

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^3 - 4x + 2$

- ① Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- ② Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f .
- ③ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0, 1[$.
- ④ Donner un encadrement de α d'amplitude 0,25
- ⑤ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(2x - 1)f(x) = 0$
- ⑥ Montrer que : $f'(\alpha) = \frac{-6 + 8\alpha}{\alpha}$

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie sur $I = [-3; +\infty[$ par : $f(x) = x + 2\sqrt{x+3} - 1$.

- ① Étudier la continuité de la fonction f sur I .
- ② Étudier la dérivabilité de f à droite de -3 puis interpréter le résultat.
- ③ Calculer $f'(x)$ pour tout x de $] -3; +\infty[$, puis déduire que f est croissante sur I .
- ④ Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.
- ⑤ Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J .
- ⑥
 - a) Donner le tableau de variations de f^{-1} sur J .
 - b) Calculer $f^{-1}(4)$
 - c) Vérifier que $(\forall x \in [-3; +\infty[) : f(x) = (\sqrt{x+3} + 1)^2 - 5$.
 - d) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x+1}$.

- ① Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- ② Étudier la dérivabilité de f à droite en -1 , puis interpréter le résultat géométriquement.
- ③ Étudier la continuité de f sur $[-1, +\infty[$.
- ④
 - a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $] -1; +\infty[$.
 - b) Dresser le tableau des variations de f .
- ⑤ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
 - b) Vérifier que : $f(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2 - 2$.
 - c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J .

Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

- ① Vérifier que : $D_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.
- ② (a) Montrer que : $(\forall x \in D_f) \quad f'(x) = \frac{-1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$.
 (b) Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .
- ③ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty; -1[$.
 (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.
 (b) Comparer $g^{-1}(-\sqrt[3]{2025})$ et $g^{-1}(-\sqrt[3]{2026})$.
 (c) Montrer que g^{-1} est dérivable en $-\sqrt{2}$ et calculer la valeur de $(g^{-1})'(-\sqrt{2})$.
 (d) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J .

Exercice 5

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 2\sqrt{x - 1}$

- ① Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- ② Étudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter Graphiquement le résultat.
- ③ (a) Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x - 1}(1 + \sqrt{x - 1})}$
 (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- ④ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [2; +\infty[$.
 (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.
 (b) Montrer que g^{-1} est dérivable en 1 puis Calculer $(g^{-1})'(1)$ (On remarque que : $g(5) = 1$)

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x + 8$.

- ① (a) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 (b) Montrer que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- ② (a) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que : $-2 < \alpha < -1$.
 (b) Calculer $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ puis en déduire un encadrement de α d'amplitude 0,5.
- ③ Dresser le tableau de signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- ④ (a) Justifier que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
 (b) Montrer que f^{-1} est dérivable en -2 et que : $(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{13}$.

Exercice 7

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par : $g(x) = x + \sqrt{x} - 4$

- ① Montrer que la fonction g est continue sur I .
- ② Étudier les variations de la fonction g sur I .
- ③ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]2; 3[$.
- ④ Vérifier que : $\alpha^2 - 9\alpha + 16 = 0$, puis déterminer la valeur exacte de α .
- ⑤ Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- ⑥ Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 2\sqrt{1-x}$

- ① (a) Déterminer D_f et calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
(b) Justifier soigneusement que f est continue sur D_f .
- ② (a) la fonction f est-elle dérivable à gauche en $x_0 = 1$? Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
(b) Montrer que : $(\forall x \in]-\infty; 1[) f'(x) = \frac{-x}{1-x+\sqrt{1-x}}$. Puis dresser le tableau de variations de f .
- ③ (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $] -5; -4[$.
(b) Vérifier que : $\alpha^2 + 4\alpha - 4 = 0$, puis en déduire la valeur exacte de α .
- ④ Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [0; 1]$.
(a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = [1; 2]$.
(b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 9

On considère la fonction numérique f définie sur $I = [0; +\infty[$ par : $f(x) = x + 2\sqrt{x} - 1$.

- ① Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
- ② Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- ③ Montrer que $f'(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ pour tout x dans $]0; +\infty[$.
- ④ Dresser le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.
- ⑤ (a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
(b) Montrer que f^{-1} est dérivable au point 7 et calculer $(f^{-1})'(7)$.
(c) En déduire : $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{f^{-1}(x) - 4}{x - 7}$.
(d) Donner le tableau de variations de f^{-1} sur J .
(e) Donner l'équation de la tangente de $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ au point d'abscisse 7.

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $I = [-2; +\infty[$ par : $f(x) = -1 + \sqrt{x+2}$.

- ① Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- ② Justifier la continuité de f sur l'intervalle I .
- ③ Montrer que $\forall x \in]-2; +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{2x+4}$.
- ④ En déduire que f est strictement croissante sur I et dresser le tableau de variations.
- ⑤ Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- ⑥ (a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
(b) Calculer $f(2)$ et en déduire que f^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $(f^{-1})'(1)$
- ⑦ Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$

- ① Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- ② Montrer que l'équation $f(x) = x^2$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0; 1[$.
- ③ Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [4; +\infty[$
 - (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser son domaine de définition J .
 - (b) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-3; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 9}$

- ① Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- ② Montrer que : $x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = (x+1)^3 + 8$.
- ③ Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $[-3; +\infty[$.
- ④ Montrer que f est continue sur l'intervalle $[-3; +\infty[$.
- ⑤ (a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
(b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x appartenant à J .