

Séance de travaux dirigés sur les études de fonctionsClasse : tsexpChargé de cours : M. HKASSOGUE

2024-2025

70-84-71-32 / 97-77-14-07

Situation 1Soit h la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = \frac{1}{4}$ 1) a- Déterminer l'ensemble de définition de h .b- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.c- Étudier la continuité de h en 0.d- Dédire le prolongement par continuité en 0 de h .2) En utilisant $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$, calculer les limites suivantes : a - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-\sqrt{4-2x}}{3x}$ b - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}$.Situation 2A) Soit g la fonction définie par $\begin{cases} g(x) = x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ g(x) = \frac{ax+b}{x+3} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$ a) Déterminer les réels a et b pour que la fonction g soit continue et dérivable en 1.b) Pour les valeurs de a et b trouvées, calculer $g(0)$, $g(2)$, $g(-3)$ et $g(4)$.B) 1- Soit la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ a°) calculer $f'(x)$ et en déduire que pour tout x de $[0; 1]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ b°) montrer que pour tout x de $[0; 1]$ on a : $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x - 1|$ 2- Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+2x-4}{2x-4}$ a°) Démontrer que pour tout x de $[4; 6]$ on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{8}$ b°) Montrer que pour tout x de $[4; 6]$ on a : $|f(x) - \frac{11}{2}| \leq \frac{3}{8}|x - 6|$.Situation 3

x	-3	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	$+\infty$	1	2	-3

On donne ci-dessus le tableau de variation d'une fonction f continue sur son ensemble de définition $]-3; 1[\cup]1; +\infty[$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O; i; j)$.

1) précisez les asymptotes à la courbe (C) en justifiant ta réponse.

L'obstacle est en crayon et le travail est la gomme.

2)a-justifie que f est prolongeable par continuité en 1.

b-Définis le prolongement par continuité en 1.

3)Détermine l'image de l'intervalle]-3; 1[.

4)On désigne par h la restriction de f sur]1; +∞[.

a- Justifie que h réalise une bijection de]1; +∞[dans un intervalle k que l'on précisera.

b- Donne le sens de variation de h^{-1} la bijection réciproque de h sur son ensemble de définition.

c-Démontre que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution β dans]1; +∞[.

5)Détermine le signe de f sur son ensemble de définition.

6)Donner l'allure générale de la courbe (C).

Situation 4

I. Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{5x-1}-3}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) b1) calculer la limite de f au point $X_0=2$.

b2) peut-on prolonger f par continuité $X_0=2$? si oui, préciser ce prolongement.

II. On considère la fonction donnée par le tableau de variation suivant :

X	$-\infty$	2	$+\infty$
$F'(x)$			
$F(x)$	2	$+\infty$	2

a) Déterminer le domaine de définition de f et donner les limites aux bornes de D_f et les équations des asymptotes.

b) On pose $f(x) = \frac{ax+b}{x-2}$; déterminer a et b sachant que $f(0) = -2$.

Situation 5 :

Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

X	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$F'(x)$					
$F(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$

La fonction est de la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

1) Complète le tableau en plaçant les signes appropriés et les éléments manquants.

2) Calcule $f(x)$ puis trouve les réels a, b et c en utilisant les données du tableau.

L'obstacle est en crayon et le travail est la gomme.

- 3) a° Montre que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (D) dont on précisera l'équation.
- b) Étudie la position de (C_f) par rapport à (D) .
- 4) Donne le signe de $f(x)$ pour x élément du domaine de définition de f .
- 5) trace la courbe (C_f) .

Situation 6

On considère la fonction f , dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

	-5	0	5	7	$+\infty$
	$\frac{1}{2}$		2		0
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
	$-\infty$	$-\infty$		-1	

En plus, on dispose des indications suivantes : $f(-3) = -1$; $f(-2) = -2$; $f(1) = -2$; $f(9) = -\frac{1}{2}$.

- 1) Reproduis et complète le tableau ci-dessous.
- 2) Donne le domaine de définition de f , les asymptotes à (C_f) et le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.
- 3) Construis dans un repère orthonormé $(o; i; j)$, les asymptotes à (C_f) et la courbe (C_f) .
- 4) Résous graphiquement l'équation $f(x)=-2$ et l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Situation 7

Soit la fonction C définie sur $[1; 10]$ par $c(x) = \frac{x^3 - x^2 + 12x + 9}{x^2}$

- 1) Écris $c(x)$ sous la forme $C(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2}$ où a, b, c et d sont réels.
- 2) Montre que pour tout réel x de $[1; 10]$; on a $c'(x) = \frac{x^3 - 12x - 18}{x^3}$.
- 3) Soit la fonction d définie sur $[1; 10]$ par : $d(x) = x^3 - 12x - 18$.
 - a) Étudie les variations de d sur $[1; 10]$.
 - b) Montre que l'équation $d(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; 10]$.
 - c) Complète le tableau suivant :

X	4,04	4,05	4,06	4,07
$d(x)$				

- d) Déduis-en un encadrement de α à 10^{-2} près.
- e) Déduis-en le signe de $d(x)$ sur $[1; 10]$.
- 4)a) Déduis de tout ce qui précède les variations de la fonction C sur $[1; 10]$.
- b) Donne la valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

L'obstacle est en crayon et le travail est la gomme.

Situation 8 :

Dans un centre de prise en charge des malades de la Covid-19, les infectiologues ont modélisé la quantité de chloroquine (en mg) administrée à un patient suivant l'évolution de la maladie, par la fonction g définie par : $g(t) = -t^3 + 6t^2 + 9$ où t désigne le nombre de jour d'hospitalisation.

- 1) Calcule la quantité de chloroquine reçue par un patient admis au centre de prise en charge au : 2^{ème}, 4^{ème}, 5^{ème} et 6^{ème} jour.
- 2) Dresse le tableau de variation de la fonction g sur $[0; 6]$. Quelle est la quantité maximale de chloroquine que l'on pourra administrer à un patient pendant son hospitalisation.
- 3) Trace dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentant la quantité de chloroquine (1cm pour 1 jour sur l'axe (ox), 1cm pour 10mg sur l'axe(oy)).
- 4) Détermine graphiquement le nombre de jours qui correspond à une de 36 mg de chloroquine.
- 5) Un patient est déclaré guéri lorsque la quantité de chloroquine reçue par jour n'atteint plus 10 mg. Détermine graphiquement à partir du combienième jour, un patient soumis à ce traitement sera déclaré guéri.

Situation 9 : Une population de bactéries (exprimés en millier) a un rythme de croissance modélisé par la fonction $f(t) = \frac{60t+40}{t+10}$ où $t \in [0; +\infty[$ est le temps écoulé en jours.

- 1) Quelle est la population de cette culture au bout de 3 jours ? 5 jours ? 21 jours ?
- 2) Détermine les réels a et b tels que $f(t) = a + \frac{b}{t+10}$ pour $t \in [0; +\infty[$.
- 3) a- calcule la dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t)$.
b- Justifier que la population de bactéries est croissante.
- 4) a-Résous l'équation dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(t) = 52$.
b- En déduis à partir de quel jour la population de bactéries sera égale à 52 000 individus.
- 5) a-Quelle est la limite de f en $+\infty$?
b-En déduis une interprétation de quant à la population de bactéries.
- 6) Trace la courbe (C_f) de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Echelle : 1 cm $\rightarrow$ 10 ans sur l'axe(ox) et 1 cm $\rightarrow$ 10 000 individus sur l'axe(oy))

Situation 10 : Un laboratoire médical désire mesurer le nombre de personne contaminées par jour par un virus à partir d'une « fonction contagion » f , définie sur l'intervalle $[1; 30]$ par :

$f(t) = 0,02t^3 - 1,4t^2 + 22t + 640$ où t désigne la durée la durée en jour de propagation.

On appelle f' la dérivée de la fonction f . On dit qu'il y a « contagion » lorsque f' est positive. Sinon on dit qu'il y a « non contagion ».

- 1) Quelle est le nombre de personnes contaminés entre le 1^{er} jour et le 21^{ème} jour ?
- 2) Détermine les intervalles où il y a contagion et non contagion.
- 3) On désigne par $S = \int_{10}^{15} f(t)dt$, l'aire en m² de la zone contaminée par le virus.
Détermine cette aire.

L'obstacle est en crayon et le travail est la gomme.

Problème 1 :

La fonction numérique f , dont le tableau de variation est donné ci-dessous, est continue et dérivable en tout point de son ensemble de définition. On se propose de l'étudier.

X	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$0,5$	$-$	0	$+$
$f(x)$								

- 1) Donner l'ensemble de définition de f .
- 2) Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 3) Donner une équation des asymptotes à la courbe représentative (C_f) de f .
- 4) Écrire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1 .
- 5) Tracer (T) , puis représenter à main levée une esquisse de la courbe (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; i; j)$ (unité : 1 cm).
- 6) Justifier que l'équation $x \in D_f; f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $] -3; -1[$.
- 7) Résoudre l'inéquation $x \in D_f; f(x) < 0$.

Problème 2 :

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$. On désigne par (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (o, i, j) .

- 1) Montre que (C_f) admet deux asymptotes dont on déterminera les équations.
- 2) Précisez la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique.
- 3) Étudie les variations de f .
- 4) Existe-t-il des points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$?

Si oui trouve les équations de ces tangentes en ces points.

- 5) Trace la courbe (C_f) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé (o, i, j)
- 6) Montre que la restriction h de f à l'intervalle $]1; 2]$ est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.

- 7) a) Calcule $(h^{-1})'(\frac{5}{2})$.

b) Dresse le tableau de variation de h^{-1} puis trace sa courbe représentative dans le même repère que celle de f .

Problème 3

Partie A : On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

L'obstacle est en crayon et le travail est la gomme.

- 1) Étudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
- 2) Montre que l'équation $g(x)=0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.
- 3) En déduis le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

On considère la fonction f définie par $\frac{x^3-4}{x^2+1}$. Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; i; j)$.

- 1) Détermine le domaine de définition de f , puis Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f .
- 2) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2+1)^2}$. En déduis les variations de f .
- 3) a) Détermine les réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$.
- b) En déduis que C_f admet une asymptote oblique (Δ) et étudie la position de C_f par rapport à (Δ) . Vérifie en particulier que C_f rencontre (Δ) en un point unique A .
- 4) Détermine les abscisses des points B et B' de C_f admettant une tangente parallèle à (Δ) .
- 5) Démonstre que $f(\alpha) = \frac{2}{3} \alpha$. En déduis une valeur approchée de $f(\alpha)$.
- 6) Trace C et (Δ) .

Problème 4 :

Partie A : Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o, i, j) . On considère ci-dessous son tableau de variation

x	$-\infty$	-4	-2	-1	0	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	+	+	$\frac{1}{3}$	-2 -	+	2 +
$f(x)$	1 ↘ ○ ↘ -1		○ ↗ $+\infty$			$-\infty$ ↗ -2 ↘ $-\infty$		$-\infty$ ↗ ○ ↗ $+\infty$	

- 1- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- 2- a) Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- b) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe (C_f) de f
- 3- Déterminer les images des intervalles suivants : $] -4; -1[$; $[-2; -1]$ et $] 3; +\infty[$
- 4- a) Déterminer les solutions de l'équation $(E) : x \in D_f, f(x) = 0$.
- b) Déterminer les solutions des inéquations : $(I_1) : x \in D_f, f(x) < 0$; $(I_2) : x \in D_f, f(x) > 0$

L'obstacle est en crayon et le travail est la gomme.

c) Déduire le signe de f sur D_f .

5- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 5

6- a) f est-elle dérivable en 1 ? Justifier votre réponse.

b) Donner une interprétation géométrique de la dérivabilité en 1.

7) On considère la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = 0$

En déduire la nature de la droite (D) par rapport à la courbe (C_f) .

8) Construire (D) , (T) , les asymptotes et la courbe (C_f) . On prendra un soin particulier au point d'abscisse

1. Unité graphique 1 cm.

Partie B Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle $]3; +\infty[$.

1- Montrer que h réalise une bijection de l'intervalle $]3; +\infty[$ vers un intervalle k à préciser. 2-

Soit h^{-1} , la bijection réciproque de h .

a) Déterminer le sens de variation de h^{-1} .

b) Dresser le tableau de variation de h^{-1}

3- Construire la courbe $(C_{h^{-1}})$ de h^{-1} dans le même repère que la courbe (C_f) de f .

Problème 5 :

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 2x - 2$

1- Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2- a) Calculer la dérivée g' de la fonction g ; en déduire que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variation de g .

3- a) Démontrer que l'équation : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une solution unique α .

b) Justifier que $0,7 < \alpha < 0,8$.

c) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.

4- Démontrer que $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[; g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[; g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o, i, j) . Unité graphique : 2cm.

1- Calculer les limites de f en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.

2- a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Étudier les positions relatives de (D) par rapport à (C_f)

3- On admet que f est dérivable sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

L'obstacle est en crayon et le travail est la gomme.

- a) Démontrer que pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$
- b) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x ; puis en déduire les variations de f .
- c) Dresser le tableau de variation de f
- 4- Déterminer les coordonnées du point A où la tangente à (C_f) est parallèle à (D)
- 5- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1
- 6- Construire les droites (D) et (T) , puis la courbe (C_f) .

Problème 6

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{|x - 2| - 2}$$

- 1- a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

b) Montrer que :
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; 2[; f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{-x} \\ \forall x \in [2; 4[\cup]4; +\infty[; f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 4} \end{cases}$$

- c) Calculer les limites de f aux bornes de D_f

- 2- a) Étudier la continuité de f en 2

- b) Montrer que f n'est pas dérivable en 2, Trouver éventuellement la tangente à gauche et la tangente à droite à la représentation graphique C_f de f au point d'abscisse 2.

- 3- Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$; puis pour $x \in [2; 4[\cup]4; +\infty[$

En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

- 4- a) Montrer que la restriction h de f , à $]7; +\infty[$, est une bijection de $]7; +\infty[$ vers un intervalle K à préciser.

- b) Calculer $h(7)$. Sans expliciter la réciproque h^{-1} de h , démontrer que h^{-1} est dérivable en $\frac{32}{3}$, puis calculer $(h^{-1})'(\frac{32}{3})$.

- 5- a) Montrer que les droites $(D_1): y = -x + 2$ et $(D_2): y = x + 2$ sont des asymptotes obliques à (C_f) en $-\infty$ et $+\infty$

- b) Dans le plan muni d'un repère orthogonal (o, i, j) . Unité graphique : 1 cm Construire la courbe (C_f) , les asymptotes à C_f et les tangentes au point d'abscisse 2.

Problème 7 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3x^2}{|3-x|+2x}$ de représentation graphique (C_f) dans repère orthogonal $(o; i; j)$. (Unité 1 cm pour 1 en abscisse et 1 cm pour 5 en ordonnées).

- 1) Justifie que :
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -3[\cup]-3; 3[, f(x) = \frac{3x^2}{x+3} \\ \forall x \in [3; +\infty[, f(x) = \frac{x^2}{x-1} \end{cases}$$

- 2) a°- calculer les limites de f à gauche et à droite en -3 puis interpréter graphiquement les résultats.

b°- calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

L'obstacle est en crayon et le travail est la gomme.

3) Étudier la continuité de f en 3.

4) on admet que f n'est pas dérivable en 3.

a°- calculer $f'(x)$ pour tout x de $] -\infty; -3[\cup] -3; 3[$ et $[3; +\infty[$.

b°- Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

5) a°- Démontrer que les droites $(D_1) : y = 3x - 9$ et $(D_2) : y = x + 1$ sont des asymptotes à (C_f) respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

b°- préciser la position relative de (C_f) par rapport à (D_1) et (D_2) .

6) Tracer (D_1) , (D_2) et (C_f) .

Problème 8

Partie A : Soit g la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1- Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

2-a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 1,6 et 1,7.

b) préciser le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x dans $\mathbb{R}$.

Partie B : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\} : f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$

1- Calculer les limites de f aux bornes de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et interpréter graphiquement les résultats.

2-a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3) Écrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

4) Faire la représentation graphique de (T) et (C) .

Problème 9 :

I. Vérifier que l'ensemble des solutions de l'inéquation $x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 2x - 3} < x + 1$ est $S_{\mathbb{R}} = [1; +\infty[$

II. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x - \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j) . Unité graphique : 1 cm

1- Donner l'ensemble de définition D_f de f et calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat de la limite de f en $+\infty$.

2- Étudier la dérivabilité de f en -3 et en 1 ; puis interpréter graphiquement chaque résultat.

3- On admet que f est dérivable pour $x < -3$ et pour $x > 1$. Étudier le sens de variation de f à l'aide de la partie A ; puis dresser son tableau de variation.

4- Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

5- Étudier la position de (Δ) par rapport à (C) sur $] -\infty; -3]$.

6- a) Donner les coordonnées de Ω point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

L'obstacle est en crayon et le travail est la gomme.

b) Donner une équation de la droite (T) tangente à (C) au point Ω .

7) Tracer (C) et (Δ).

8) Soit g la restriction de f à $[1; +\infty[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

b) Soit g^{-1} la bijection réciproque de g , sans expliciter g^{-1} , dresser son tableau de variation.

c) Déterminer g^{-1} .

Problème 10 :

1- On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right)$ a)

Étudier les variations de g

b) Calculer la limite de g en $+\infty$

c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R} ; g(x) < 0$;

2- On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}$$

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; i; j)$

a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation

3- Montrer que les droites (D) : $y=1$ et (Δ) : $y = -x + 1$ sont des asymptotes à (C) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$

4- Construire les droites (D), (Δ), et la courbe (C)

5-a) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K à préciser.

b) Donner le sens de variation de la bijection réciproque f^{-1} de f , puis dresser son tableau de variation

c) Calculer $f(0)$ et démontrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$

d) En déduire $(f^{-1})'(\frac{3}{2})$

6-a) Construire la courbe (C') de f^{-1}

b) Donner une expression explicite de f^{-1} .

Problème 11 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et (C) sa courbe représentative

1) Étudier les variations de f

2) Montrer que (C) admet un point d'inflexion Ω dont on précisera les coordonnées

3) Étudier les branches infinies de (C)

4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]1; 2[$

L'obstacle est en crayon et le travail est la gomme.

5) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera

Donner le domaine de définition de f^{-1} bijection réciproque de f

6) Déterminer $f^{-1}(x)$

7) Soit (C^{-1}) la courbe représentative de f^{-1}

Construire dans un même repère les courbes (C) et (C^{-1}) .

Problème 12 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et (C) sa courbe représentative

1) Exprimer $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue

2) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition, (C) admet-elle des tangentes aux points d'abscisses 1 et 5 ?

3) Étudier les variations de f

4) Démontrer que les droites d'équations $y = x - 3$ et $y = -x + 3$ sont asymptotes à (C)

5) Tracer (C) et démontrer qu'elle admet un axe de symétrie, dont on précisera l'équation.

6) Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 5]$ le point $M \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ est une distance constante du point $\Omega \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En déduire la nature de (C) sur l'intervalle $[1; 5]$

Problème 13

Soit la fonction f définie $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 2x + 2}$ et (C) sa courbe représentative

1) Vérifier que f définie sur $\mathbb{R}$

2) Calculer les nombres réels a et b pour que (C) passe par le point $A(2; 0)$ et admette au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite d'équation

$$y = -2x$$

3) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 - 2x + 2}$

a) Étudier les variations de g et les limites de g

b) Montrer que la courbe (C) représentative de g admet une asymptote

c) Montrer que le point $I(1; 1)$ est un centre de symétrie

d) Construire (C) dans un repère orthonormal

4) a) Soit m un nombre réel. Utiliser (C) pour résoudre graphiquement l'équation où l'inconnue est x : $x^2(m-1) + 2x(2-m) + 2(m-2) = 0$

b) Vérifier ces résultats par le calcul.

Problème 14 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + |x-2|}{|x+1|}$ et (C) sa courbe représentative

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en -1 et 2

L'obstacle est en crayon et le travail est la gomme.

2) Étudier les variations de f et tracer (C) .

Problème 15

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R} - \{1\}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x + 1| + \frac{1}{x+1}$.

On note (C) sa courbe représentative de f .

- 1) Écrire f sans symboles de valeur absolue et calculer les limites aux bornes de son domaine de définition.
- 2) Montrer que (C) admet trois asymptotes et préciser leur équation.
- 3) Montrer que f est continue en $x_0 = -1$
- 4) Étudier la dérivabilité de f en -1 et donner une interprétation graphique du résultat.
- 5) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .
- 6) Préciser les coordonnées des points d'intersection de (C) avec les axes du repère.
- 7) Construire (C) .

Problème 16

Partie A : ***** *Signe d'une fonction.*

1) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réels à déterminer.

Déterminer les réels a, b et c sachant que la courbe (C_h) passe par le point $A(0; 2)$ et admet une tangente horizontale au point $B(1; 4)$.

2) soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^3 + 3x + 2$.

- a) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de g .
- b) Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
- c) Expliquer pourquoi -1 et 2 sont les solutions réelles de l'équation $g(x) = 0$.
- d) En déduire le tableau de signe de $g(x)$.

Partie B ***** *Étude d'une fonction*

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R} - \{0\}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{-x^3 - 3x - 1}{x^2}$ On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; i; j)$. L'unité graphique est le centimètre.

- 1) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f .
- 2) On note f' la fonction dérivée de f . Montrer que pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
- 3) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
- 4) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à (C) .
- b) Étudier la position de (C) par rapport à (D) .
- 5) Montrer que pour $x \neq 0$, $f''(x) = \frac{-6x-6}{x^4}$ et en déduire que le point -1 est un point d'inflexion à (C) .

L'obstacle est en crayon et le travail est la gomme.

6) déterminer les équations des droites (T) et (T') tangentes à (C) respectivement au point d'abscisse 1 et au point d'abscisse -1.

7) Construire (D) , (T) , (T') et (C) .

Problème 17 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 2x}{|x| - 1}$$

1) Détermine de l'ensemble D_f de f .

2) Écris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

3) Calcule les limites de f aux bornes de D_f . Précise les asymptotes à la courbe de (C_f) de f .

4)a) Étudie la dérivabilité de f en 0. Donne une interprétation géométrique du résultat

b) Dresse le tableau de variation de f .

c) Tracer (C_f) et ses asymptotes.

5)a) Montre la restriction g de f à l'intervalle $I =]-1; 1[$ réalise une bijection de I sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ à préciser.

b) Calcule $g(0)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$, $(g^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right)$ où g^{-1} désigne la bijection réciproque de g .

Problème 18

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^2}{|1-x^2|-3}$.

1)a) Résous l'équation $x \in \mathbb{R}, |1-x^2|-3=0$.

b) Détermine le domaine de définition f .

2) Étudie la parité de f . Déduis-en une interprétation géométrique quant au domaine d'étude.

3) Écris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

4) Étudie la dérivabilité de f au point 1. Déduis en une interprétation géométrique.

5) Étudie les variations de la fonction f dans son domaine d'étude.

6) Démontre que la fonction f réalise une bijection de $]2; +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.

7) Représente graphiquement dans un repère (o, i, j) la courbe (C_f) de la fonction f .

Problème 19 :

I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$.

1) Étudie les variations de g .

2) Montre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α . Déduis-en le signe de g sur D_g et vérifie que $\alpha \in]-1; 0[$.

II. On considère la fonction numérique f définie par :

L'obstacle est en crayon et le travail est la gomme.

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[, f(x) = 2x^2 - x - \frac{2}{x-1} \\ \forall x \in]1; +\infty[, f(x) = x - \frac{2}{x-1} \end{cases}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; i; j)$ (C_1) et (C_2) sont respectivement les courbes de f sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

- 1) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) Démontre que pour tout réel x de $]-\infty; 1[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$. Étudie le sens de variation de f sur $]-\infty; 1[$ puis sur $]1; +\infty[$.
- 3) Dresse le tableau de variation de f .
- 4) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C_2) au voisinage de $+\infty$. Étudie la position de (C_2) par rapport à (D) .
- 5) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interprète graphiquement le résultat.
- 6) Détermine les coordonnées des points d'intersections de (C_2) avec les axes du repère.
- 7) Représente graphiquement f dans le repère $(O; i; j)$.
- 8) Soit h la restriction de f à $]1; +\infty[$. Démontre que h est bijective de $]1; +\infty[$ sur un intervalle K à déterminer. Représente graphiquement h^{-1} dans le même repère $(O; i; j)$. Calcule $(h^{-1})'(0)$.

Problème 20 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2) Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
- 3) a) Étudier la dérivabilité de f à gauche de -2 , interpréter géométriquement ce résultat.
b) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty; -2[$.
c) Prouver que : $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2}{4}-1} \times 2\sqrt{\frac{x^2}{4}-1-x}}$.
d) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty; -2]$ sur un intervalle j que l'on précisera.
- 5) On désigne par f^{-1} la réciproque f .
a) Étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en -1 , interpréter géométriquement ce résultat.
b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} .
c) Expliciter f^{-1} pour $x \in j$.

L'obstacle est en crayon et le travail est la gomme.