

FONCTIONS NUMÉRIQUES
EXERCICES

2024-25



Limites - Continuité - Dérivation

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x+3}}$; $g(x) = \frac{4x}{|x^2+3|-|x-1|}$; $h(x) = \frac{2}{|x|+1}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{|2x+3|+|x|}}{x^2-4}$; $g(x) = \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{-x^2+2x+3}}$

- 2 Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition dans les cas suivants :

a) $f(x) = -\sqrt{2}x^3 - \frac{\pi}{7-\pi x} + x^2 - 9$;

b) $g(x) = \frac{x^2+4x+3}{x^3+27}$; $h(x) = \frac{5-\sqrt{2x+1}}{x^2-5x+6}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+5x-4} - x + 4$;

d) $g(x) = \frac{x-4}{\sqrt{5x-4-x}}$; $h(x) = \frac{\sqrt{4x^2-5x-9}}{\sqrt{x^2+5x-4-x+4}}$

e) $f(x) = \frac{x+\cos x}{2+\sin x}$; $g(x) = \frac{x \cos x}{1+x^2}$;

- 3 Calculer les limites suivantes

4 : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 3x}{\sin 4x} \right)$; $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-\cos 2x}{x \sin 5x} \right)$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x - \sin 6x}{x^2 \tan 2x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\sin x - \cos x}{1-\cos x - \sin x}$; $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{2 \cos x + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2 \sin x}$

- 3 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$; $g(x) = (\sqrt{5x-2})^5$;

b) $h(x) = x + 1 - \frac{4}{(5x-1)^2}$; $f(x) = \tan(5x+4)$

c) $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$; $g(x) = \frac{x^2+5x-1}{x+3}$; $h(x) = \frac{|x^2-4|}{|x|-1}$

- 4 1. Soit la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x^2-5x+1}{4x-1} & \text{si } x \neq \frac{1}{4} \\ f\left(\frac{1}{4}\right) = a & \text{si } x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Déterminer le réel a pour que f soit continue en $\frac{1}{4}$.

2. Soit la fonction numérique h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1-2 \cos x}{\sqrt{3}-2 \sin x} & \text{si } x \in [0; \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}; \pi] \\ a & \text{si } x = \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

Déterminer a pour que h soit continue en $x = \frac{\pi}{3}$.

- 5 Dites si f est prolongeable par continuité en x_0 dans les cas suivants et donnez son prolongement si possible

a) $f(x) = \frac{5x+3}{x^2-4}$; $x_0 = 2$ b) $f(x) = \frac{x^4-16}{x^2-x-6}$; $x_0 = -2$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-x+1}{x^2-9}$; $x_0 = 3$ d) $f(x) = \frac{1-\sin x}{\cos x}$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$

- 6 Étudier la dérivabilité de f en x_0 dans chaque cas :

a) $f(x) = \frac{4x+3}{x+4}$; $x_0 = 4$ b) $f(x) = 4x^3 + 3x$; $x_0 = 2$

c) $f(x) = \frac{4x+3}{(x^2-4)^2}$; $x_0 = -2$ d) $f(x) = \sqrt{4x^2+3x}$; $x_0 = -\frac{3}{4}$

e) $f(x) = |x^2 - 7x + 12|$; $x_0 = 3$ e) $f(x) = \frac{|x|+1}{|x^2-4|}$; $x_0 = 0$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x+3}{x+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

g) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} & \text{si } x > 2 \\ \frac{x^3}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 2x & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$; $x_0 = 2$

- 7 Déterminer les réels m et n pour que f soit continue et dérivable en x_0 dans chaque cas :

$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + mx - 3 & \text{si } x \in]-\infty; -1] \\ f(x) = \frac{2x+n}{x} & \text{si } x \in]-\infty; -1[\end{cases}$; $x_0 = 1$

$\begin{cases} f(x) = 2mx^2 - x + n & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{3n}{x+3} & \text{si } x > -2 \end{cases}$; $x_0 = -2$

Étude et Coefficients inconnus

- 1 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x-1}$ avec a, b et c des réels et (C_f) sa courbe.

La courbe (C_f) admet une tangente horizontale au point d'abscisse $x = -3$ puis passe par un point $A(0; -3)$.

La tangente au point d'abscisse (-1) est parallèle à (D) d'équation $y = -3x - 1$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f noté D_f .
- Déterminer les réels a, b et c en utilisant vos connaissances sur les fonctions et les données.
- Étudier les limites aux bornes de D_f puis préciser les équations des éventuelles asymptotes.
- Montrer que la fonction admet un centre de symétrie à préciser.
- Étudier les sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
- Étudier la position de (C_f) par rapport à l'asymptote oblique si possible.
- Tracer (C_f) et (D) dans un repère orthogonal d'unité : 1cm pour 1 sur (Ox) et 1cm pour 5 sur (Oy) .
- Déterminer algébriquement et graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$;

- $m \in \mathbb{R}$
2 (Tiré du mémoire E.N.Sup de M. Sory Ibrahim Coulibaly)

Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2-ax-b}{x-c}$ avec $a; b; c$ des

nombre réels et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	-	0	+
$g(x)$						

- En utilisant le tableau de variation :
 - Déterminer le domaine de définition de g et les limites à ces bornes puis interpréter si possible ces limites.
 - Les réels c ; a ; b .

2. Complete le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5
$f(x)$					

- On donne l'asymptote oblique en $\pm\infty$ par $y = x$.
Tracer la courbe de g et ses asymptotes dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

3 Soit la fonction f définie par :

$f(x) = ax^3 + bx^2 + x + c$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé

- Déterminer les réels a , b et c sachant que (C_f) passent par les points $A(2; -1)$ et $B(0; 1)$ puis admet au point A une tangente perpendiculaire à la droite $(D): y = -x$.
- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- Montrer que f réalise une bijection de $] - \infty; 0]$ vers $\mathbb{J}$ à déterminer.
 - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}; 0]$.
En déduire la valeur approchée de α à 10^{-2} près.
- Calculer $(f^{-1})'(1)$.
- Montrer le point $I(1; 0)$ est un centre de symétrie pour (C_f) .
- Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion dont on précisera.
- Déterminer les points d'intersection de la courbe et les axes de coordonnées.
- Tracer le courbe (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

4 Soit la fonction numérique f définie par

$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x+2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Déterminer les réels a ; b et c sachant que (C_f) passe par les points $A\left(\frac{0}{2}\right)$ et $B\left(\frac{-4}{-5}\right)$; et admet une tangente horizontale au point d'abscisse -3 .
- Déterminer D_f et les limites aux bornes D_f .
 - Préciser s'il y a les équations des asymptotes.
- Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
- Etudier la position de (C_f) et (D) .
 - Déterminer les points d'intersection de (C_f) et les axes de coordonnées.
- Tracer la courbe (C_f) et la droite (D) .
 - Déterminer graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Étude de fonction au moyen d'une fonction auxiliaire

1 A// Soit la fonction numérique de variable réelle définie par : $g(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x - 1$.

- Etudier les variations de g puis dresser le tableau de variation.
- Montrer l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; \frac{1}{2}]$. Donner la valeur approchée de α à 10^{-1} près.
- En déduire le signe de g .

B// Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x+1}$ et (C_f) sa courbe.

- Déterminer D_f et les limites aux bornes de D_f puis préciser les équations des asymptotes.
- Calculer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ puis étudier ses variations en utilisant I
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in [-1,5; -1,4]$
- Compléter l'étude de f puis (C_f) dans un repère d'unité 2cm.

2 Problème BAC 2019 TSExp

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$, et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité : 1cm).

- On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$
 - Etudie le sens de variation de g , et montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.

b) Précise le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

2) a) Calcule $f'(x)$ et étudie le sens de variation de f .

b) Étudie les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis dresse le tableau de variation de f .

3) a) Montre qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$.

b) En déduis que (C) admet une asymptote oblique Δ et étudie la position de (C) par rapport à Δ . Vérifie en particulier que (C) rencontre Δ en un point unique A .

4) Détermine les abscisses des points B et B' de (C) admettant une tangente parallèle à Δ .

5) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$; en déduis une valeur approchée de $f(\alpha)$.

6) Construis la courbe (C) .

3 Partie A:

On donne la fonction g définie par :

$$g(x) = x^4 + 13x^2 - 14.$$

1) Vérifier que $g'(x) = 2x(2x^2 + 13)$ puis dresser le tableau de variation de g .

2) Calculer $g(1)$ et $g(-1)$.

3) Donner le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B:

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3-7x}{x^2+2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Déterminer D_f et les limites aux bornes de D_f .

2) a. Déterminer les réels a ; b et c tels que $f(x) = ax + \frac{bx+c}{x^2+2}$.

b. En déduire que la droite $(\Delta): y = x$ est asymptote à la courbe (C) .

3) Montrer que la fonction dérivée f' de f s'écrit :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2+2)^2}.$$

4) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

5) a. Montrer l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1; +\infty[$.

b. Justifier que $\alpha \in [2; 3]$ puis donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

6) Montrer que f est impaire et préciser son centre de symétrie.

7) Étudier la position de (C) par rapport à (Δ) .

8) Tracer la courbe (C) et la droite (Δ) dans un même repère.

4 Soit la fonction numérique g définie par :

$$g(x) = -x\sqrt{1+x^2} - 1$$

1) Dresser le tableau de variation de g puis montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer la valeur exacte de α .

En déduire le signe de g .

I. Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = -\frac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2}$ et (C_f) sa courbe.

1) Calculer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

2) Déterminer l'équation de (T) , la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.

3) Étudier la position de (C_f) par rapport à (T) sur $[0; +\infty[$.

4) Montrer que $f(\alpha) = \frac{3-\alpha^4}{3\alpha}$.

5) Tracer (C_f) .

5 Partie A: Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$$

1) Étudier les variations de g .

2) Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution unique α .

Vérifie que $\alpha \in]-1; 0[$ et .

3) Donne le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B: On considère la fonction numérique f définie

$$\text{par : } \begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[, f(x) = 2x^2 - x - \frac{2}{x-1} \\ \forall x \in]1; +\infty[, f(x) = x - \frac{2}{x-1} \end{cases}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, (C_1) et (C_2) sont respectivement les courbes de f sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

1°) Calcule les limites de f

2°) a) Démonstre que pour tout x de $]-\infty; 1[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

b°) En déduis le sens de variation de f sur $]-\infty; 1[$

c°) Étudie le sens de variation de f sur $]1; +\infty[$.

c°) Dresse le tableau de variations de f .

3°) a) Démonstre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C_2) en $+\infty$.

b) Étudie la position relative de (C_2) par rapport à (D) .

4°) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interprète graphiquement

5) Représente la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. où $(\alpha = -0,1)$.

7) Soit h la restriction de f sur $]1; +\infty[$.

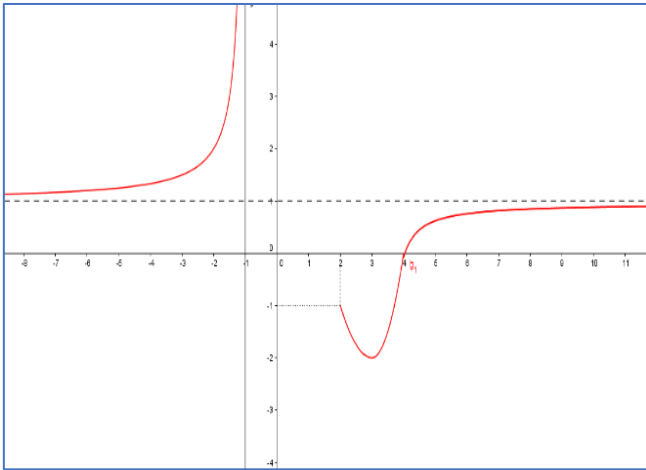
a) Justifie que h est une bijection de $]1; +\infty[$ sur un intervalle k à déterminer.

b) Dresse le tableau de variation de h et celui de sa bijection réciproque h^{-1} .
Calcule $(h^{-1})'(0)$. Représente la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Courbe et Tableau de Variation

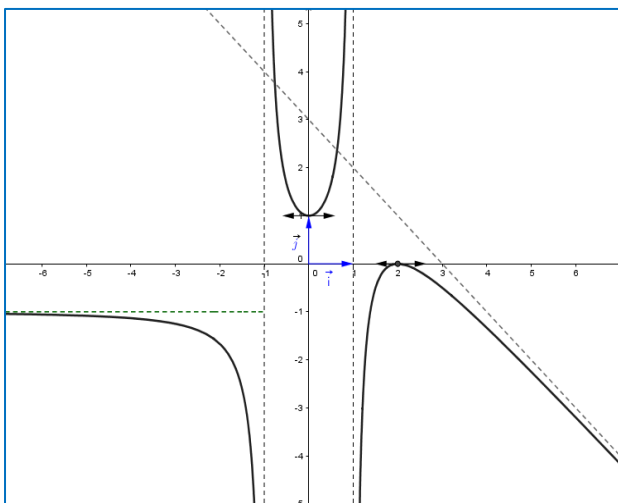
1 Tiré du mémoire E.N.Sup de Ml. Sic

Soit la fonction f définie par sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$



- Déterminer D_f et les limites aux bornes de D_f . Préciser les équations des éventuelles asymptotes.
- Dresser le tableau de variation de f .
- Justifier que la restriction h de f à $] -\infty; -1[$ est une bijection. Donner $D_{h^{-1}}$ puis construire la courbe $(C_{h^{-1}})$ de h^{-1} .

2 Soit la fonction numérique f définie par sa représentation graphique



- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Donner les limites aux bornes de D_f .
- Préciser les équations des éventuelles asymptotes.
- Donner le signe de f .
- Dresser le tableau de variation de f . (mettre le signe de f')

6. Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = m$ avec m un paramètre réel

3 Soit la fonction numérique h définie par son tableau de variation ci-dessous

x	$-\infty$	-3	-1	2	4	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$+$	0	$-$
$h(x)$		-3	-1	$+\infty$	-2	0	$+\infty$

- Déterminer :
 - L'ensemble de définition D_h de h .
 - Son ensemble de dérivabilité de h .
- Donner les limites aux bornes de D_h .
 - Donner les équations des asymptotes à sa courbe.
- Donner le signe de h sur D_h .
- Donne l'allure de la courbe (C_h) de h dans un repère orthonormé.

Soit la fonction numérique dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	2	-2	$+\infty$	1

- Donner D_f puis les limites aux bornes de D_f .
Préciser les équations des asymptotes à la courbe (C_f) de f .
- Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f .
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β sur D_f .
 - En déduire le signe de $f(x)$.
- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0; 2]$.
 - Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} définie sur un intervalle I à déterminer. En déduire $D_{g^{-1}}$.
 - Etablir le tableau de variation de g^{-1} et déterminer son ensemble de dérivabilité.

Fonction et Valeur absolue

1 Soit la fonction numérique h définie par :

$$h(x) = \frac{|x|+3}{|x^2-x-2|}$$

- 1) Déterminer D_h puis écrire h sans valeur absolue.
- 2) Calculer les limites aux bornes de D_h et préciser les équations des éventuelles asymptotes.
- 3) Etudier la dérivabilité de h en 0 puis interpréter graphiquement ce résultat.
- 4) Etudier les variations de h puis dresser son tableau de variation.
- 5) Tracer la courbe (C_h) et ses asymptotes.
- 6) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de $h(x) = m$.

2 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x|}$$

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et en 2.
- 2) Donner les équations des éventuelles asymptotes à (C_f) et les branches infinies.
- 3) Etudier les variations f puis dresser son tableau de variation.
- 4) Compléter l'étude de f puis tracer sa courbe dans un repère orthonormé.

Autres fonctions

1 Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x) = \cos 2x - 2 \cos x$ et (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Montrer h est 2π - périodique.
b) Montrer que h est paire.
c) En déduire que le domaine d'étude de h peut se réduire à $[0; \pi]$.
2. a) Montrer que $h'(x) = 2 \sin x (1 - 2 \cos x)$.
b) Etudier le signe de h' sur l'intervalle $[0; \pi]$.
3. Dresser le tableau de variation de h sur $[0; \pi]$.
4. Tracer (C_h) dans l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$

2 On donne la fonction numérique de variable réelle définie par $f(x) = \frac{2x^3 + 27}{2x^2}$ et on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de D_f de f .
2. Déterminer les limites aux bornes de D_f .
3. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) en $-\infty$ et $+\infty$.
4. a) Justifier l'équivalence : $x \geq 3 \Leftrightarrow x^3 \geq 27$.
b) Calculer la fonction dérivée f' de f .
c) Etudier le signe de f'
5. Dresser le tableau de variation de f .
6. Tracer la courbe représentative de f .

2 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{-x+1}}$ et (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit (T) la tangente à (C_f) passant par le point A d'abscisse 0

1. Montrer que f est dérivable sur $] -1; 1[$
2. Etudier la dérivabilité à droite de f en -1 et interpréter graphiquement ce résultat.
3. Détermine $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et interpréter graphiquement.
4. Dresser le tableau de variation de f .
5. Ecrire l'équation de (T) et étudier la position relative de (T) et (C_f) .
6. Montrer que f réalise une bijection de $[-1; 1[$ sur l'intervalle J à déterminer.
On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et $(C_{f^{-1}})$ sa représentation graphique.
7. Construire (T) ; (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère.