

COURS PRIAMS



PREPABAC 2025

MATHEMATIQUES



Thème 3 : " Fonctions Numériques "

**Opération un problème par jours
sur les fonctions numériques...**

M. MOUHAMAD SARRE

70647469 / 65360170

Problème 1 : Lundi

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x^2 - 2$.

- 1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
- 3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $3,1 < \alpha < 3,2$.
b) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Etude de la fonction principale f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)

- 1) a) Calcule les limites de f en $-\infty$, 1 et $+\infty$.
b) Interprète graphiquement le résultat de la limite de f en 1.
- 2) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
- 3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Etudie les positions relatives de (C) par rapport à (D).
- 4) Montre que $f(\alpha) = \frac{3(\alpha^2+1)}{(\alpha-1)^2}$
- 5) Trace (C) et (D). (On prendra $f(\alpha) \simeq 7$)

Partie C : Etude d'une bijection

Soit h la restriction de f à l'intervalle $] -\infty ; 1[$

- 1) Montre que h réalise une bijection de $] -\infty ; 1[$ vers un intervalle K que l'on précisera.
- 2) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et (C^{-1}) sa représentation graphique.
a) Dresse le tableau de variation de h^{-1} .
b) Justifie que h^{-1} est dérivable en 0 et calcule $(h^{-1})'(0)$.
- 3) Trace (C^{-1}) dans le même repère que (C).

Problème 2 : Mardi

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

- 1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
- 3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $1,6 < \alpha < 1,7$.
b) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2cm)

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) a) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b) Interprète graphiquement le résultat les résultats obtenus.
- 3) a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$
b) En déduis le sens de variation de f et dresse le tableau de variation de f .
- 4) a) Détermine l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
b) Etudie la position relative de (T) et (C).
- 5) Trace (C) et (T).

Problème 3 : Mercredi

Partie A :

On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

- 1) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
- 2) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,01.
- 3) En déduis le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

M. SARRE
70647469
65360170

Partie B :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 2cm)

- 1) a) Détermine le domaine de définition de f , puis calcule les limites aux bornes de son ensemble de définition.
b) Interprète graphiquement le résultat des limites de f en -1 et 1 .
- 2) a) Montre que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
- 3) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Détermine les coordonnées du point d'intersection entre (C) et (D).
c) Etudie les positions relatives de (C) par rapport à (D).
- 4) Trace (C) et (D).

Problème 4 : Jeudi

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 2x - 2$.

- 1) Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
- 3) a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .
b) Justifie que $0,7 < \alpha < 0,8$.
- 4) Démontre que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

M. SARRE
70647469
65360170

Partie B :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). (Unité graphique : 2 cm)

- 1) a) Détermine l'ensemble de définition de f .
b) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Etudie les positions relatives de (D) par rapport à (C).
- 3) a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse le tableau de variation de f .
- 4) Détermine les coordonnées du point A où la tangente (T) à (C) est parallèle à (D).
- 5) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
- 6) Construis les droites (D) et (T), puis la courbe (C).

Problème 5 : Vendredi

On note $f(x)$ la population (en milliers) d'une ville fondée en 1960, où x désigne la durée écoulée depuis le début de l'année 1960, exprimée en années. On donne $f(x) = \frac{60x+40}{x+10}$ où $x \in [0; +\infty[$.

- 1) Détermine les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x+10}$ pour $x \in [0; +\infty[$.
- 2) a) Calcule la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.
b) Justifie que la population est croissante.
- 3) a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 52$.
b) En déduis à partir de quelle année la population de cette ville sera supérieur à 52.000 habitants.
- 4) a) Quelle est la limite de f en $+\infty$?
b) En déduis une interprétation quant à la population de cette ville.
- 5) Trace la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).
Echelle : 1 cm $\rightarrow$ 10 ans sur l'axe des abscisses
1 cm $\rightarrow$ 10.000 habitants sur l'axe des ordonnées.

Problème 6 : Samedi

Soit f la fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$	

La fonction f a pour forme explicite : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .
- 2) Calcule $f'(x)$.
- 3) Détermine les réels a, b et c en utilisant les données du tableau de f .
- 4) Montre que la restriction g de f à $[0; +\infty[$ est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 5) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α . Montre que α est compris entre 1 et 2.
Donne une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
- 6) Donne une équation de la tangente (T_0) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse $x_0 = 1$, puis trace (T_0) et (C_f) .
- 7) Discute graphiquement suivants les valeurs du paramètre réel m le nombre de solution de l'équation
(E) : $\frac{-x^3+5+m}{3} - x^2 = 0$.

Problème 7 : Dimanche

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

- 1) Détermine les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- 2) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
- 3) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1; +\infty[$.
b) Vérifie que $2,1 < \alpha < 2,2$.
- 4) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 1 cm).

- 1) a) Détermine le domaine de définition de f .
b) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) a) Montre que $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
b) En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
- 3) a) Détermine les nombres réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}$.
b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et $+\infty$.
c) Détermine les asymptotes verticales à (C).
d) Détermine les coordonnées du point d'intersection A entre (C) et (D) puis étudie les positions relatives de (C) par rapport à (D).
- 4) Trace (C) et (D). ($\alpha = 2,2$).

M. SARRE

70647469

65360170

$g(x)$ et $f(x)$