

Continuité d'une fonction numérique

Remarques

I. Continuité d'une fonction numérique :

Activité ①: Soutient des prérequis

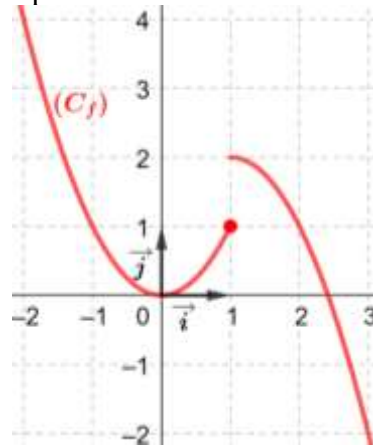
Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x+3}{x-1}$	b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x x -4x+3}{x^5-7x+2}$	c. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+5x+6}{x+2}$
d. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2+3x-9}{x^2+x-6}$	e. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}$	f. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{x+3}}{x+2}$
g. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+5x+6}{2-x}$	h. $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2+x-2}{-x^2-x+6}$	i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

1. Continuité d'une fonction en un point

Activité ②:

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f .

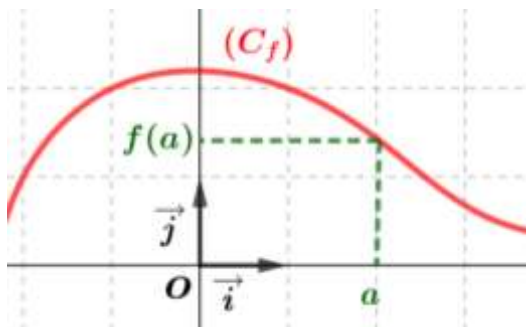


- Déterminer graphiquement $f(-1)$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. Que peut-on déduire ?
- Déterminer graphiquement $f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Que peut dire sur (C_f) au point $x_0 = 1$?

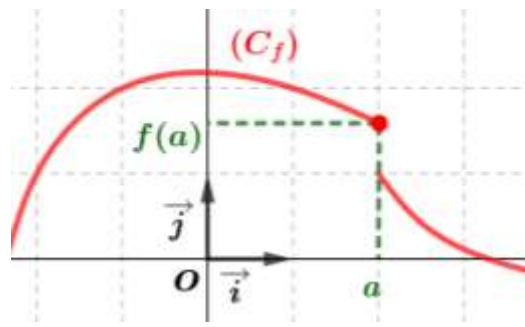
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I .

On dit que f est **continue** en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.



- f est continue en a



- f est discontinue en a

Exemples :

- La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} ; x \neq 3 \\ f(3) = 6 \end{cases}$ est continue en 3.

$$\begin{aligned} \text{En effet : } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} x+3 = 6 = f(3). \end{aligned}$$

Pr. LATRACH ABDELKBIR

○ La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(3x)}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ est discontinue en 0.

$$\begin{aligned} \text{En effet : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x} \\ &= 3 \neq f(0). \end{aligned}$$

✍ Application ② :

Etudier la continuité des fonctions suivantes au point a .

1. $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x - 1} ; x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ et $a = 1$.
2. $\begin{cases} g(x) = \frac{x\sqrt{x+2}-4}{x-2} ; x \in [-2; 2[\cup]2; +\infty[\\ g(2) = \frac{5}{2} \end{cases}$ et $a = 2$.

✍ Exercice ② :

Etudier la continuité des fonctions suivantes au point a .

1. $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} ; x \neq -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$ et $a = -1$.
2. $\begin{cases} g(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 2x} ; x > 2 \\ g(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$ et $a = 2$.

2. Continuité à droite – continuité à gauche :

✍ Définition :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a - r ; a]$ avec $r > 0$.
On dit que f est **continue à droite** de a si seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a ; a + r[$ avec $r > 0$.
On dit que f est **continue à gauche** de a si seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

○ Exemple :

La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} ; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$ est continue à droite en 1 est non continue en 1 à gauche.

$$\begin{aligned} \text{En effet : } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (\text{Du fait que } |x - 1| = x - 1 \text{ si } x > 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2 = f(1). \end{aligned}$$

Ainsi f est continue à droite en 1.

$$\begin{aligned} \text{Et : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{-(x - 1)} \quad (\text{Du fait que } |x - 1| = -(x - 1) \text{ si } x < 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x + 1) = -2 \neq f(1). \end{aligned}$$

Ainsi f est discontinue à gauche en 1.

✍ Propriété :

f est continue en a si seulement si f est continue à gauche et à droite de a .
Autrement : f est continue en $a \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

✍ Application ③ :

On considère f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} ; x > 0 \\ f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} ; x < 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.
2. f est-elle continue en 0.

✍ Exercice ②:

1. Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} ; x > 2 \\ f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-3} ; x \leq 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.

2. Soit g la fonction définie par
$$\begin{cases} g(x) = x^3 + ax & ; x > -1 \\ g(x) = -x + 1 & ; x \leq -1 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que g soit continue en -1 .

3. Continuité d'une fonction sur un intervalle :

✍ Définition :

- On dit que f est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ si f est continue en tout point de $]a; b[$.
- On dit que f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ si f est continue en tout point de $]a; b[$ et continue à droite de a et à gauche de b .

○ Remarque :

On définit de même manière la continuité sur les intervalles $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$.

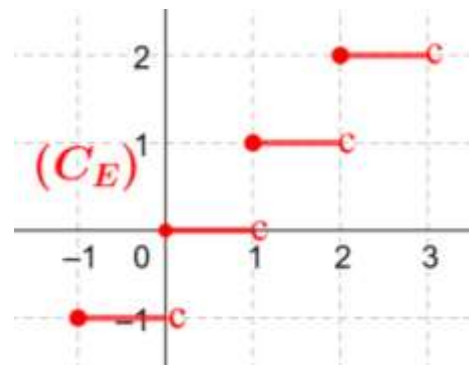
○ Exemple : Fonction partie entière

- La fonction partie entière est la fonction qui, à tout réel x , associe l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. On note la partie entière de x par $E(x)$ ou $[x]$.

○ Exemples

$E(3,2) = 3$ parce que $3 \leq 3,2 < 4$ et $E(-1,2) = -2$ parce que $-2 \leq -1,2 < -1$.

- La courbe de la fonction $x \mapsto E(x)$ sur l'intervalle $[-1; 3]$ est :



- La fonction $x \mapsto E(x)$ est continue sur l'intervalle $[-1; 0[$ du fait qu'elle est continue en tout point de $] -1; 0[$ et à droite en -1 car

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} E(x) = -1 = E(-1).$$

- La fonction $x \mapsto E(x)$ n'est pas continue sur l'intervalle $]1; 3[$ du fait qu'elle n'est pas continue en 1 car $\lim_{x \rightarrow 1^+} E(x) = 1 = E(1)$ et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x) = 0 \neq E(1).$$

✍ Propriété :

- Toute fonction polynômiale est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur un intervalle inclus dans son domaine de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue sur $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue $\mathbb{R}^+$.
- La fonction $x \mapsto |x|$ est continue $\mathbb{R}$.

○ Exemples :

- La fonction $f: x \mapsto x^3 + 2x^2 - x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ parce qu'elle est une fonction polynômiale.
- La fonction $g: x \mapsto \frac{5x^3+2x-1}{x^2-1}$ est continue sur $]1; +\infty[$ parce qu'elle est une fonction rationnelle et $]1; +\infty[\subset \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

✍ Application ③ :

On considère f la fonction définie par
$$\begin{cases} f(x) = -x + 4 & ; \quad x < 3 \\ f(x) = \frac{6-x}{x} & ; \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

II. Image d'un intervalle par une fonction continue :

1. Image d'un segment- Image d'un intervalle

 **Propriété :**

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

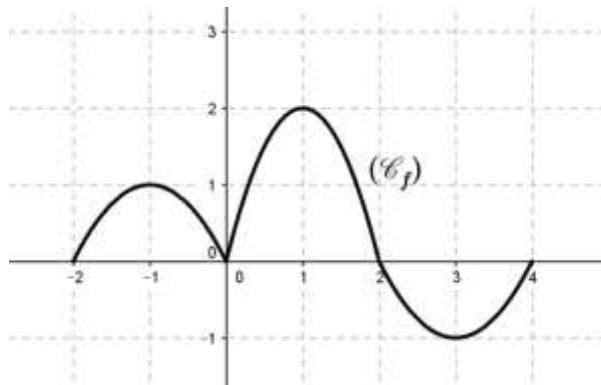
 **Remarque :**

Si f est continue sur un segment $[a, b]$ et M et m sont respectivement le maximum et le minimum de f sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [m, M]$.

 **Application ④ :**

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f définie sur $[-2; 4]$.

Déterminer l'image des intervalles suivants $[-2, 3]$, $[0, 1]$, $[1, 3]$ et $[-1, 1]$ par f .



2. Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

Dans ce tableau suivant a et b sont deux nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Image de l'intervalle I par la fonction f		
L'intervalle I	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a) \right]$
$]a, b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b) \right]$	$\left[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]a, b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$

 **Exemple :**

On considère f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x - 1$.

La fonction f est strictement décroissante sur $] - \infty; 2]$ et strictement croissante sur $[2; +\infty[$. On a :

- $f([2; 4]) = [f(2); f(4)] = [-5; -1]$.
- $f([-1; 1]) = [f(1); f(-1)] = [-4; 4]$.
- $f([2; +\infty[) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [-5; +\infty[$.
- $f(]-\infty; 2]) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[= [-5; +\infty[$.

 **Application ⑤ :**

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{3x+2}{x-4}$.

1. Déterminer D_f .
2. Étudier la monotone de f .
3. Déterminer $f([0, 1])$; $f([4, +\infty[)$ et $f(]-\infty, 4[)$.

 **Exercice ⑥ :**

On considère f une fonction définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction
2. Déterminer les images des intervalles suivants $] - 1; 0]$; $[1; 2]$; $[-1; 2[$; $[1; +\infty[$ par f .

III. Opérations sur les fonctions continues

Propriété :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

- Les fonctions $f + g$; $f \times g$; λf et $|f|$ sont continues sur I .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f^n est continue sur I .
- Si $(\forall x \in I) : g(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .
- Si $(\forall x \in I) : f(x) \geq 0$, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I .

Exemples :

- La fonction $f: x \mapsto 2x^2 - x + \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $[0, +\infty[$ qui sont $x \mapsto 2x^2 - x$ et $x \mapsto \sin(x)$.
- On considère $g: x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$. On a :
 - La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $] - \infty; 1[$ puisqu'elle est une fonction polynomiale et on a $(\forall x \in] - \infty; 1[): x^2 + 1 > 0$. Ainsi $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est continue sur $] - \infty; 1[$.
 - La fonction $x \mapsto x + 1$ est continue sur $] - \infty; 1[$ et on a $(\forall x \in] - \infty; 1[): x + 1 \neq 0$.
 Il en résulte que la fonction g est continue sur $] - \infty; 1[$.

Application @ :

Montrer que f est continue sur I dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^2 + 1 + \sin(x)$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \cos(x) \times \sqrt{4x^2 + 5}$ et $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$ et $I =]2; +\infty[$.

Propriété :

Soient f et g deux fonctions.

Si f est continue sur un intervalle I et g continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ alors la fonction $g \circ f$ est continue sur l'intervalle I .

Exemple :

On considère la fonction $h: x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

On a $h = g \circ f$ avec $f: x \mapsto \sqrt{x}$ et $g: x \mapsto \frac{x}{x+1}$.

Puisque f est continue sur $[0; +\infty[$ et g est continue sur $] - 1; +\infty[$ et $f([0; +\infty[) \subset [0; +\infty[$, alors h est continue sur $[0; +\infty[$.

Application @ :

On considère la fonction $h: x \mapsto \sin(x^2 - 4x + 1)$.

Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

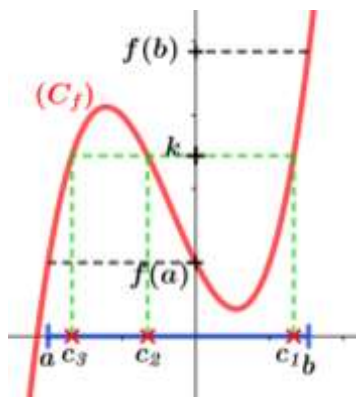
IV. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.

En d'autres termes : l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a, b]$ pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.



○ Exemple :

Montrons que l'équation (E) : $x^2 - \sqrt{x+2} = 2$ admet au moins une solution sur $[-2; 0]$.

On considère f la fonction définie par $f(x) = x^2 - \sqrt{x+2}$.

L'équation (E) est équivalente à l'équation $f(x) = 2$.

La fonction f est continue sur $[-2; 0]$ comme somme de deux fonctions continues et on a $f(-2) = 4$ et $f(0) = -\sqrt{2}$.

Puisque $f(0) \leq 2 \leq f(-2)$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation (E) admet au moins une solution sur $[-2; 0]$.

○ Corollaire :

Si la fonction f est continue sur $[a, b]$ tel que $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.

Si de plus f est strictement monotone, alors cette solution est unique.

○ Exemple :

Montrons que l'équation (E) : $x^3 + x^2 + 1 = 0$ admet une unique solution α telle que $-1 < \alpha < 0$.

On considère f la fonction définie par $f(x) = x^3 + x^2 + 1$.

L'équation (E) est équivalente à l'équation $f(x) = 0$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-1; 0]$ et on a $f(-1) \times f(0) < 0$.

Donc d'après T.V.I l'équation (E) admet une solution unique α tel que $-1 < \alpha < 0$.

Donnons un encadrement de α d'amplitude 0,25.

On a $-1 < \alpha < 0$, alors $\alpha = -\frac{1}{2}$ ou $\alpha \in]-1, -\frac{1}{2}[$ ou $\alpha \in]-\frac{1}{2}, 0[$.

Or $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$, alors $\alpha \neq -\frac{1}{2}$.

Et puisque $f(-1) \times f(-\frac{1}{2}) < 0$, alors $\alpha \in]-1, -\frac{1}{2}[$ et l'amplitude de cet encadrement est $-\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2} > 0,25$. On répète donc le procédé précédent.

On a $\alpha \in]-1, -\frac{1}{2}[$, alors $\alpha = -\frac{3}{4}$ ($-\frac{3}{4}$ est le centre de $\alpha \in]-1, -\frac{1}{2}[$) ou $\alpha \in]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}[$ ou $\alpha \in]-1, -\frac{3}{4}[$.

Puisque $f(-\frac{3}{4}) \neq 0$ et $f(-\frac{3}{4}) \times f(-\frac{1}{2}) < 0$, alors $\alpha \in]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}[$ et l'amplitude de cet encadrement est $-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 0,25$.

Ce procédé est appelé **la dichotomie**.

☞ Application ②:

1. Montrer que l'équation $x^5 - x^3 + 5x - 4 = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0, 1]$.

2. Montrer que l'équation $\sin(x) + \frac{1}{2} = -x$ admet une solution unique dans l'intervalle $[\frac{-\pi}{6}; 0]$.

☞ Exercice ④:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$ puis vérifier que $1 < \alpha < 2$.

2. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,25.

3. Donner le signe de f sur $[1; +\infty[$.

V. Fonction Réciproque d'une fonction continue et strictement monotone :

✎ Activité ②:

Soit la fonction définie sur $I = [1; 4]$ par : $f(x) = x^2 - 2x$

1. Montrer que f est continue et strictement croissante sur I .

2. Déterminer l'intervalle J l'image de I par f .

3. Soit $x \in J$ et $y \in I$, montrer que $f(y) = x \Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{x + 1}$.

4. On considère g la fonction définie sur J par $g(x) = 1 + \sqrt{1 + x}$.

a. Remplir le tableau suivant :

• $g(-1) =$	• $f(1) =$
• $g(0) =$	• $f(2) =$
• $g(8) =$	• $f(4) =$

b. Que remarquez-vous ?

c. Montrer que $(\forall x \in I) (g \circ f)(x) = x$ et $(\forall x \in J) (f \circ g)(x) = x$.

La fonction g est appelée la fonction réciproque de f et on la note par f^{-1} .

✎ Propriété :

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f admet une fonction réciproque, notée f^{-1} , définie de $J = f(I)$ vers I telle que : $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$

○ Conséquences :

- $(\forall x \in I): (f^{-1} \circ f)(x) = x$.
- $(\forall x \in J): (f \circ f^{-1})(x) = x$.

○ Exemple :

La fonction $f: x \mapsto \sqrt{x} + 2$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc f admet une fonction réciproque f^{-1} continue et strictement croissante sur $f([0, +\infty[) = [2, +\infty[$.

Déterminons l'expression de f^{-1} :

Soient $y \in [0, +\infty[$ et $x \in [2, +\infty[$, on a :

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} + 2 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = x - 2$$

$$\Leftrightarrow y = (x - 2)^2.$$

Donc $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow y = (x - 2)^2$.

Il en résulte : $(\forall x \in [2, +\infty[) f^{-1}(x) = (x - 2)^2$.

✎ Application ②:

On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x - 4}$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2. Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

✎ Exercice ②:

On considère la fonction f définie sur $] -\infty, -1[$ par $g(x) = \frac{2x+3}{x+1}$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

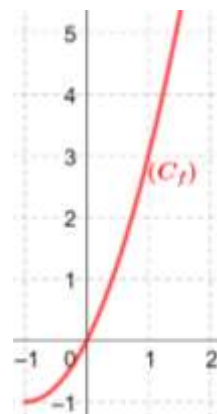
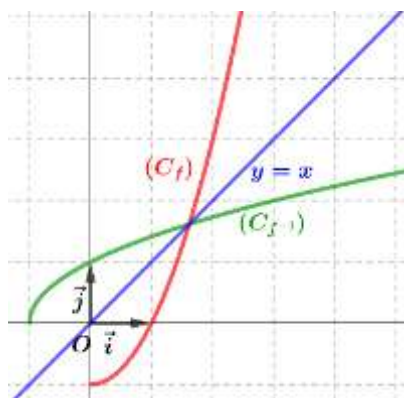
2. Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

✎ Propriété :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors :

- La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a même sens de variations que la fonction f .
- Les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé, sont symétriques par

rapport à la droite d'équation $y = x$.



Application @:

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-1; +\infty[$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
2. Dresser le tableau de variations de f^{-1} .
3. Construire la courbe représentative de f^{-1} .

VI. Fonction Racine $n^{\text{ième}}$:

Soit n un entier naturel tel que : $n \geq 1$ et Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^n$.

- f est une fonction polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$ par suite sur $\mathbb{R}^+$.
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, du fait que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f'(x) = nx^{n-1} \geq 0$.

Alors f admet une fonction réciproque f^{-1} , appelée **fonction racine n -ième**, définie sur $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$.

- l'image du nombre x de $\mathbb{R}^+$ par f^{-1} est noté $\sqrt[n]{x}$ et on a :
 $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) : x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$

Remarques :

pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a :

- $\sqrt[n]{x} = x$.
- $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.
- $\sqrt[3]{x}$ est appelée la racine cubique de x .

Conséquences :

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Exemples :

- $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$
- $\sqrt[5]{5} > \sqrt[5]{3}$ parce que $5 > 3$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x} = +\infty$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) x^5 = 32 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{32} = 2$.

Application @@:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^7 = 5$	2. $x^6 = -2$	3. $x^4 = 81$
4. $x^5 = -32$	5. $\sqrt[3]{3x-1} = 2$	6. $\sqrt[5]{2x-3} < 2$

Propriété :

Soient a et b deux réels positifs, et n et p sont deux entiers naturels non nuls.

- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.
- Si $b \neq 0$, alors $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$.
- $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$.
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$.

Exemple :

Simplifions le nombre : $A = \frac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{144}}$.

Application ①②:

1. Simplifier $A = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{64}}$; $B = \sqrt[3]{\sqrt[3]{729}}$ et $C = \frac{15\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[5]{9})^3}{\sqrt[5]{3}}$.
2. Mettre en ordre croissant les nombres $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt{5}$

Exercice ③:

Simplifier les nombres suivants : $A = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{256}} \times \sqrt[4]{64}}{\sqrt[5]{24300000} \times \sqrt[3]{1024}}$ et $B = \frac{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[4]{9}}{\sqrt[5]{729} \times \sqrt{\sqrt{3}}}$.

Propriété :

Soit f une fonction positive sur l'intervalle I et $x_0 \in I$.

- Si f est continue sur I alors $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est continue sur I .
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \geq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

(Les deux propriétés précédentes restent vraies au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$)

Application ①②:

1. On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 4}$.

- a. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
- b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. Calculer les limites suivantes :

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - 2x \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x+1} - x$$

Exercice ④:

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3+24} & 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^5-3x^2+4} & 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2+2} - 2x \\ 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x} & 5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x-1} & 6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+25}-3}{x^2-3x+2} \end{array}$$

VII. Puissances rationnelles d'un nombre réel strictement positif :

Définition :

Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et r un nombre rationnel tel que : $r = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$).

Le nombre a^r , appelé **puissance rationnelle de base a et d'exposant r** , est le nombre $\sqrt[q]{a^p}$.

Autrement : $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Exemples :

$\circ \quad 3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2}$	$\circ \quad 3^{\frac{5}{2}} = \sqrt{3^5}$	$\circ \quad \sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{5}}$	$\circ \quad 2^{-\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^{-5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^5}}$
---	--	---	---

 Propriété :

Soient a et b deux réels strictement positifs et r et r' deux rationnels.

- $a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$.
- $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$.
- $\frac{1}{a^r} = a^{-r}$.
- $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$.
- $(ab)^r = a^r \times b^r$.
- $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

 Application ①②:

Ecrire sous forme d'une puissance rationnelle les nombres $A = \frac{\sqrt[3]{4 \times 8^{\frac{1}{2}} \times \sqrt[5]{2}}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{4}}$ et $B = \frac{(27)^{\frac{2}{7}} \times (81)^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{17}{3}}}$

Continuité d'une fonction

2BSF 1 et 2

Pr. Latrach Abdelkbir

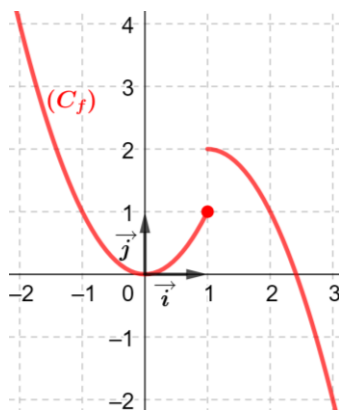
Activité ①: Soutient des prérequis

Calculer les limites suivantes :

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x+3}{x-1}$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x|x|-4x+3}{x^5-7x+2}$ c. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+5x+6}{x+2}$
 d. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2+3x-9}{x^2+x-6}$ e. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}$ f. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{x+3}}{x+2}$
 g. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+5x+6}{2-x}$ h. $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2+x-2}{-x^2-x+6}$ i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$

Activité ②:

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f .



- Déterminer graphiquement $f(-1)$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. Que peut-on déduire ?
- Déterminer graphiquement $f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Que peut dire sur (C_f) au point $x_0 = 1$?

Application ③:

Etudier la continuité des fonctions suivantes au point a .

- $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{x-1}$; $x \neq 1$ et $a = 1$.
 $f(1) = 1$
- $g(x) = \frac{x\sqrt{x+2}-4}{x-2}$; $x \in [-2; 2[\cup]2; +\infty[$ et $a = 2$.
 $g(2) = \frac{5}{2}$

Exercice ①:

Etudier la continuité des fonctions suivantes au point a .

- $f(x) = \frac{x^3+2x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$; $x \neq -1$ et $a = -1$.
 $f(-1) = 1$
- $g(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2-2x}$; $x > 2$ et $a = 2$.
 $g(2) = \frac{1}{2}$

Application ④:

On considère f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} & ; x < 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

- Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.
- f est-elle continue en 0.

Exercice ②:

- Soit f la fonction définie

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & ; x > 2 \\ f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-3} & ; x \leq 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.

- Soit g la fonction définie par

$$\begin{cases} g(x) = x^3 + ax & ; x > -1 \\ g(x) = -x + 1 & ; x \leq -1 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que g soit continue en -1 .

Application ⑤:

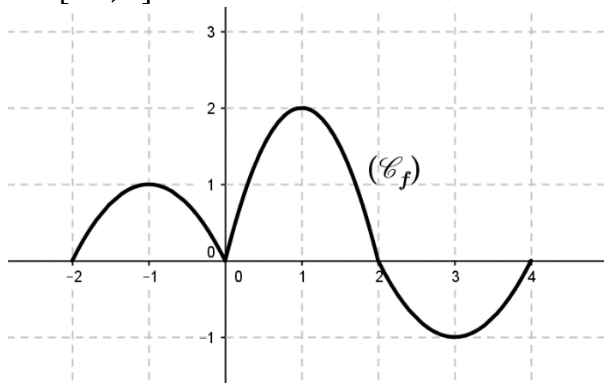
On considère f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = -x + 4 & ; x < 3 \\ f(x) = \frac{6-x}{x} & ; x \geq 3 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Application ⑥:

On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur $[-2; 4]$.



Déterminer l'image des intervalles suivants $[-2, 3]$, $[0, 1]$, $[1, 3]$ et $[-1, 1]$ par f .

Application ⑦:

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{3x+2}{x-4}$.

- Déterminer D_f .
- Etudier la monotone de f .
- Déterminer $f([0, 1])$; $f(]4, +\infty[)$ et $f(]-\infty, 4[)$.

Exercice ③:

On considère f une fonction définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

- Dresser le tableau de variation de la fonction
- Déterminer les images des intervalles suivants $] -1; 0]$; $[1; 2]$; $[-1; 2]$; $[1; +\infty[$ par f .

Application ⑧:

Montrer que f est continue sur I dans les cas suivants :

- $f(x) = x^2 + 1 + \sin(x)$ et $I = \mathbb{R}$.
- $f(x) = \cos(x) \times \sqrt{4x^2 + 5}$ et $I = \mathbb{R}$.
- $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2+x-2}$ et $I =]2; +\infty[$.

Application ⑨:

On considère la fonction $h: x \mapsto \sin(x^2 - 4x + 1)$.
Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

Application ⑩:

1. Montrer que l'équation $x^5 - x^3 + 5x - 4 = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0,1]$.
2. Montrer que l'équation $\sin(x) + \frac{1}{2} = -x$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{6}; 0\right]$.

✍ Exercice ④:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$ puis vérifier que $1 < \alpha < 2$.
2. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,25.
3. Donner le signe de f sur $[1; +\infty[$.

✍ Activité ②:

Soit la fonction définie sur $I = [1; 4]$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x$$

1. Montrer que f est continue et strictement croissante sur I .

2. Déterminer l'intervalle J l'image de I par f .

3. Soit $x \in J$ et $y \in I$, montrer que :

$$f(y) = x \Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{x+1}.$$

4. On considère g la fonction définie sur J par

$$g(x) = 1 + \sqrt{1+x}.$$

- a. Remplir le tableau suivant :

• $g(-1) =$	• $f(1) =$
• $g(0) =$	• $f(2) =$
• $g(8) =$	• $f(4) =$

- b. Que remarquez-vous ?

- c. Montrer que $(\forall x \in I) (g \circ f)(x) = x$
 et $(\forall x \in J) (f \circ g)(x) = x$.

✍ Application ②:

On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x-4}$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
2. Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

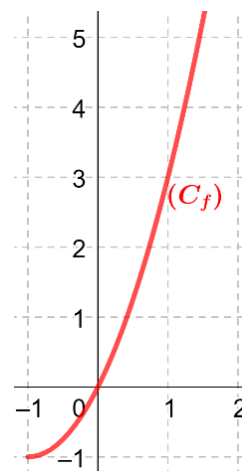
✍ Exercice ⑤:

On considère la fonction f définie sur $] -\infty, -1[$ par $g(x) = \frac{2x+3}{x+1}$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
2. Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

✍ Application ③:

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-1; +\infty[$.



1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
2. Dresser le tableau de variations de f^{-1} .
3. Construire la courbe représentative de f^{-1} .

✍ Application ①②:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^7 = 5$
2. $x^6 = -2$
3. $x^4 = 81$
4. $x^5 = -32$
5. $\sqrt[3]{3x-1} = 2$
6. $\sqrt[5]{2x-3} < 2$

✍ Application ①③:

1. Simplifier $A = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{64}}$; $B = \sqrt[3]{\sqrt[3]{729}}$

et $C = \frac{\sqrt[15]{3^5 \times \sqrt[3]{9 \times (5/9)^3}}}{\sqrt[5]{3}}$.

2. Mettre en ordre croissant les nombres $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt{5}$

✍ Exercice ⑥:

Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{256} \times \sqrt[4]{64}}}{\sqrt[5]{24300000} \times \sqrt[3]{1024}} \text{ et } B = \frac{\sqrt[3]{3 \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[4]{9}}}{\sqrt[5]{729} \times \sqrt{\sqrt{3}}}.$$

✍ Application ①②:

1. On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt[3]{3x^2+4}$.

- a. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
- b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} & \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - 2x \\ \text{c. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x+1} - x & \end{aligned}$$

✍ Exercice ⑦:

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3+24}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^5-3x^2+4}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2+2} - 2x$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x-1}$
6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+25}-3}{x^2-3x+2}$

✍ Application ①③:

Ecrire sous forme d'une puissance rationnelle les

nombres $A = \frac{\sqrt[3]{4 \times 82 \times \sqrt[5]{2}}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{4}}$ et $B = \frac{(27)^{\frac{2}{7}} \times (81)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[3]{3}}$