
- La fonction f est-elle continue ; dérivable en $x = -3$? Justifier votre réponse
- Donner une équation de la tangente (T) à (Cf) en $x = 0$.
- Montrer que la restriction g de f à $[0; 3[$ est une bijection de $[0; 3[$ sur une partie J de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
- Déterminer les équations des asymptotes à la courbe (Cf) de f
- Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Première Evaluation

Epreuve de : Mathématiques

Classe : TS.EXP

Durée : 2 heures

Exercice 1 :

garçons

1) Démontrer que pour tout $t \geq 0$

$$1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$$

En déduire : que pour tout $x \geq 0$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

2) trouver un encadrement analogue pour $-1 \leq t \leq 0$

$$\text{En déduire que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Problème

Partie A

Soit la fonction g dérivable et définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - \ln x - 1$

1) calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$

2) démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif x , $g'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$

3) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation

4) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur $]0, +\infty[$

b) On désigne par α la plus petite des solutions. Démontrer que $0,4 < \alpha < 0,5$

c) Calculer $g(1)$

d) En déduire que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$\begin{cases} \text{si } x \in]0, \alpha[\text{ alors } g(x) > 0 \\ \text{si } x \in]\alpha, 1[\text{ alors } g(x) < 0 \end{cases}$$

Partie B

Soit f la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) .

L'unité est 4cm sur (OI) et 2cm sur (OJ)

1) a) Déterminer la limite de f en 0. donner une interprétation graphique

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$

2) Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

3) a) Démontrer que $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

4) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x$ est asymptote à (C) en $+\infty$

5) Etudier la position de (D) par rapport à (C)

6) Tracer (D) et (C) on prendra $\alpha = 0,45$ et $f(\alpha) = 3,1$

7) Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C) , (D) et les droites d'équations

$$x = e^{-1} \text{ et } x = 1.$$

Calculer A