

Exercice 1

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Calculer les limites suivantes :

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^3+x+5}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 2x^2 + x - 8$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{x^2+4x-5}$$

$$④ \lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^4 - 2x^2 + x - 1$$

$$⑤ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$

$$⑥ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}}{x-2}$$

$$⑦ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+7}-x$$

$$⑧ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+2x-2}{x^2+1}$$

$$⑨ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2+x+1}-x$$

$$⑩ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2\sqrt{x}}{x-3}$$

$$⑪ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin x}$$

$$⑫ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x - \sqrt{2}}{2x - \frac{\pi}{2}}$$

$$⑬ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$⑭ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{x-2}$$

$$⑮ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{x-2}$$

$$⑯ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x-2x^2}{x-x^3}$$

$$⑰ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5x^2+x-1}+2x$$

$$⑱ \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x^2-4}$$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 2

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(4) = 3 \\ f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{x-4} \quad ; \quad x \neq 4 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f au point $a = 4$

Exercice 3

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt[3]{4x-2}}{x-2} & ; \quad x > 2 \\ f(2) = \frac{1}{3} \\ f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x - 6} & ; \quad x < 2 \end{cases}$$

- ① Montrer que f est continue à gauche au point $a = 2$
- ② f est-elle continue au point $a = 2$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Exercice 4

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} & ; \quad x \leq 2 \\ f(x) = \frac{ax + 3}{x - 1} & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que la fonction f soit continue en 2

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Exercice 5

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x + b}{x^2 + 1} & ; \quad x < 1 \\ f(1) = a \\ f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x - 1} & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

- ① Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$
- ② Déterminer les deux réels a et b pour que la fonction f soit continue en 1

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Exercice 6

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Étudier la continuité de f sur D dans chacun des cas suivants :

- ① $f(x) = \frac{x^2 - 2 \sin x}{x^2 + 4} \quad ; \quad D = \mathbb{R}$
- ② $f(x) = \sin(2 + \sqrt{x}) \quad ; \quad D = \mathbb{R}^+$
- ③ $f(x) = (x^2 - 1) \sin\left(\frac{3}{x}\right) \quad ; \quad D =]-\infty; -1[$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Exercice 7

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Calculer les limites suivantes :

- ① $\lim_{x \rightarrow 0} \tan\left(\frac{\sin(\pi x)}{4x}\right)$
- ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x + 3}{3x^2 + 4}\right)$

③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(\sqrt{x^2 + \pi x} + x)$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 8

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{3}$

- ① Calculer $f(-1)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$ et $f(1)$ puis en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions
- ② Montrer que l'équation $x^3 + \sqrt{x} - 1 = 0$ admet une unique solution α telle que $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 9

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$

- ① Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f
- ② Soit g la fonction définie sur $] -2; -1[$ par $g(x) = f(x)$
 - a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle I à déterminer
 - b Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 10

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x}{2\sqrt{x} - 1}$

- ① Déterminer D_f puis calcules les limites de f aux bornes de D_f

- ② Montrer que $f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{(2\sqrt{x} - 1)^2}$ puis dresser le tableau de variations de f
- ③ Soit g la restriction de f sur $I = [1; +\infty[$
- a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
 - b Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 11

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$$

- ① Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- ② Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$
- ③ Calculer $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ puis déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.25
- ④ Montrer que $\sqrt{\alpha + 1} = \frac{-2\alpha}{\alpha + 1}$ puis en déduire que $\alpha < \frac{-1}{4\sqrt{2}}$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 12

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

- ① Déterminer D_f puis calcules les limites de f aux bornes

de D_f

- ② a Montrer que : $(\forall x \in D_f), f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$
- b Dresser le tableau de variations de f (Justifier votre réponse)
- ③ Déterminer $f(]-\infty; -2[)$, $f([-2; -1[)$, $f(]-1; 0])$ et $f([0; +\infty)$
- ④ Soit g la restriction de f sur $I =]-\infty; -2]$
- a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
- b Montrer que : $(\forall x \in J), g^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 13

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

f est définie sur $I =]-\infty; 3]$ par : $f(x) = x^2 - 6x + 8$

- ① Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis montrer que f est strictement décroissante sur I
- ② Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = [-1; +\infty[$
- ③ Montrer que : $(\forall x \in J), f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+1}$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 14

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - 2\sqrt{x+1}$$

- ① Montrer que : $D_f = [-1; 0[\cup]0; +\infty[$

- ② Déterminer les limites de f aux bornes de D_f
- ③ Montrer que f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$
- ④ a Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left] \frac{1}{4}; 1 \right[$
- b Vérifier que $4\alpha^3 + 4\alpha^2 - 1 = 0$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 15

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

f est définie sur $I =]-\infty; -1]$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

- ① Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, puis montrer que f est continue sur l'intervalle I .
- ② Montrer que : $(\forall x \in I), f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ en déduire que f est strictement décroissante sur I .
- ③ a Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = [-1; 0[$
- b Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 16

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

f est définie sur $I = [4; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2}{4} + x\sqrt{x} - x + 1$$

- 1 a Vérifier que pour tout $x \in I : f(x) = 1 - \frac{1}{4}(x - 2\sqrt{x})^2$
- b Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- 2 a Montrer que pour tout $x \in I$,
 $f'(x) = -\frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$ en déduire que f est strictement décroissante sur I .
- b Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans I puis vérifier que $\frac{64}{9} < \alpha < \frac{121}{16}$
- 3 a Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J =]-\infty; 1]$
- b Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$
- c En déduire que : $\alpha = 4 + 2\sqrt{3}$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Exercice 17

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Soient a , b et c trois nombres réels strictement positifs tels que $a + b \leq c$. Montrer que :

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} \Rightarrow (a + b - c)^3 + 27abc = 0$$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Exercice 18

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x - 3$$

- 1 Dresser le tableau de variations de f
- 2 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0 < \alpha < 1$

③ On pose $b = \frac{\sqrt[3]{12 + 4\sqrt{5}}}{2}$. Montrer que $\alpha = b + \frac{1}{b}$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr_ezzamane_mustapha

Exercice 19

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr_ezzamane_mustapha

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

- ① Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a dans $[\sqrt[3]{2}; +\infty[$
- ② Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution b dans $]a; +\infty[$
- ③ Montrer que : $\forall c \in]0; a[, \sqrt[3]{c+2} \cdot f(c) = 2c - a$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr_ezzamane_mustapha

Exercice 20

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr_ezzamane_mustapha

Soit f la fonction numérique définie sur $I =]-1; 0[$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

- ① Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ puis montrer que f est continue sur I
- ② Montrer que pour tout $x \in]-1; 0[, f'(x) = -\frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}$, en déduire que f est strictement décroissante sur I
- ③ Montrer que l'équation $f(x) = x^3$ admet une unique solution α dans I et que $-\frac{3}{4} < \alpha < -\frac{1}{2}$
- ④ a Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

c Résoudre dans $\mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = f(x)$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 21

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

① Calculer les nombres suivants :

a $a = \sqrt[3]{27}$

b $b = \sqrt[4]{16}$

c $c = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2}$

d $d = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{64}}}{\sqrt[5]{32}}$

② Calculer :

a $A = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}}} \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[12]{2}}$

b $B = \frac{a^{-\frac{4}{3}} \times \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt[6]{a^{-2}} \times \sqrt[3]{a^{-1}}}$

③ Comparer les nombres a et b tels que :

$$a = \sqrt[4]{3} \quad \text{et} \quad b = \sqrt[5]{4}$$

④ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a $x^3 + 27 = 0$

b $\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = 0$

c $\sqrt[3]{2x-1} = \sqrt{x}$

d $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{4}$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 22

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

① Comparer les nombres suivants : $\left(\sqrt[4]{8}\right)^2$ et $\sqrt{\sqrt{81}}$ et $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$

② Montrer que : $\sqrt[4]{5} \times \sqrt{\sqrt[6]{5}} = \sqrt[3]{5}$ et $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt{2}$

et que : $\frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt{\sqrt{b^{-5}}}} \times \sqrt[12]{\frac{a^{-5}}{b^3}} = ab$

③ On pose : $X = \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$ et $Y = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$

Rendre le dénominateur de X et Y un nombre entier

④ Simplifier : $A = (27)^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{\sqrt[3]{8^{-1}}} + \frac{\sqrt[5]{2}}{4^{-\frac{5}{2}}}$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 23

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Calculer les limites suivantes :

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$

③ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x - 1}$

④ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{x - 1}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x+3}}{x - 1}$

⑥ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}}$

⑦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x} + 4}$

⑧ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x + 1}}{x}$

⑨ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[12]{x}}$

⑩ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{x} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[12]{x+2}}$

⑪ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{-x^3 + x + 1}}{x}$

⑫ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x + 1}}{x}$

⑬ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - x$

⑭ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - 2x$

⑮ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt{x^2 + 2}$

⑯ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^6 + 1} - \sqrt{4x^4 + 2}$

⑰ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt{x + 2}$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 24

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr_ezzamane_mustapha

Soit f la fonction définie sur $[-4; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

- ① Montrer que f est continue en 0
- ② Montrer que f est continue sur $[-4; +\infty[$
- ③ Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- ④ Vérifier que pour tout $x \in [-4; +\infty[$,
 $-x - 8 + 4\sqrt{x+4} = -(\sqrt{x+4} - 2)^2$
- ⑤ a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-4; +\infty[$
b) Dresser le tableau de variations de f
- ⑥ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
- ⑦ Dresser le tableau de variations de f^{-1} (justifier votre réponse)
- ⑧ Calculer $f(5)$ puis déterminer $(f^{-1})' \left(\frac{1}{5} \right)$
- ⑨ Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr_ezzamane_mustapha

Exercice 25

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr_ezzamane_mustapha

- ① Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\sqrt[4]{x-1} + \frac{12}{\sqrt[4]{x-1}} + 7 = 0$

b $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(2+x)^2} = 2\sqrt[3]{4-x^2}$

② Calculer les limites suivantes :

a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - \sqrt{4-\sin x}}{x}$

b $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x}$

③ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 2x - a}{x - 2} , & x < 2 \\ f(x) = \frac{2x^2 + b - a}{x} , & x \geq 2 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue en 2

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 26

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x - 1} , & x > 1 \\ f(x) = \frac{3x + b}{2} , & x \leq 1 \end{cases}$$

Déterminer les deux réels a et b pour que la fonction f soit continue en $x_0 = 1$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 27

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - 2bx + 1}{2x^2 + ax - a - 2}, & x < 1 \\ f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 1}, & x > 1 \\ f(1) = \frac{2 + c}{3} \end{cases}$$

Déterminer les réels a , b et c pour que la fonction f soit continue en $x_0 = 1$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 28

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 3}, & x > 3 \\ f(x) = \frac{cx^2 - 4}{x - 2}, & x < 3 \\ f(3) = 2 \end{cases}$$

Déterminer les réels a , b et c pour que la fonction f soit continue en $x_0 = 3$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 29

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2} \left(x + \sqrt{x^2 + 5} \right)$$

- ① Déterminer D_f puis calculer les limites aux bornes de D_f
- ② Etudier la continuité de f sur D_f
- ③ a Montrer que l'équation $(x - 2)(x + 1)f(x) = 2x - 1$ admet au moins une solution α dans $] -1; 2[$

b En déduire que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 2} + \frac{1}{\alpha + 1}$

4 a Démontrer que : $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 5})^2}{2\sqrt{x^2 + 5}}$

b Dresser le tableau de variations de f sur D_f

c En déduire que $f(x)$ et x ont le même signe sur D_f

5 Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution β dans D_f

6 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

7 Déterminer $f^{-1}([0; 5])$

8 Exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x , pour tout $x \in J$

9 Déterminer la valeur de β

10 Dresser le tableau de variations de f^{-1}

11 Simplifier : $\frac{1}{2}f^{-1}(x) \left(f^{-1}(x) + \sqrt{(f^{-1}(x))^2 + 5} \right) \quad \forall x \in J$

12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f^{-1}(x) = f(x)$

13 Soient a et b deux réels tel que $0 < a < b$ montrer que :

$$\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{a^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{b^2}}} < \frac{b^2}{a^2}$$

14 On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}x(x + \sqrt{x^2 + 5}) & ; x > \alpha \\ g(x) = \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 1} & ; x \leq \alpha \end{cases}$$

Montrer que g est continue en α

Exercice 30

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

- ① Montrer que l'équation $x^2 + x - 1$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$
- ② Montrer que l'équation $2 \sin(x) = x$ admet au moins une solution dans $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
- ③ Montrer que l'équation $x^2 - 5\sqrt{x} + 1 = 0$ admet au moins une solution α telle que $1 < \alpha < 4$
- ④ f est définie par : $f(x) = x^4 + x - 1$
Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses dans l'intervalle $[-1; 1]$
- ⑤ Soit f la fonction continue sur $[1; 2]$ telle que $f(1) < 1$ et $f(2) > 2$
Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[1; 2]$
- ⑥ Soit f la fonction continue sur $[a; b]$ telle que $f(a) > ab$ et $f(b) < b^2$
Montrer que l'équation $f(x) = bx$ admet au moins une solution dans $[a; b]$
- ⑦ Soit f la fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = -4$ et $f(b) < b^2$
Montrer que l'équation $(x - 1)f(x) = 2x$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$
- ⑧ Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une unique solution α dans $]1; 2[$ puis déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.25
- ⑨ Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$ puis déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.25

- ⑩ Montrer que l'équation $\sqrt{x} = \frac{1}{x-1}$ admet une unique solution α dans $]1; 2[$ puis vérifier que $\alpha^2(\alpha - 2) = 1 - \alpha$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 31

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Soit f la fonction numérique définie sur $]a; b[$ ($(a; b) \in \mathbb{R}^2$) par :

$$f(x) = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}$$

Montrer que f réalise une bijection de $]a; b[$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 32

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Soit f la fonction numérique définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

- ① Montrer que f réalise une bijection de $] -1; +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer
- ② Soit f^{-1} la fonction réciproque de f . Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$
- ③ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f^{-1}(x) = f(x)$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 33

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

- ① Montrer que f réalise une bijection de $] - 1; 1[$ sur $\mathbb{R}$
- ② Déterminer la bijection réciproque f^{-1}

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 34

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $f(a) = f(b)$
 Montrer que l'équation $f(x) = f\left(x + \frac{b-a}{2}\right)$ admet au moins une solution dans $[a; b]$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 35

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$. Montrer que :

$$(\exists c \in]0; 1[) , f(c) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}$$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 36

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ et définie de $[0; 1]$ vers $[0; 1]$.

Montrer qu'il existe un réel x_0 de $[0; 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Exercice 37

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof.badr.ezzamane.mustapha

Soit f la fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ et soit $x_1, x_2, \dots, x_n$, des réels de l'intervalle $[a; b]$ tel que :

$$f([a; b]) = [m; M]$$

On pose : $\sum_{i=1}^n f(x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$

① Montrer que : $m \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq M$

② Montrer que : $\exists c \in [a; b], f(c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Exercice 38

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Soit f la fonction définie de $[a; b]$ vers $[a; b]$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [a; b]^2; x \neq y; |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

① Montrer que f est continue sur $[a; b]$

② Montrer que : $\exists! \alpha \in [a; b] / f(\alpha) = \alpha$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Exercice 39

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Soient p et q deux nombres de $\mathbb{R}_+^*$ et soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ tel que $f(0) \neq f(1)$

On considère la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$g(x) = f(x) - \frac{pf(0) + qf(1)}{p + q}$$

① Montrer que g est continue sur $[0; 1]$

② Déterminer le signe du produit $g(0) \times g(1)$

③ Montrer que : $\exists c \in [0; 1], f(c) = \frac{pf(0) + qf(1)}{p + q}$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Exercice 40

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha

Soit f une fonction définie et continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = f(1)$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et la fonction $f_n(x)$ définie sur $\left[0; \frac{n-1}{n}\right]$ par :

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$$

① Calculer la somme suivante :

$$f_n(0) + f_n\left(\frac{1}{n}\right) + f_n\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f_n\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

② Montrer qu'il existe un réel $c \in]0; 1[$ tel que :

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{n}\right)$$

Page Facebook: Prof Badr-Ezaamane Mustapha Instagram: prof_badr_ezzamane_mustapha