



Série 1 : Continuité d'une fonction

Prof: B. Abderrahim

Niveau : 2 bac pc & Svt

Exercice 1 :

Etudier la continuité de la fonction f au point a dans les cas suivants :

$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} ; x \neq -2 \\ f(-2) = -4 \end{cases}$	$a = -2$
$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} ; x \neq 3 \\ f(3) = 4 \end{cases}$	$a = 3$
$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} ; x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \\ f(1) = 1 \end{cases}$	$a = 1$
$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 2x - 4}{x - 2} ; x \neq 2 \\ f(2) = 10 \end{cases}$	$a = 2$
$\begin{cases} f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$	$a = 0$

Exercice 2 :

1. Étudier la continuité de la fonction f à droite et à gauche en a , et déduire si elle est continue en a ?

$\begin{cases} f(x) = 3x - 4 ; x \geq 2 \\ f(x) = 4 - x ; x < 2 \end{cases}$	$a = 2$
$\begin{cases} f(x) = \frac{4x - 1}{x} ; x \geq 1 \\ f(x) = x^2 + 2x ; x < 1 \end{cases}$	$a = 1$

2. Qui elle est la (les) valeur(s) du réel a pour que la fonction f soit continue au point $x_0 = -1$:

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{x + 3}{ax - 1} ; x < -1 \\ f(x) = ax^2 + 2x ; x \geq -1 \end{cases}$$

3. Déterminer les réels a et b , sachant que la fonction f est continue au point $x_0 = 2$:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{ax^2 + x - 1}{x - 2} ; x \neq 2 \\ f(2) = b \end{cases}$$

Exercice 3 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{8x+2}{x+1} ; x \geq 2 \\ f(x) = x^2 + x ; x < 2 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{2x + 2} ; x \geq 1 \\ f(x) = x + \cos x ; x < 1 \end{cases}$$

;

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

1. Étudier la continuité de f sur I , puis déterminer $f(I)$

- $f(x) = x^2 - 2x$, $I = [0; 1]$.
- $f(x) = \frac{2x-5}{x+3}$, $I =]-\infty; -3[$.

2- on considère le tableau de variation de la fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	2	5	7	$+\infty$				
g	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

déterminer

$g([2; 5])$; $g([5; 7])$; $g([2; 7])$; $g([7; +\infty[)$
; $g(]-\infty; 2])$; et $g(\mathbb{R})$;

Exercice 5 :

Étudier la continuité de f sur I dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, $I =]-\infty; -3]$

2. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$, $I =]2; +\infty[$

Exercice 6 : théorème des valeurs intermédiaires

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans I dans chaque cas :

1. $f(x) = x^3 + x - 7$; $I = [0; 2]$.

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2x$; $I =]0; 1[$.

3. $f(x) = x^5 - 3x - 4$; $I =]-1; 2[$.

4. $f(x) = x^3 + x - \cos x$; $I = [0; \frac{\pi}{2}]$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^5 + x^3 - 3$$

Montrer que la courbe (C_g) coupe l'axe des abscisses au moins en un point dans l'intervalle $[0; 2]$. ce point est-il unique justifier.

3. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$$

a. Étudier les variations de u sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet exactement 3 solutions dans $\mathbb{R}$.

4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x^3 + x - 3$$

a. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; 2]$.

b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0.25

c. Vérifier que $\alpha = 3 - \alpha^3$.

Exercice 7 :

1) Soit f la fonction définie et continue sur $[a, b]$ tel que $f(a) < ab$ et $f(b) > b^2$.

Montrer que $\exists c \in [a, b] : f(c) = bc$.

2) Soit g la fonction définie et continue sur $[0, 1]$ tel que

$$g(0) = 0 \text{ et } g(1) = 1.$$

Montrer que $\exists c \in]0, 1[: g(c) = \frac{1-c}{1+c}$.

Exercice 8 :

1. Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty, -2]$ par :

$$f(x) = x^2 + 4x$$

a. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer vers I .

b. Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

2. Soit g la fonction définie sur $I' =]2, +\infty]$ par :

$$g(x) = \frac{x-4}{x-2}$$

a. Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J' à déterminer vers I' .

b. Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J' .

3. Soit h la fonction définie sur $I' =]2, +\infty]$ par :

$$g(x) = \frac{x-4}{x-2}$$

a. Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J' à déterminer vers I' .

b. Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J' .

Exercice 9 :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 1}$$

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f .

2) Vérifier que $f'(x) = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$ pour tout $x \in D_f \setminus \{-1; 1\}$

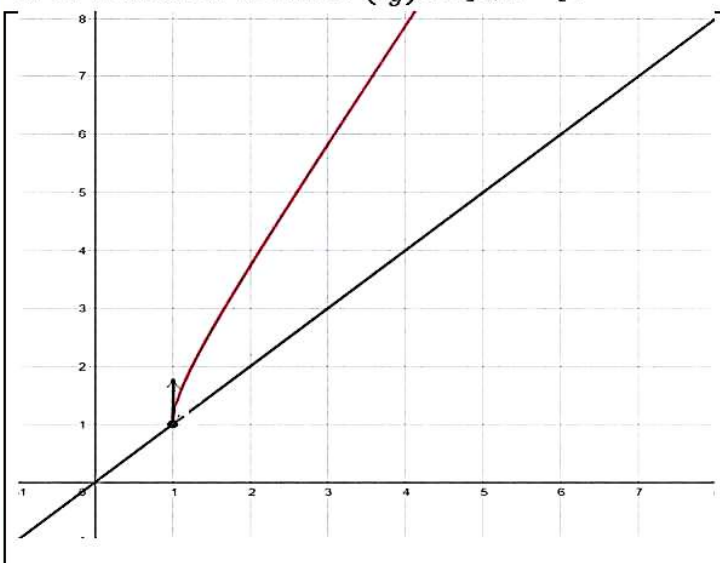
3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1, +\infty[$

a. Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle J à déterminer.

b. Déterminer la monotonie de g^{-1} sur J .

c. Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J . (développer : $(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2$).

d. Ci-dessous est la courbe (c_g) sur $]1, +\infty[$.



Tracer dans le même repère la courbe de $(c_{g^{-1}})$

Exercice 10 :

1) Comparer les nombres $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt[5]{3}$.

2) Simplifier les deux nombres suivants :

$$A = \frac{27^{\frac{2}{3}} \times 49^{-\frac{1}{2}} \times 16^{\frac{3}{4}}}{(9\sqrt{3})^{\frac{2}{5}}}; B = \frac{\sqrt[3]{4\sqrt{8}(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{4}}}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $\sqrt[4]{3x-2} = 2$.

$$\sqrt[3]{x} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}} - 1 = 0; \sqrt[3]{x+7} = \sqrt[3]{x} + 1$$

4) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[6]{x^4 - 3x + 1}; \lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 27}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - x$$

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{1-x} & ; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} & ; x > 1 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 1.

2) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1, +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle J que l'on déterminera.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J .

Exercice 12 :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2\sqrt{x}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.

2. Montrer que $\forall x > 0, f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.

3. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

4. Soit g la restriction de f sur $I = [1; +\infty[$.

a. Montrer que g admette une fonction réciproque g^{-1} sur un intervalle J à déterminer vers I .

b. Montrer que : $\forall x \geq 1, g(x) = (\sqrt{x} - 1)^2 - 1$.

c. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J .

5. Résoudre dans I l'équation : $g(x) = 8$. (sans utiliser l'expression de $g(x)$.)