



Dérivation - Etude de fonctions



2^{ème} bac sciences
expérimentale

EXERCICE 1

Étudier la dérivabilité de f en a dans chacune des cas suivantes:

1 $f(x) = x - 2; \quad a = 2$

2 $f(x) = x^3 + x; \quad a = 1$

3 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}; \quad a = 2$

4 $f(x) = -\sqrt{1 - x}; \quad a = 1$

5 $f(x) = x^2 + x; \quad a = 1$

6 $f(x) = x^2 \cos(x); \quad a = 0$

7 $f(x) = \frac{1}{x}; \quad a = 2$

8 $f(x) = \sqrt{x}; \quad a = 2$

EXERCICE 2

En utilisant le nombre dérivée, calculer les limites suivantes :

A $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$

B $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^5 - x)^{100} - 1}{x - 1}$

C $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

D $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^7 - 128}{x^5 - 32}$

E $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 2)^{2026} - 1}{x + 1}$

F $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos(x) - \sqrt{2}}{2 \sin(x) - \sqrt{2}}$

EXERCICE 3

Déterminer dans chacun des cas suivants la fonction dérivée de la fonction f définie comme suit :

a $f(x) = x^6 + x^5 + 2x^2 - \frac{x}{2}$

b $f(x) = \frac{1}{3x^2 + 5}$

c $f(x) = \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{x} + 3x$

d $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}$

e $f(x) = \cos(x^2 + 7x - 1)$

f $f(x) = \left(\frac{x + 1}{x^2 + 3x + 7} \right)^3$

g $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 - 2}$

h $f(x) = \cos(\sqrt{x^2 + 5})$

i $f(x) = \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1}}$

j $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x - 1}}$

k $f(x) = \cos(5x^2 + 4)$

l $f(x) = \frac{\sqrt{x + 5}}{x\sqrt{x}}$

m $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

n $f(x) = (x - 1)^{\frac{1}{3}} \sqrt{x - 1}$

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $I = [1, +\infty[$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$

1 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle à déterminer.

2 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $2 < \alpha < 3$, puis en déduire le signe de f sur $[1, +\infty[$.

3 Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et que : $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$

EXERCICE 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ x^3 + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2 a Étudier la dérivabilité de f à droite de 1, puis interpréter le résultat géométriquement.

b Étudier la dérivabilité de f à gauche de 1, puis interpréter le résultat géométriquement.

- 3 a Montrer que f est strictement croissante sur $I =]-\infty, 1[$.
- b Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 1[$, on a : $f'(x) = \frac{x+1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}$
- c Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 4 Soit g la restriction de f sur $I =]-\infty, 1[$.
- a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J .
- b Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

EXERCICE 6

Soit la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par : $f(x) = 3\sqrt{x+1} - x$

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis étudier les branches infinies de (C_f)
- 2 Étudier le sens des variations de la fonction f .
- 3 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans l'intervalle $]5, 6[$.
- 4 a Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]2, 3[$.
- b Vérifier que $3\sqrt{\alpha+1} = \frac{2}{3}\alpha$.
- 5 a Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J .
- b Montrer que f^{-1} est dérivable en α et que : $(f^{-1})'(\alpha) = \frac{4\alpha^2}{9-4\alpha^2}$

EXERCICE 7

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x(\sqrt{x}-2)^2$
Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ Que peut-on déduire ?
- 2 Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, puis interpréter le résultat obtenu.
- 3 a Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = 2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$
- b Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 4 Étudier la concavité de la courbe (C_f) et montrer que (C_f) admet un unique point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
- 5 Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $f(x) = x$ et interpréter le résultat graphiquement.
- 6 Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 7 Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [4; +\infty[$.
- a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- b Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1} .
- c Calculer $g(9)$ puis déterminer $g^{-1}(9)$.
- d Montrer que pour tout $x \in J$, on a : $g^{-1}(x) = \left(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1\right)^2$
- 8 Tracer la courbe $(C_{g^{-1}})$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 8

- 1 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 5}$
 - a Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f
 - b Montrer que la droite (D) d'équation $x = -3$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f)
 - c En déduire D_E , le domaine d'étude de f
- 2 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$
Montrons que $\Omega(-2, -3)$ est un point de symétrie de la courbe (C_f)

EXERCICE 9

On considère la fonction $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$
Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Étudier les branches infinies de (C_f)
- 2 Calculer f' sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de f
- 3 Étudier la convexité de (C_f) , en précisant les points d'inflexion
- 4 Montrer que le point $A(1,5; -2,5)$ est le centre de symétrie de (C_f)
- 5 Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-1; 0[$
- 6 Tracer (C_f) dans un repère orthonormé

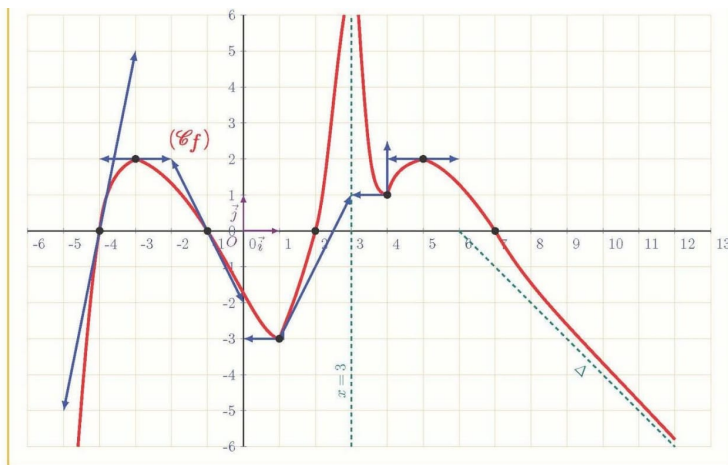
EXERCICE 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{3x^4 + 1}{3x^3}$
Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Étudier la parité de la fonction f et déduire D_E , le domaine d'étude de la fonction f
- 2 a Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis montrer que la droite $(D) : y = x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$
b Étudier la position relative de (C_f) et la droite (D) sur D_E
- 3 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométrique lorsque $x \rightarrow 0^+$
- 4 a Calculer la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$
b Donner le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$
- 5 Tracer (C_f) , la courbe représentant la fonction f
- 6 Considérons la fonction g définie par : $g(x) = \frac{3x^4 + 1}{3|x^3|}$
- 7 a Étudier la parité de la fonction g
b Tracer (C_g) , la courbe de g , en justifiant votre réponse

EXERCICE 11

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. La courbe représentative de f est notée (C_f) .
Par lecture graphique, déterminer :



1 $f(-4), f(-1), f(1), f(4), f(5)$

2 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x)$

3 $f'(-4), f'(-3), f'(-1), f'(5)$

4 Étudier : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) + 3}{x - 1}, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) + 3}{x - 1}, \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - 1}{x - 4}, \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f(x) - 1}{x - 4}$

5 Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse -4

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ et (C_g) sa courbe dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

a Déterminer le domaine de définition de g

b Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 3} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

c Étudier et interpréter graphiquement : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow -1} g(x)$

EXERCICE 12

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$
Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 a Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(x) = x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} \right)$

b Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$

c Interpréter les résultats obtenus graphiquement.

2 Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 2}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement.

3 a Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}$

b Dresser le tableau de variations de la fonction f .

c Déterminer les extremums de f .

d En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f(x) > 0$

4 Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 3.

5 On considère la droite (Δ) d'équation $y = x$.
Déterminer la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite (Δ) sur $\mathbb{R}^+$.

6 Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

7 Soit g la restriction de la fonction f sur $I = [1; +\infty[$

a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1} .

c Calculer $g(4)$ puis déterminer $(g^{-1})'(2)$.

d Montrer que pour tout $x \in J : (g^{-1})'(x) = (1 + \sqrt{x - 1})^2$

8 Tracer la courbe $(C_{g^{-1}})$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

EXERCICE 13

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = 6x - 8x\sqrt{x} - \frac{1}{2}$

1 Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations.

2 En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) \leq 0$

Partie II

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = (4x - 1)\sqrt{x} - 4x^2 + 1$
Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2 Étudier la nature de la branche infinie de (C_f)

3 Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, puis Interpréter graphiquement le résultat obtenu

4 a Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}$

b Dresser le tableau de variations de la fonction f .

5 Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) Au point d'abscisse $\frac{1}{4}$.

6 a Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* : f''(x) = \frac{(1 - 2\sqrt{x})(16x + 2\sqrt{x} + 1)}{4x\sqrt{x}}$

b Etudier la concavité de la courbe (C_f) .

7 Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie III

Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$.

1 Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

2 Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h^{-1}(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h^{-1}(x)}{x}$

3 Tracer la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 14

On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} & ; x \geq 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - x} & ; x < 0 \end{cases}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 Vérifier que : $D_f = \mathbb{R}$.

2 a Étudier la continuité de la fonction f en 0.

b Étudier la dérivabilité à gauche et à droite de la fonction f en 0, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3 a Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b Montrer que la droite (D) d'équation $y = -2x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

c Montrer que pour tout $x \in]-\infty; 0[: f(x) - (-2x + 1) = \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2-2x}}$ Puis en déduire la position relative de

la courbe (C_f) et la droite (D) sur l'intervalle $] -\infty; 0[$.

4 a Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

b Étudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite $(\Delta) : y = x$.

a Montrer que :
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} & ; x > 0 \\ f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} - 1 & ; x < 0 \end{cases}$$

b Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

5 Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) Au point d'abscisse 1.

6 Tracer la courbe (C_f) . (on admet que (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse $\sqrt{3}$).

7 Soit g la restriction de la fonction f sur $I = [0; +\infty[$

a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1} .

c Calculer $g(1)$ puis montrer que g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ puis déterminer $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$

d Tracer la courbe $(C_{g^{-1}})$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

EXERCICE 15

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x - 4} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 a Étudier la continuité de la fonction f en 0.

b Étudier la dérivabilité à gauche et à droite de la fonction f en 0, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3 a Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - \frac{7}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

4 a Montrer que :
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{2(x-1)}{3\sqrt{(x^2-2x)^2}} & \text{si } x < 0 \\ f'(x) = 1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2+x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

b Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

5 Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse -2.

6 Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

7 Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =] -\infty; 0[$.

a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $] -\infty; 0[$, puis vérifier que : $-8 < \alpha < -7$.

c Montrer que g^{-1} est dérivable en -2, puis déterminer $(g^{-1})'(-2)$.

d Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.