

**Exercice 1:** Calculer les limites suivantes :

$$1^{\circ}) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}; \quad 2^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{2x^2 - 3x - 2}; \quad 3^{\circ}) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 7}{x^4 + 5}$$

$$4^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x - 8}{7x^3 + 2x + 1}; \quad 5^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3}; \quad 6^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{|x^2 - 4|};$$

$$7^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x); \quad 8^{\circ}) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 5}; \quad 9^{\circ}) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{x + 3}$$

$$10^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 7x + 5}{x - 1}; \quad 11^{\circ}) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 5x - 12}{(x - 2)(x + 3)}; \quad 12^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$$

$$13^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}; \quad 14^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2} - 1}; \quad 15^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{x} - 8}{4 - x}$$

16°) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$  dans chacun des cas suivants

$$a) f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{3x - 1}; \quad b) f(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 1}; \quad c) f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 1} + 5x}{3x - 1}$$

$$d) f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}; \quad e) f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{\sqrt{4x^2 + 3}}; \quad f) f(x) = \frac{(x - \sqrt{x^2 - 3x + 1})}{2x + \sqrt{4x^2 + x}}$$

$$17^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \right); \quad 18^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x); \quad 19^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x}}$$

$$20^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 7x - 9}{x^2 + 3x + 4}; \quad 21^{\circ}) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left( \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}} \right); \quad 22^{\circ}) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left( \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right)$$

$$23^{\circ}) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left( \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2 \tan x}{\cos(2x)} \right); \quad 24^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}; \quad 25^{\circ}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x \cos x}; \quad 26^{\circ}) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2}$$

**Exercice 2:**

Pour chacune des fonctions suivantes donner l'ensemble de définition  $D_f$  puis calculer les limites aux bornes de  $D_f$ .

$$1^{\circ}) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}; \quad 2^{\circ}) f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 + 1}; \quad 3^{\circ}) f(x) = \frac{4 - 5x}{x^2 + 2x - 3}$$

$$4^{\circ}) f(x) = \frac{1}{(x - 3)^2}; \quad 5^{\circ}) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2}}; \quad 6^{\circ}) f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{-x + 2}$$

$$7^{\circ}) f(x) = \frac{6x - 2}{-2x + 8}; \quad 8^{\circ}) f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{-x^2 - x + 2}; \quad 9^{\circ}) f(x) = -3x^3 + 5x^2 - 7x + 1$$

**Exercice 3:**

Soit la fonction numérique  $f$  définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 3x - 2}{3x^2 + 3x - 6} ; \text{ si } x \neq -2 \text{ et } x \neq 1 \\ f(-2) = -1 ; f(1) = 0 \end{array} \right.$$

La fonction  $f$  est-elle continue en  $x = -2$  ; en  $x = 1$  ?

**Exercice 4:**

Soit la fonction numérique  $f$  définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{(2+x)^2 - 4}{x} ; \text{ étudier la continuité de } f \text{ en } x = 0. \\ f(0) = 5 \end{array} \right.$$

**Exercice 5:**

Soit la fonction numérique  $f$  définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 7}{x-1} ; \\ f(1) = 12 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} g(x) = \sin x + \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x} \\ f(0) = \sqrt{2} \end{array} \right.$$

Etudier la continuité de  $f$  en  $x = 1$  ; la continuité de  $g$  en  $x = 0$ .

**Exercice 6:**

Soit la fonction numérique  $f$  définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2}, \text{ si } x \neq 2 ; \\ f(2) = m \end{array} \right.$$

Quelle valeur faut-il donner à  $m$  pour que  $f$  soit continue au point  $x = 2$  ?

**Exercice 7:**

Soit les deux fonctions numériques  $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4}$

$$g : \begin{cases} x \mapsto g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4}, \text{ si } x \neq 3 \\ g(3) = m \end{cases}$$

Quelle valeur faut-il attribuer à  $m$  pour que  $g$  soit un prolongement de  $f$  par continuité au point  $x = 3$ ?

**Exercice 8:**

Soit la fonction numérique  $f$  définie par  $f(x) = |x-1| + \frac{2}{x+1}$

1°) Etudier la continuité de  $f$  au point d'abscisse  $x = 1$

2°) Etudier la dérivabilité de  $f$  au point d'abscisse  $x = 1$ .

**Exercice 9:**

1°) Soient les fonctions  $f$  et  $g$  définies respectivement par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}.$$

Vérifier que  $g$  est le prolongement de  $f$ , par continuité au point  $x = 0$ .

2°) Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction  $f$  et déterminer s'il existe le prolongement par continuité de cette fonction en  $x_0$ .

a)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 7x + 2}$  et  $x_0 = 2$  ;    b)  $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$  et  $x_0 = 0$

c)  $f(x) = \frac{\tan x}{x}$  et  $x_0 = 0$  ;    d)  $f(x) = \frac{3}{x^2}$  et  $x_0 = 0$ .

3°) On considère la fonction  $f$  définie sur  $[2 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2x + \sin x}{x-1}$ .

a) Encadrer  $f$  par deux fonctions rationnelles ;

b) En déduire la limite de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .