

Exercice 1.

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 4x - 1 ; x < 0 \\ f(x) = x\sqrt{x} - 4x - 1 ; x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) a) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.
 b) Étudier la dérivabilité de f à gauche en 0.
 c) f est-elle dérivable en 0 ?
- 2) Écrire une équation cartésienne de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Exercice 2.

Soit g la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x-1} ; x \neq 1 \\ g(1) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

- 1) Étudier la continuité de f en 1.
- 2) Étudier la dérivabilité de f en 1 ,Puis interpréter le résultat obtenu géométriquement.

Exercice 3.

Soit la fonction définie par :

$$f : x \mapsto x^3 - 3x.$$

- 1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f et calculer ses limites aux bornes de D_f .
- 2) Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
- 3) Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 4.

Soit la fonction : $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

(C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

- 1) Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Déterminer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 3) Déterminer les branches infinies de (C_f) .
- 4) Calculer $f''(x)$ et déduire la concavité de (C_f) .
- 5) Dresser (C_f) .

Exercice 5.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

(C_f) sa courbe dans repère orthonormé.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Que peut-on conclure ?

- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x$. Conclure ?

- 3) Montrer que :

$$\forall x \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[: f'(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$$

- 4) Dresser le tableau de variations de f .
- 5) Construire (C_f) .

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x^2 + x - 2$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2) Étudier les branches infinies de (C_f) .
- 3) Déterminer $f'(x)$; la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
- 4) Dresser le tableau de variations de f .
- 5) Déterminer $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$. Puis étudier la concavité de (C_f) .
- 6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis vérifier que $0 < \alpha < 1$.
- 7) Construire (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 7.

- 1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 3x - 3$$

- a - Étudier les variations de g .
- b - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α puis vérifier que $2 < \alpha < 3$.
- c - Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,25.
- d - Déterminer le signe de $g(x)$.

- 2) Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$

- a - Montrer que le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
- b - Déduire les variations de f .

c - Montrer que : $f(\alpha) = 3\alpha$

3) a - Montrer que pour tout x de $]1; +\infty[$:

$$f(x) = 2x + \frac{2x+3}{x^2-1}$$

b - Étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

c - Dresser (C_f) dans un repère orthonormé.

Exercice 8.

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x\sqrt{x^2 - 2x}.$$

(C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

1) Montrer que $D_f =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$.

2) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3) a- Étudier la dérivabilité de f à gauche en 0. Donner une interprétation géométrique du résultat trouvé.

b- Étudier la dérivabilité de f à droite en 2. Donner une interprétation géométrique du résultat trouvé.

4) Montrer que :

$$\forall x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[: f'(x) = \frac{2x(2x-3)}{\sqrt{x^2-2x}}$$

5) Dresser le tableau de variations de f .

6) Étudier les branches infinies de (C_f) .

7) Construire (C_f) .

Exercice 9.

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 - x}$$

(C_f) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Calculer la limite de f au voisinage de $+\infty$.

2) a- Montrer que : $(\forall x > 1) :$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-1}{x} - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

b- Étudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter le résultat.

3) a- Montrer que :

$$(\forall x > 1) : f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{-2x+1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

b- Donner le tableau de variations de f .

4) Montrer que (C_f) coupe l'axe des abscisses en un unique point dont l'abscisse α telle que : $1 < \alpha < \frac{3}{2}$

5) a- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - x}) = \frac{1}{2}$

b- Montrer que la droite d'équation : $y = -x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

6) Dresser (C_f) .

7) a- Montrer que f admet une réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b- Dresser $(C_{f^{-1}})$ la courbe de f^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 10.

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par :

$$f(x) = -x + \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

(C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé.

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f .

2) Calculer la limite de f à droite en 1 puis interpréter le résultat géométriquement.

3) Calculer les deux limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

4) Étudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et donner une interprétation géométrique.

5) a- Déterminer f' la dérivée de f .

b- Vérifier que : $(\forall x \in D_f - \{0\}) f'(x) < 0$

c- Dresser le tableau de variations de f .

6) a- Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ d'équation $y = -x + 1$.

b- Dresser (C_f) . (On donne $f(1,6) \approx 0$)

Exercice 11. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - x + 1.$$

(C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé.

1) Montrer que $D_f =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$.

2) Montrer que :

Si $x \leq 0$ Alors $f(x) > 0$.

Si $x > 0$ Alors $f(x) < 0$.

3) Étudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et à droite en 2. Donner une interprétation géométrique.

- 4) Montrer que pour tout x de $] -\infty; 0[\cup]2; +\infty[:$

$$f'(x) = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

 Dresser le tableau de variations de f .
- 5) Étudier les branches infinies de (C_f) .
- 6) Construire (C_f) .
- 7) Soit g la restriction de f sur $I = [2; +\infty[$.
- a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera .
- b- Dresser dans le même repère précédant $(C_{g^{-1}})$ la courbe de g .

Exercice 12.

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{3x+3}{\sqrt{2x-1}}$$

(C_f) la courbe f dans un repère orthonormé.

- 1) Trouver D_f le domaine de définition de f .
- 2) Étudier les branches infinies de (C_f) la courbe f .
- 3) Montrer que :

$$(\forall x \in D_f) : f'(x) = \frac{3x-6}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

 Puis étudier les variations de f .
- 4) a- Montrer que pour tout x de D_f :

$$f''(x) = \frac{3(5-x)}{(2x-1)^{\frac{5}{2}}}$$

 b- Déterminer les coordonnées de Ω le point d'inflexion de (C_f) .
- 5) Dresser (C_f) .
 (Unité de mesure $2cm$)

- 6) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [2; +\infty[$.

- a- Montrer que g admet une réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J .
- b- Dresser $(C_{g^{-1}})$.

Exercice 13.

Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 2}$$

(C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) Vérifier que : $x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2$
 Déduire D_g .

- 2) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
 b- Étudier les branches infinies de g .
- 3) a- Étudier la dérivabilité de g à droite en -2 , puis interpréter le résultat géométriquement.
 b- Étudier la dérivabilité de g en $a = 1$, puis interpréter le résultat géométriquement.
 c- Étudier les variations de g .
- 4) Construire (C_g) .

Exercice 14.

Soit la fonction numérique : $f : x \mapsto x\sqrt{x^2 - 1}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ telle que $\|\vec{i}\| = 3cm$.

- 1) Déterminer D_f le domaine de définition de f .
- 2) Étudier la dérivabilité de f à droite en 1 .
- 3) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$.
- 4) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion A dont l'abscisse est positif.
- 5) Étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$ puis dresser (C_f) .
- 6) Déterminer selon les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation

$$\sqrt{x^4 - x^2} - m = 0$$

Exercice 15.

Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = x\sqrt{x^2 + 1} - x^2$$

- 1) a- Déterminer D_f le domaine de définition de f .
 b- Calculer les limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Interpréter les résultats géométriquement.

- 2) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- 3) Dresser le tableau de variations de f .

- 4) a- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \leq x$ et Interpréter le résultat géométriquement.
- b- Construire (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 5) a- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- b- Montrer que :
- $$\forall x \in J : f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}.$$
- c- Construire $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 16.

Considérons la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 6x^{\frac{2}{3}} - 4x$$

(C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$
 Puis interpréter le résultat géométriquement.
- 2) Déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- 3) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f .
- 4) a- Déterminer les deux points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.
- b- Déterminer une équation de la tangente (Δ) à (C_f) au point d'abscisse $\frac{27}{8}$.
- c- Construire (Δ) et (C_f) .
- 5) Soit g la restriction de f sur $[1; +\infty[$.
- a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- b- Calculer Montrer que g^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $(g^{-1})'(0)$.

Exercice 17.

Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}$$

- 1) Déterminer D_f .
- 2) Vérifier que f est impaire.
- 3) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- b- Déterminer la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

- 4) a- Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 3}{3(x^2 + 1)^{\frac{4}{3}}}$$

- b- Dresser le tableau de variations de f .

- 5) Construire (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé.

- 6) Soit g la restriction de f sur

$$I = [0; +\infty[.$$

- a- Montrer que g admet une réciproque g^{-1} définie sur J que l'on déterminera

- b- Dresser dans le même repère $(C_{g^{-1}})$ la courbe de g^{-1} .

- c- Résoudre dans $\mathbb{R}+$ l'équation :

$$g^{-1} \left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} \right) = x.$$