

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation:

$$(\mathbf{E}) : \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[3]{2}$$

Réolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation:

$$(E): \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[3]{2}$$

$$D_E = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1+x \geq 0 \text{ et } 1-x \geq 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \text{ et } x \leq 1 \}.$$

$$D_E = [-1; 1]$$

$$x \in D_E \Leftrightarrow \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[3]{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} \right)^3 = \left(\sqrt[3]{2} \right)^3$$

Astuce

On a $a + b = c$

$$\Rightarrow (a + b)^3 = c^3$$

$$\Rightarrow a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = c^3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = c^3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + 3abc = c^3$$

On a:

$$x \in D_E \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} \right)^3 = \left(\sqrt[3]{2} \right)^3$$

$$\Leftrightarrow \cancel{1+x} + \cancel{1-x} + 3\sqrt[3]{1+x} \times \sqrt[3]{1-x} \times \sqrt[3]{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2} + 3\sqrt[3]{2(1+x)(1-x)} = \cancel{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{2(1+x)(1-x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} = 0$$

alors:

$$x \in D_E \Leftrightarrow (1+x)(1-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1+x = 0 \text{ ou } 1-x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \in D_E \text{ ou } x = 1 \in D_E$$

$$\text{Ainsi } S = \{-1; 1\}.$$