



Exercice 1

Calculer les limites suivantes:

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4x^2 + 8} - 3}{2x - 1}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + x^2 - x + 4)$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3} \right)$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6} \right)$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right)$$

Exercice 2

Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}; \text{ si } x \neq 3 \\ f(3) = 7 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 3$

Exercice 3

Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\tan(x)}; \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

Exercice 4

Considérons la fonction f définie Par:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 2x}; \text{ si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 2 \\ f(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$

Exercice 5

Étudier la continuité de la fonction f en x_0

1

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} ; & x \neq 1 \\ f(1) = -3 ; & x_0 = 1 \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 7x + 12} ; & x \neq 3 \\ f(3) = -4 ; & x_0 = 3 \end{cases}$$

3

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{2x} ; & x \neq 0 \\ f(0) = 1 ; & x_0 = 3 \end{cases}$$

4

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 8x + 12} ; & x > -2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x+2} ; & -6 \leq x < -2 \\ f(-2) = \frac{1}{4}, & x_0 = -2 \end{cases}$$

5

$$\begin{cases} f(x) = \frac{|x^2 - 3x + 2|}{x^2 - 4} ; & x \neq 2 \\ f(2) = \frac{1}{4}, & x_0 = 2 \end{cases}$$

6

$$\begin{cases} f(x) = \left(1 + \frac{1}{x-2}\right) |x-2| \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = 1, & x_0 = 2 \end{cases}$$

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur du réel a pour que la fonction f soit continue en x_0 :

1

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 3x + 2} \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = a \text{ et } x_0 = 1 \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1} \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = a \text{ et } x_0 = 1 \end{cases}$$

3

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\tan x - \sqrt{3}}{x - \frac{\pi}{3}} \text{ si } x \neq \frac{\pi}{3} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \text{ et } x_0 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

4

$$\begin{cases} f(x) = \frac{ax^2 + (a+1)x + 1}{2x^2 + x - 1} \text{ si } x \neq -1 \\ f(-1) = \frac{1}{3} \text{ et } x_0 = -1 \end{cases}$$

**Exercice 7**

Soit la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} f(x) = 1 - \frac{3}{x-1}; & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = -ax^2 + 2(1+a); & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

- 1 Déterminer le domaine de définition de f .
- 2 Déterminer a pour que f soit continue en -2 .

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} f(x) = -\sqrt{1-x}; & \text{si } x \leq -3 \\ f(x) = ax + b; & \text{si } -3 < x < 3 \\ f(x) = \sqrt{1+x}; & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- 1 Déterminer les deux réels a et b pour que f soit continue en -3 et en 3 .
- 2 a et b ayant les valeurs trouvées, la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} f(x) = ax + \sqrt{3x^2 + 1}; & \text{si } x \leq -1 \\ f(x) = 3x^2 + bx; & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x + 4a}{\sqrt{x^2 + 3}}; & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

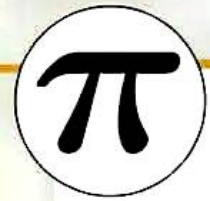
Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \rightarrow \begin{cases} x^2 + 1; & \text{si } x < 0 \\ x + 2; & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1 Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.



- 2 Déterminer les images par f des intervalles suivants : $[-2; -1]$, $[-1; -1]$, $[0; +\infty[$.

Exercice 11

En utilisant le tableau de variations ci-dessous d'une fonction f , répondre aux questions suivantes :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$

- 1 Déterminer le domaine de définition de f .

- 2 Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(\sqrt{x}); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right); \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{-1}{x^2 + 1}\right); \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1}{f(x)} \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2 - x^2}{2 + x^2}\right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x^2 + 1}{2x - 1}\right); \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x) + 3} \end{aligned}$$

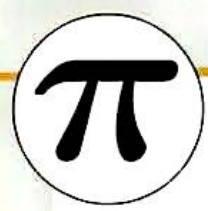
- 3 Déterminer les images des intervalles suivants par f : $] - \infty, -1]$, $] - 1, 0[$, $] - \infty, 0[$, $]0, +\infty[$.

Exercice 12

Soit f la fonction numérique définie sur $] - 2; 2[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x} & \text{si } -2 < x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 - 5x^2 & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction f sur $] - 2; 2[$.

**Exercice 16**

1 Montrer que les équations suivantes ont une unique solution α dans l'intervalle I indiqué :

a) $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$; $I = [2, 3]$

b) $2x\sqrt{x+2} + 1 = 0$; $I = [-1, 0]$

c) $x^2 + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 2$; $I = [0, 4]$

2 Donner une valeur approchée de α dans chaque cas à 10^{-1} près.

Exercice 17

1 Démontrer que l'équation $\frac{1}{x-2} = \sqrt{x}$ admet au moins une solution sur $]2; +\infty[$.

2 Démontrer que cette équation admet une unique solution α sur $]2; +\infty[$.

3 Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .