

Continuité D'une Fonction

Programme Marocain - BIOF

Niveau : 2BACSE

Professeur : Mehdi El Anani



Nom Et Prénom :

Classe : Lycée Qualifiant : Sidi Daoud

Ville : Ouarzazate

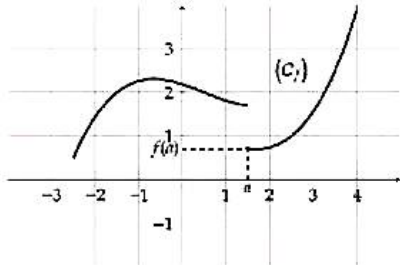
Continuité D'une Fonction Numérique - اتصال دالة عددية

I. Continuité d'une fonction en un point : (اتصال دالة في نقطة)

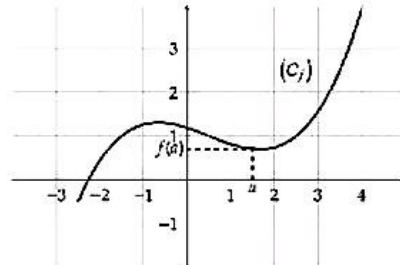
Définition 1 :

Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

Soit f une fonction numérique et $a \in D_f$. On dit que f est **continue** en a , si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



f n'est pas continue au point a



f est continue au point a

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ 3 & ; x = 1 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en 1.

Application 1 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} & ; x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & ; x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en 0 ?

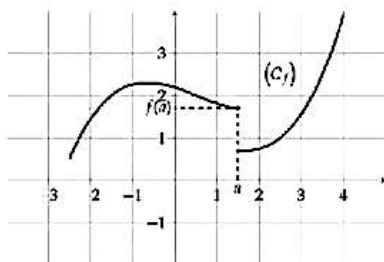
Définition 2 : (continuité à droite et à gauche - الاتصال على اليمين و اليسار)

♦ Soit f une fonction numérique définie au nombre a et à droite du nombre a .

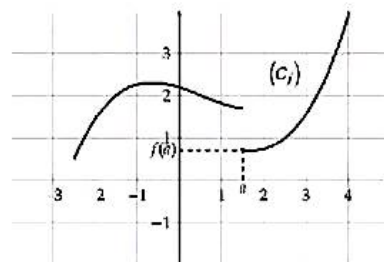
On dit que f est **continue à droite** en a , si : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

♦ Soit f une fonction numérique définie au nombre a et à gauche du nombre a .

On dit que f est **continue à gauche** en a , si : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$



f est continue à gauche au point a , mais pas continue à droite en a



f est continue à droite au point a , mais pas continue à gauche en a

Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

Propriété 1 :

$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Application 2 :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 ; x \leq 1 \\ \frac{4}{x} ; x > 1 \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction f en 1.

Tableau récapitulatif : (Continuité d'une fonction sur un intervalle - اتصال دالة على مجال)

Type d'intervalle	Conditions de continuité
$]a ; b[$	Continue en <u>tout point</u> à l'intérieur
$[a ; b]$	- Continue à l'intérieur - Continue à droite en a - Continue à gauche en b
$[a ; b[$	Continue à l'intérieur + à droite en a
$]a ; b]$	Continue à l'intérieur + à gauche en b
$[a ; +\infty[$	Continue sur $]a ; +\infty[$ + à droite en a
<math]-\infty ;="" b]<="" math=""></math]-\infty>	Continue sur <math]-\infty ;="" b[<="" math=""> + à gauche en b</math]-\infty>

Propriété 2 :

- ◆ Les fonctions **polynomiales** sont **continues** sur $\mathbb{R}$.
- ◆ Les fonctions **rationnelles** sont **continues** sur leur domaine de définition.
- ◆ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est **continue** sur $\mathbb{R}^+$
- ◆ Les fonctions **Sin** et **Cos** sont **continues** sur $\mathbb{R}$.
- ◆ La fonction **Tan** est **continue** sur son domaine de définition.

Propriété 3 : (Opérations sur les fonctions continues - العمليات على الدوال المتصلة)

Soient f et g deux fonctions **continues** sur un intervalle I .

- ◆ Les fonctions : $f \pm g$; $f \times g$ sont également des fonctions **continues** sur I .
- ◆ Si g ne s'annule pas sur I , alors les fonctions : $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont également **continues** sur I .
- ◆ Si f est **positive** sur I , alors la fonction $\sqrt{f}$ est également **continue** sur I .
- ◆ La fonction f^n est également **continue** sur I . ($n \in \mathbb{N}^*$)

Continuité D'une Fonction Numérique - اتصال دالة عددية

Application 3 :

Dans chaque cas , montrer que f est continue sur I

$f(x) = x + \sqrt{x}$ et $I = \mathbb{R}^+$	$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4} - \sin(x)$ et $I = \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{x^3 + x + \sqrt{x}}{\cos(x) + 2}$ et $I = \mathbb{R}^+$	$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ et $I = \mathbb{R}$

II. Image d'un intervalle par une fonction continue : (صورة مجال بدالة متصلة)

Propriété 4 : (Théorème des valeurs extrêmes)

Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

Si : f est **continue** sur $[a ; b]$, donc : $f([a ; b]) = [m ; M]$

Tels que : m le minimum et M le maximum de la fonction f
sur l'intervalle $[a ; b]$

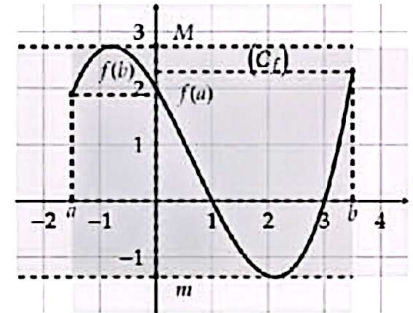


Tableau récapitulatif : (جدول تلخيصي)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I		
L'intervalle I	L'intervalle $f(I)$	
	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a ; b]$	$[f(a) ; f(b)]$	$[f(b) ; f(a)]$
$]a ; b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) ; f(b)]$	$[f(b) ; \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$[a ; b[$	$[f(a) ; \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) ; f(a)]$
$]a ; b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) ; \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) ; \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$[a ; +\infty[$	$[f(a) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; f(a)]$
$]a ; +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$] -\infty ; b]$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; f(b)]$	$[f(b) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$
$] -\infty ; b[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$
$\mathbb{R}$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$

Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

Application 4 :

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

1) Déterminer D_f puis étudier la monotonie de f sur $]-\infty; 0[$

2) Déterminer l'image de $]-\infty; 0[$ et de $[1; 2]$

Application 5 :

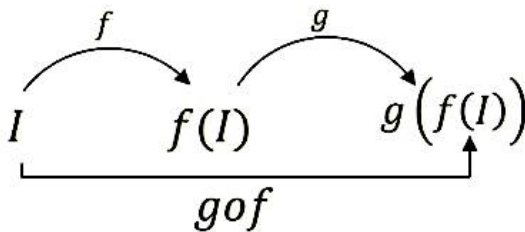
Soit f une fonction continue sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$, dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	-3	1	4	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	$-\infty$	2	1

Déterminer les images des intervalles suivants :

$]-\infty; -3]$	$]-3; 1[$	$]1; 4]$	$]4; +\infty[$
-----------------	-----------	----------	----------------

Propriété 5 : (la continuité de la composée de deux fonctions - اتصال مركب دالتين)



Si : f et g deux fonctions **continues** respectivement sur I et $f(I)$

Donc : $g \circ f$ est également **continue** sur I

Σ L ANANI
PROFESSEUR :
MATHÉMATIQUES

Exemple :

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \cos\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

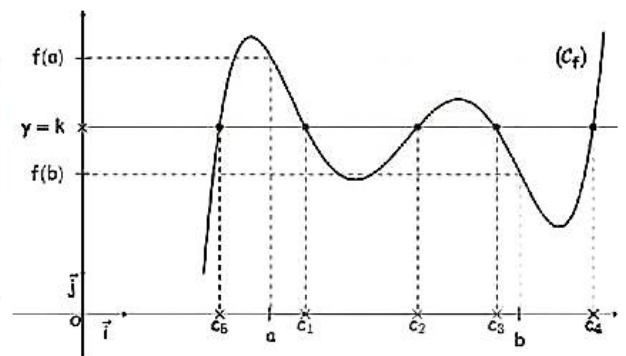
III. Théorème des valeurs intermédiaires : (مبرهنة القيم الوسيطة - TVI)

Énoncé :

Soit f une fonction **continue** sur $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a; b]$

tel que : $f(c) = k$



Exemple : montrer que l'équation $\sin(x) = \frac{1}{5}$ admet au moins une solution dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

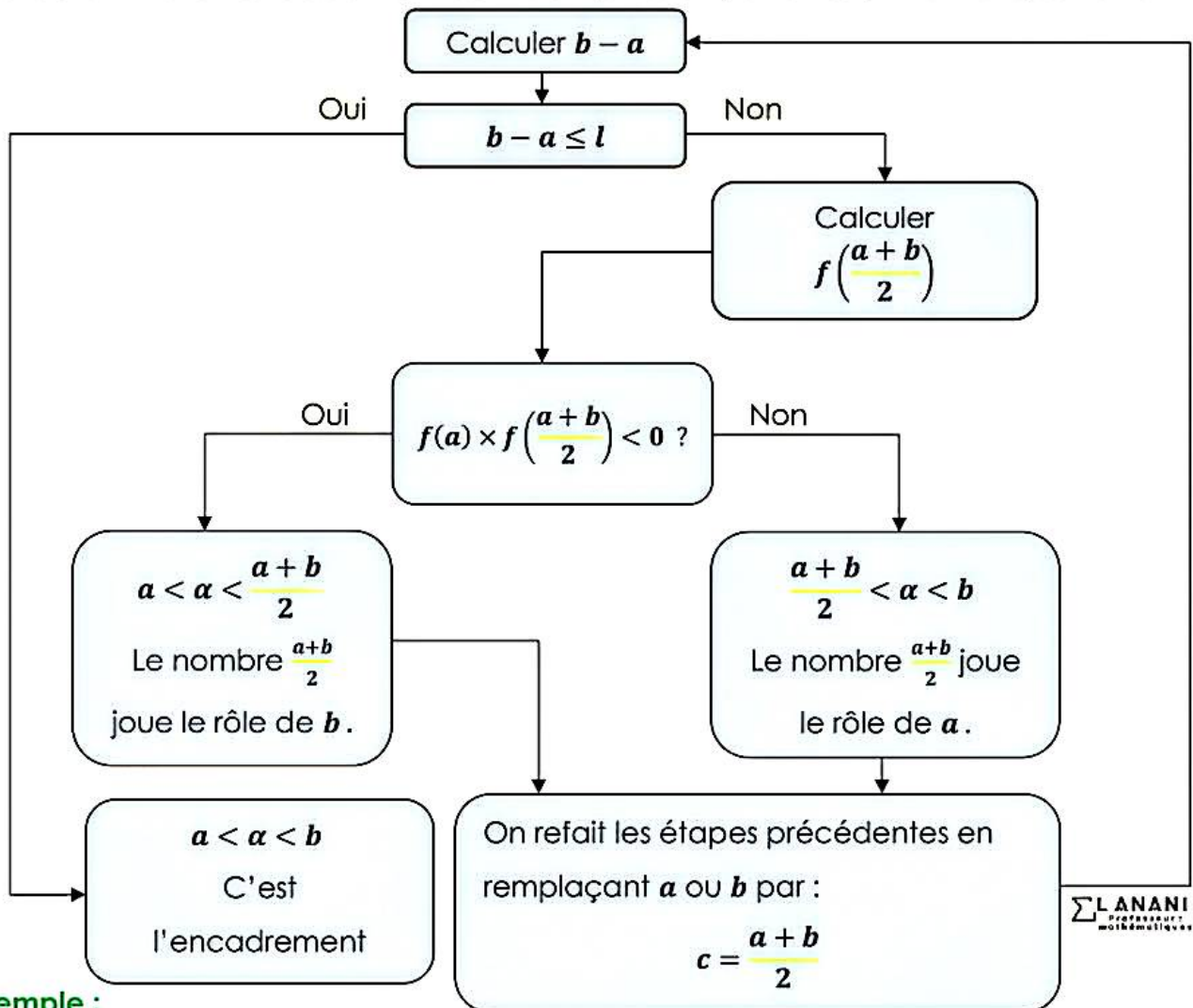
Remarques :

Σ L ANANI
Professeur
mathématiques

- ♦ Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur $[a; b]$ telle que :
 $f(a) \times f(b) < 0$ Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une **solution unique** $\alpha \in]a; b[$
- ♦ Si la fonction f n'est pas **strictement monotone** sur l'intervalle $[a; b]$
Donc on peut conclure à l'existence d'au **moins une solution** ou **plus**.

IV. Méthode de dichotomie : (طريقة التفرع الثنائي)

Pour déterminer un encadrement de α d'amplitude l , on utilise la méthode suivante :



Σ L ANANI
Professeur
mathématiques

Exemple :

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x^3 - 2$

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[1; 2]$
- 2) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,25

V. Fonction Réciproque D'une Fonction Numérique : (الدالة العكسية لدالة عددية)

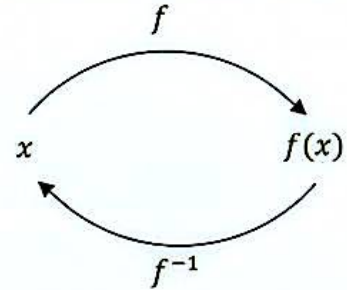
Définition et Propriété :

Toute fonction f , continue et strictement monotone sur I , admet une **fonction réciproque** notée : f^{-1} , définie sur $f(I)$, telle que :

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in f(I) \end{cases}$$

Ou, de manière équivalente :

$$\begin{cases} \forall x \in I : f^{-1} \circ f(x) = x \\ \forall y \in f(I) : f \circ f^{-1}(y) = y \end{cases}$$



Exemple :

On considère la fonction f telle que :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\mapsto \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Sa fonction réciproque c'est la fonction définie sur $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^+ &\mapsto \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Car :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^+ : f^{-1} \circ f(x) = \sqrt{x^2} = x \\ \forall y \in \mathbb{R}^+ : f \circ f^{-1}(y) = \sqrt{y^2} = y \end{cases}$$

Propriété 5 :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I et x un élément de I .

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$$

Méthode pour déterminer la fonction réciproque - طريقة تحديد الدالة العكسية

On considère la fonction f telle que : $f(x) = x + 1$

f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$

Donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

♦ Déterminons $f^{-1}(x)$ en fonction de x

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f^{-1}(x) = b \Leftrightarrow x = f(b) \Leftrightarrow x = b + 1 \Leftrightarrow b = x - 1$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} : f^{-1}(x) = x - 1$

Application 6 :

On considère la fonction f définie sur $I = [1; +\infty[$ telle que : $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$

1) Montrer que f admet une réciproque f^{-1} sur un intervalle J à déterminer.

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ en fonction de x

Continuité D'une Fonction Numérique - اتصال دالة عددية

Propriétés : (خصائص الدالة العكسية)

- ♦ Si f est **continue** sur I , donc f^{-1} est également **continue** sur $f(I)$
- ♦ f et f^{-1} ont la **même monotonie**
- ♦ Les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice du repère)

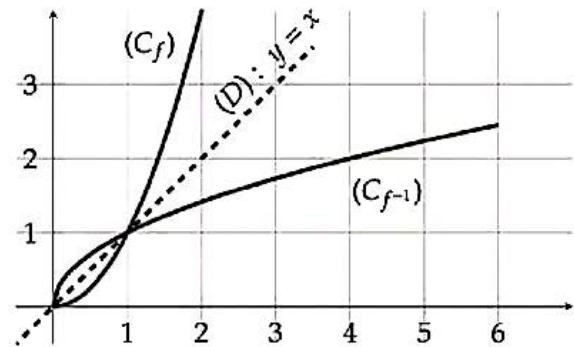
Exemple :

On a :

$$f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2$$

Et :

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt{x}$$



VI. Racines n-ième : (الجزور النونية)

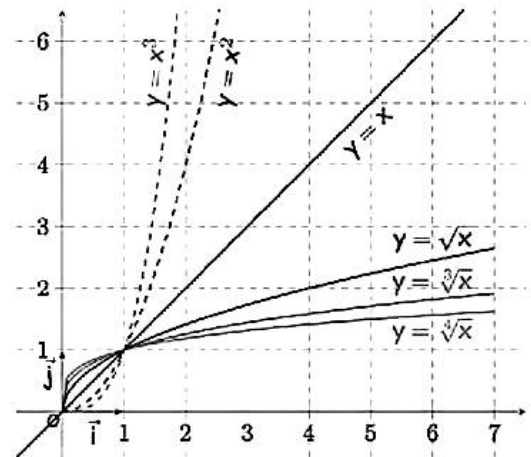
Définition et Propriété :

La fonction $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ telle que : $n \in \mathbb{N}^*$
 $x \mapsto x^n$

Admet une fonction réciproque notée :

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

On écrit également : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$



Conséquences :

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \mathbb{R}^+$

$\sqrt[n]{x} = x$	$\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ "racine carrée de x"
$\sqrt[3]{x}$ "racine cubique de x"	$(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$
$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$	
$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$	$\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \leq y$
$(\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}$	

Exemples :

$(\sqrt[4]{3})^5 = 3^{\frac{5}{4}}$	$(\sqrt[5]{2})^{20} = 2^{\frac{20}{5}} = 2^4 = 16$
-------------------------------------	--

Continuité D'une Fonction Numérique - اتصال دالة عددية

Propriétés :

Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

$\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$	$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} ; y \neq 0$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$
$\sqrt[n]{\frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt[n]{y}} ; y \neq 0$	$\sqrt[nm]{x^m} = \sqrt[n]{x}$	$\sqrt[n]{x} \times \sqrt[m]{x} = \sqrt[nm]{x^{n+m}}$

Application 7 :

1) Simplifier :

Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

$A = \sqrt{\sqrt{3}} + 2\sqrt[4]{81} - \sqrt[4]{243}$	$B = (\sqrt[3]{5})^2 \times \sqrt[6]{5}$
$C = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times (\sqrt[5]{\sqrt{2}})^2}{\sqrt[3]{\sqrt{4}}}$	$D = \frac{\sqrt[3]{27^2} \times \sqrt[4]{81} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$

2) Ranger dans un ordre croissant les nombres suivants :

$\sqrt[12]{101}$	$\sqrt[6]{10}$	$\sqrt[4]{7}$	$\sqrt[3]{3}$
------------------	----------------	---------------	---------------

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$(E) : \sqrt[3]{4-x} = 2$	$(I) : \sqrt[3]{3x-1} < 2$
---------------------------	----------------------------

Propriétés : (continuité de la fonction racine n-ième)

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
Si f est continue sur I (c-à-d : elle est positive) , alors $\sqrt[n]{f}$ est également continue sur I	

Application 8 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 4}$

1) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$

2) Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$



Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

VI. Soutien : (دعم)

Exercice 1 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} ; x \neq 3 \\ f(3) = 6 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en 3

Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

Exercice 2 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - x}{x - 2} ; x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en 2

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} ; x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité à droite de f en 1

Exercice 4 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + \sqrt{x} - 2 ; x \geq 0 \\ f(x) = 1 - 3x ; x < 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en 0

Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

Exercice 5 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 8x + 12} ; x > -2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x + 2} ; -6 < x < -2 \\ f(-2) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en -2

Continuité D'une Fonction Numérique - اتصال دالة عددية

Exercice 6 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2} ; x \neq -2 \text{ et } x \neq 1 \\ f(1) = a ; \text{ avec } a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que la fonction f soit continue en 1

Exercice 7 :

Soit f une fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + bx + 1 ; x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x-1} + 2 ; x \geq 1 \end{cases} \text{ avec } b \in \mathbb{R}$$

Déterminer la valeur de b pour que la fonction f soit continue en 1

Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

Exercice 8 :

Dans chaque cas, étudier la continuité de la fonction f sur l'intervalle I

$f(x) = -3x^4 + 5x^2 - x + 2 ; I = [-1 ; +\infty[$	$f(x) = \frac{5x^2 - x + 1}{x + 3} ;]-\infty ; -4]$
$f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} ; I = \mathbb{R}$	$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} ; I =]0 ; 5]$
$f(x) = \sqrt{x} \sin(x) ; I = [1 ; +\infty[$	

Exercice 9 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} ; x < -1 \\ f(x) = 5x^2 + x - 2 ; x \geq -1 \end{cases}$$

- Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f
- Étudier la continuité de f sur D_f



Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques



Exercice 10 :

Soit f la fonction numérique définie par :

Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

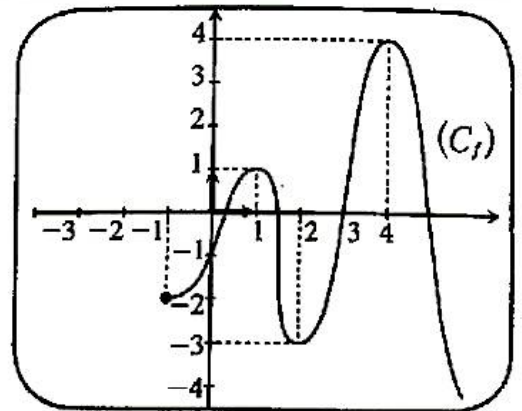
$$\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x-1} + x + 3 ; x > 1 \\ f(x) = -\frac{x^2 + x + 2}{x-2} ; x < 1 \\ f(1) = 4 \end{cases}$$

- 1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f
- 2) Étudier la continuité de f sur D_f

Exercice 11 : lecture graphique

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction numérique f

- 1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f
b) La fonction f est-elle continue sur D_f ?
- 2) Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par la fonction f

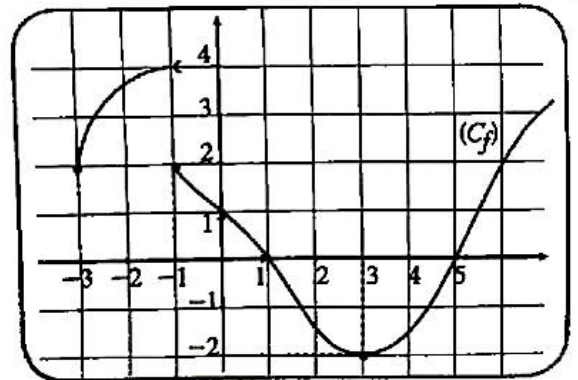


$[-1; 1]$	$[-1; 3[$	$]0; 4]$	$] -1; 4[$	$[-1; +\infty[$
-----------	-----------	----------	------------	-----------------

Exercice 12 : lecture graphique

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction numérique f

- 1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f
b) La fonction f est-elle continue sur D_f ?
- 2) Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par la fonction f



$[-3; -1[$	$] -3; -1]$	$[-1; 5]$	$[-3; 3]$	$] -3; +\infty[$
------------	-------------	-----------	-----------	------------------

Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

Continuité D'une Fonction Numérique - اتصال دالة عددية

Exercice 13 : lecture d'un tableau de variations

On donne ci-contre le **tableau de variations** d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
f	5		0	
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		-4		-2

Déterminer l'**image** de chacun des intervalles suivants par la fonction f

$[-2; 3]$	$[3; +\infty[$	$]-\infty; -2[$	$]-\infty; 3]$	$\mathbb{R}$
-----------	----------------	-----------------	----------------	--------------

Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

Exercice 14 : lecture d'un tableau de variations

Soit f une fonction continue sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$, dont le **tableau de variations** est le suivant :

x	$-\infty$	-4	0	1	2	3	5	$+\infty$
f			2		$+\infty$			$+\infty$
		$\nearrow$	$\searrow$		$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	
	-3	-2			-1	-2	0	
			$-\infty$					

1) Déterminer l'**image** de chacun des intervalles suivants par la fonction f

$]-\infty; 0]$	$[0; 1[$	$]1; 3]$	$]-\infty; 1[$	$]1; +\infty[$
----------------	----------	----------	----------------	----------------

2) Dans chaque cas, **encadrer** $f(x)$

$-4 \leq x \leq 0$	$x \in [2; 3]$	$2 < x \leq 5$
--------------------	----------------	----------------

Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

Continuité D'une Fonction Numérique - اتصال دالة عددية

Exercice 15 : détermination algébrique de l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Dans chaque cas, déterminer l'image de l'intervalle I_k par la fonction f

1)

Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$I_1 = [1 ; +\infty[$$

$$I_2 =]-\infty ; 1]$$

2)

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$$

$$I_1 = [0 ; 3]$$

$$I_2 =]-1 ; +\infty[$$

$$I_3 =]-\infty ; -2]$$

3)

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$I_1 =]-\infty ; -2]$$

$$I_2 =]-2 ; 1]$$

$$I_3 =]1 ; +\infty[$$

$$I_4 = [-2 ; +\infty[$$

$$I_5 =]-\infty ; 1[$$

$$I_6 = \mathbb{R}$$

4)

$$f(x) = x\sqrt{x+1}$$

$$I_1 = [0 ; +\infty[$$

$$I_2 = \left[-1 ; -\frac{2}{3}\right]$$

Exercice 16 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x + 1$

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet **au moins** une solution sur $[0 ; 1]$
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = -7$ admet **au moins** une solution sur $[-1 ; 0]$
- 3) Montrer que la courbe de f coupe l'axe des abscisses **au moins** en un point dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[-1 ; 0]$

Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

Exercice 17 :

- 1) Montrer que $(E_1) : 2x\sqrt{x+3} - x^2 - 3x + 5 = 0$ admet **au moins** une solution sur $[3 ; 4]$
- 2) Montrer que $(E_2) : 3|x+1| + \sqrt{x+2} - x^3 = 4$ admet **au moins** une solution sur $[1 ; 2]$
- 3) Montrer que $(E_3) : \sqrt{x^2+1} - 2x^3 = x$ admet **au moins** une solution sur $[0 ; 1]$

Exercice 18 :

- 1) Montrer que l'équation $x^5 + 4x^3 + 5x - 7 = 0$ admet **une unique** solution α dans $\mathbb{R}$
- 2) Vérifier que : $0,840 < \alpha < 0,841$



Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques



Exercice 19 :

On pose :

$$(E) : -2x\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 5x = -10$$

- 1) Montrer que l'équation (E) admet une solution **unique** α sur $]0 ; +\infty[$
- 2) Vérifier que : $1,4 < \alpha < 1,5$
- 3) Résoudre dans $]0 ; +\infty[$ l'inéquation suivante :

$$(I) : 2x\sqrt{x} - \frac{1}{x} + 5x - 10 < 0$$

Exercice 20 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x + 1$

Σ L ANANI
Professeur :
Mathématiques

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution **unique** α dans $\mathbb{R}$
- 2) a) Montrer que : $\alpha \in]-2 ; 2[$ b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 2

Exercice 21 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution **unique** α sur $] -1 ; 1[$
- 2) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 25×10^{-2}

Exercice 22 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Dans chacun des cas suivants :

- a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J que l'on déterminera.
- b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

1)

$f(x) = 3 - \frac{1}{x}$	$I =]0 ; +\infty[$
--------------------------	---------------------

2)

$f(x) = \sqrt{x+1}$	$I = [-1 ; +\infty[$
---------------------	----------------------

3)

$f(x) = \frac{3x+7}{x+2}$	$I =]-2 ; +\infty[$
---------------------------	----------------------

4)

$f(x) = -2(x-1)^2 + 5$	$I = [1 ; +\infty[$
------------------------	---------------------

Σ L ANANI
Professeur :
Mathématiques

Continuité D'une Fonction Numérique - اتصال دالة عددية

Exercice 23 :

Soit f **une fonction** définie sur un intervalle I . Dans chacun des cas suivants :

a) Montrer que f admet **une fonction réciproque** f^{-1} définie sur J que l'on déterminera .

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

- 1)

$f(x) = -3x^2 + 3x + 1$	$I =]-\infty ; 0[$
-------------------------	---------------------
- 2)

$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$	$I =]-\infty ; -1]$
-----------------------------	----------------------
- 3)

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$	$I = [2 ; +\infty[$
-------------------------------	---------------------
- 4)

$f(x) = x + \sqrt{-x} - 1$	$I = \left[-\frac{1}{4} ; 0\right]$
----------------------------	-------------------------------------

Exercice 24 :

Soit f **une fonction** définie sur un intervalle I . Dans chacun des cas suivants :

a) Montrer que f admet **une fonction réciproque** f^{-1} définie sur J que l'on déterminera .

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J :

- 1)

$f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$	$I =]-1 ; +\infty[$
------------------------------	----------------------
- 2)

$f(x) = x - 2 + 2\sqrt{x+1}$	$I = [-1 ; +\infty[$
------------------------------	----------------------
- 3)

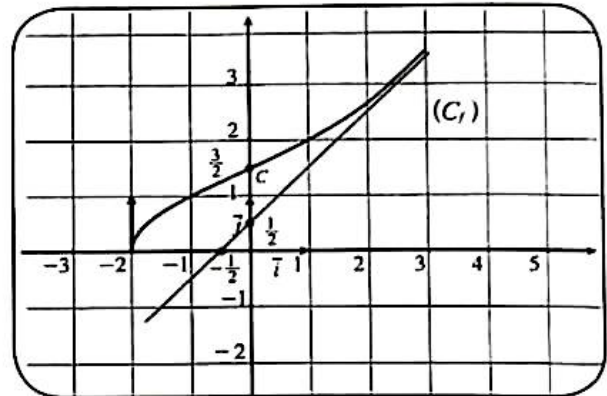
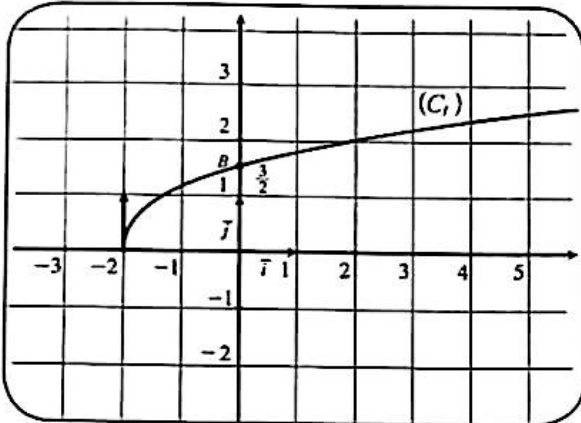
$f(x) = \sqrt{x-2} + x + 1$	$I = [2 ; +\infty[$
-----------------------------	---------------------
- 4)

$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 3}$	$I =]-\infty ; 0]$
----------------------------------	---------------------

Exercice 25 : Construction de la fonction réciproque

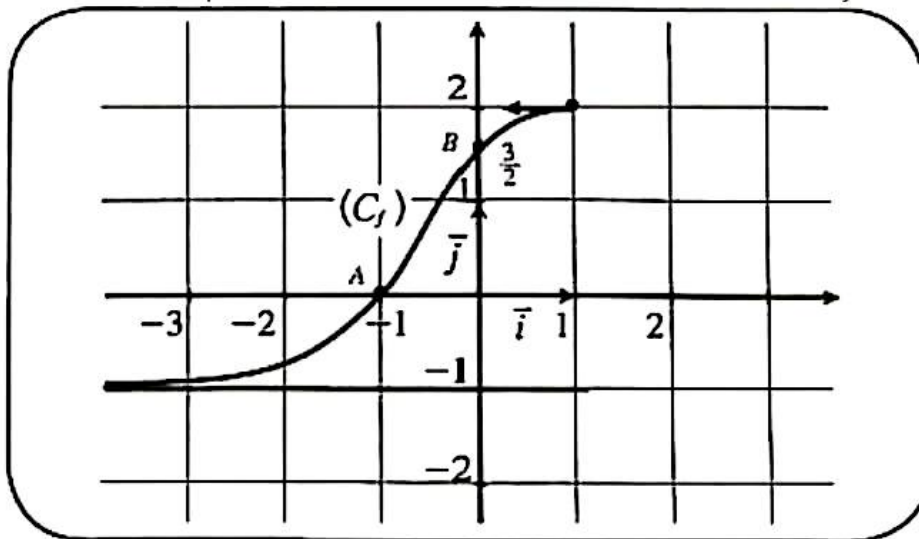
Dans chaque cas, **construire** dans le même repère orthonormé la courbe représentative de la fonction réciproque de la fonction f

Σ L ANANI
PROFESSEUR
MATHÉMATIQUES



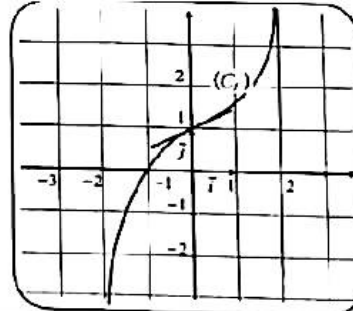
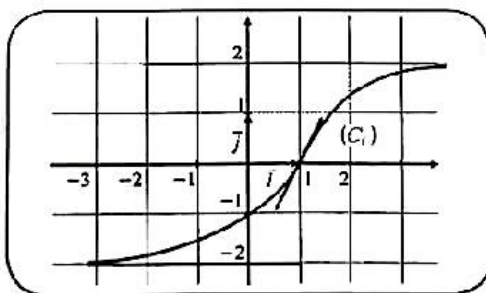
Exercice 26 : Construction de la fonction réciproque

Construire dans le même repère orthonormé la courbe de la fonction f^{-1}



Exercice 27 : Construction de la fonction réciproque

Dans chaque cas, **construire** dans le même repère orthonormé la courbe de f^{-1}



Continuité D'une Fonction Numérique - اتصال دالة عددية

Exercice 28 :

1) Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :

$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt[5]{2}$
---------------	------------	---------------

2) Ranger dans l'ordre décroissant les nombres suivants :

$\sqrt[4]{3}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt{5}$
---------------	---------------	------------

3) Simplifier les nombres suivants :

$A = \frac{\sqrt[10]{2^5} \times \sqrt[12]{8^8}}{\sqrt[4]{4^3} \times \sqrt[4]{16} \times \sqrt[6]{2^{15}}}$	$B = \sqrt{2} \left(\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}} \right)$
--	---

4) Sachant que a et b sont strictement positives, montrer que :

$$(a + b)^{\frac{5}{2}} = (a^5 + ba^4)^{\frac{1}{2}} + 2(a^3b^2 + a^2b^3)^{\frac{1}{2}} + (ab^4 + b^5)^{\frac{1}{2}}$$

Exercice 29 :

1) Déterminer les nombres a et b tels que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^3 - 3x - 18 = (x - 3)(x^2 + ax + b)$$

Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

2) Soit t le réel défini par : $t = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$

a) Montrer que t est une solution de l'équation $x^3 - 3x - 18 = 0$ dans $\mathbb{R}$

b) En déduire que : $t = 3$

Exercice 30 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$(E_1) : \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12$	$(E_2) : \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$
$(I) : \sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$	

Exercice 31 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt[3]{3x+2} - 2}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{2x-1}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3x - \sqrt[3]{1-x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{4x+4} - 2}$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2} - x$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2} - 2x$	

Σ L ANANI
Professeur :
mathématiques

Continuité D'une Fonction Numérique - اتصال دالة عددية

Exercice 32 :

Calculer les limites suivantes :

Σ L ANANI
Professeur :
Mathématiques

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 3x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{4 - 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} - 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-3x^2 + x + 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

Exercice 33 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 3x}{2 + \sqrt[3]{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x + 4} - 2}{x - 2}$$

Exercice 34 :

Calculer les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[3]{x}}$$

Exercice 35 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

a) Dans chaque cas, montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}

b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

1)

Σ L ANANI
Professeur :
Mathématiques

$$f(x) = x^3 + 1$$

$$I = \mathbb{R}$$

2)

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

$$I = \mathbb{R}$$



Fin

